

Marcin JARMOŁOWICZ*

CZĘSTOTLIWOŚCIOWA ANALIZA JAKOŚCI ALGORYTMÓW PRZEPRÓBKOWYWANIA SYGNAŁÓW JEDNOWYMIAROWYCH

Artykuł zawiera analizę jakości wybranych algorytmów przetwarzania sygnałów cyfrowych. Wspomniana ocena opiera się na badaniu widma przetwarzanych sygnałów. W ten sposób uzyskana została obiektywna i ścisła informacja o zniekształceniach wprowadzonych do sygnałów o nowej częstotliwości próbkowania względem oryginału. Wykazane też zostało, że metoda analizy w dziedzinie częstotliwości jest uniwersalna, tj. można ją stosować dla dowolnych sygnałów i współczynników przetwarzania.

Dla celów testowych zostało wygenerowane kilka próbnych sygnałów, zarówno deterministycznych jak i losowych, o różnym rozkładzie częstotliwościowym. Następnie sygnały te zostały przetworzone w górę (zwiększenie częstotliwości próbkowania) oraz w dół (zmniejszenie częstotliwości próbkowania) o niecałkowity mnożnik częstotliwości.

Zebrane dane pozwoliły na obserwację zniekształceń widma, pojawiania się nowych częstotliwości i tłumienia już istniejących.

1. SPOSOBY ANALIZY I OCENY BŁĘDÓW KONWERSJI CZĘSTOTLIWOŚCI PRÓBKOWANIA

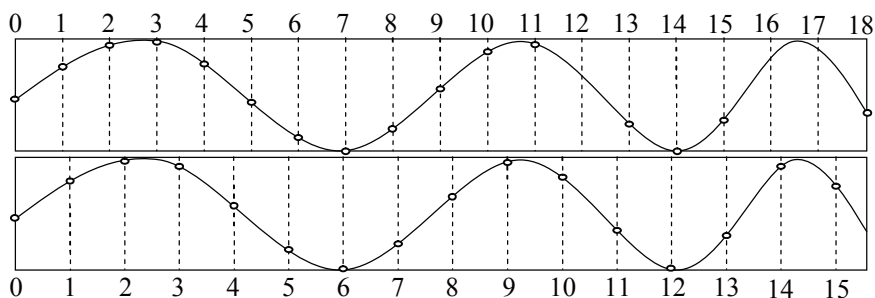
1.1. Metody pomiarowe

Jedną z najistotniejszych zalet stosowania sygnałów cyfrowych jest całkowity brak utraty jakości podczas ich transmisji lub przechowywania. Jednocześnie ich ogromna popularność w naturalny sposób powoduje pojawienie się licznych formatów reprezentujących wspomniane sygnały, często w tym samym obszarze zastosowań. To z kolei prowadzi do problemu braku kompatybilności ze względu na jeden lub kilka parametrów sygnału. W takim wypadku wymagane jest przeprowadzenie odpowiedniej konwersji. Podstawowym parametrem jest tu z całą pewnością częstotliwość próbkowania sygnału cyfrowego. Jej konwersja jest jednak z reguły dość kłopotliwa, a co najgorsze najczęściej powoduje bezpowrotną utratę jakości sygnału. W ten sposób pozbywamy się kluczowej zalety techniki cyfrowej i to w procesie, który nie rekompensuje nam tego w żadnym innym obszarze dotyczącym jakości sygnału (np. odszumianie, filtracja itp.).

* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

Wszystko to sprawia, że stosując algorytmy próbkowania sygnału powinniśmy mieć świadomość w jakim zakresie zniekształcają one sygnał oryginalny. Parametry mierzące wielkość błędów konwersji powinny być obiektywne i dostarczać jak najpełniejszej informacji o wprowadzanych deformacjach, a jednocześnie intuicyjne i łatwe w interpretacji. Takie cechy posiada błąd średniokwadratowy, popularny w obszarze przetwarzania sygnałów.

Badając zniekształcenia możemy oceniać sygnał wynikowy w dziedzinie czasu lub częstotliwości. W pierwszym przypadku przy założonej strategii badań natrafiamy na podstawowy problem; próbki czasowe sygnału wejściowego i wyjściowego występują w różnych chwilach czasu, stąd ich wartości nie odpowiadają sobie (rysunek 1). Porównywanie ich nie ma więc sensu.



Rys. 1. Sygnał skwantowany w dziedzinie czasu dla dwóch różnych częstotliwości próbkowania

Okazuje się, że w dziedzinie częstotliwości powyższy problem nie występuje. W tym wypadku można by się spodziewać niedopasowania próbek widma sygnału oryginalnego i przekonwertowanego. Spróbujmy więc wyznaczyć relacje wartości skoku częstotliwości Δf_i i Δf_o kolejnych próbek widma sygnału odpowiednio wejściowego i wyjściowego o długościach kolejno n_i oraz n_o i okresach próbkowania Δt_i i Δt_o . Ponieważ próbkowanie nie wpływa na czas trwania sygnału, możemy więc zapisać:

$$\Delta t_i \cdot (n_i - 1) = \Delta t_o \cdot (n_o - 1) \quad (1)$$

Wyznaczmy n_o wprowadzając do wzoru częstotliwość próbkowania f_{s_i} dla sygnału wejściowego i f_{s_o} dla sygnału wyjściowego jako odwrotność okresu próbkowania:

$$n_o = \frac{f_{s_o}}{f_{s_i}} \cdot (n_i - 1) + 1 \quad (2)$$

Poszukiwane wartości Δf_i i Δf_o obliczamy ze wzorów:

$$\Delta f_i = \frac{f_{s_i}}{n_i - 1} \quad (3)$$

$$\Delta f_o = \frac{f s_o}{n_o - 1} \quad (4)$$

Dokonując podstawienia wzoru 2 do równania 4 uzyskujemy:

$$\Delta f_o = \frac{f s_o}{\frac{f s_o}{f s_i} \cdot (n_i - 1)} = \frac{f s_i}{n_i - 1} = \Delta f_i \quad (5)$$

Ze wzoru 5 wynika, że kolejne próbki transformaty sygnałów przed i po przepróbkowaniu są tak samo rozłożone na osi częstotliwości. Jednocześnie równanie 1 wskazuje, że wektory obu sygnałów, a więc i ich widma są różnej długości. Nie stanowi to jednak istotnego problemu. Dla zmiany częstotliwości próbkowania na wyższą, do pomiarów błędów konwersji widmo sygnału oryginalnego będzie rozszerzane do długości widma sygnału wynikowego i uzupełniane zerami. W przeciwnym wypadku dopełnione zerami zostanie widmo sygnału wyjściowego. Podejście takie jest zgodne z twierdzeniem o próbkowaniu.

W ten sposób zostało wykazane, że analiza częstotliwościowa (w odróżnieniu od czasowej) błędów resamplingu jest uniwersalna; bez względu na współczynnik przepróbkowania, rozdzielczość widma sygnału nie zmienia się, co pozwala na porównanie obu wektorów widm dowolną metodą.

W tabelach od 2.1 do 2.5 znajdują się wyniki pomiarów jakości algorytmów. Zaprezentowane tam błąd średniokwadratowy oraz średnie odchylenie widma obliczone zostały na podstawie wektorów widma sygnału testowego przed i po konwersji. Druga z pośród wyżej wymienionych miar oznacza średnią wartość modułu różnicy odpowiadających sobie wartości (harmonicznych) obu wektorów.

Do przeprowadzania pomiarów, generowania sygnałów oraz uruchomienia algorytmów resamplingu zastosowany został program Matlab.

Wszystkie badane algorytmy testowane będą pod kątem konwersji zwiększania (do 48 kHz) i zmniejszania (do 32 kHz) częstotliwości próbkowania.

1.2 Sygnały testowe

Dobór sygnałów testowych jest obok wyboru metody pomiarowej najistotniejszym elementem przeprowadzonego badania. Nie chodzi tu tylko o sam kształt przebiegu czasowego (wektor próbek sygnału), lecz także o jego parametry, takie jak: rozdzielczość bitowa, czas trwania, częstotliwość próbkowania.

Pierwszą grupę sygnałów testowych stanowią proste przebiegi okresowe, składające się odpowiednio z jednej, trzech (50 Hz, 4 kHz, 14 kHz) i dziesięciu (2 Hz, 30 Hz, 500 Hz, 1 kHz, 1.2 kHz, 2.1 kHz, 5 kHz, 6 kHz, 8.2 kHz, 9 kHz) zsumowanych sinusoid. W ten sposób uzyskujemy sygnał bardzo prosty w analizie widmowej nawet bez użycia dodatkowych narzędzi pomiaru błędów. Wadą tego podejścia jest jego syntetyczność, zastosowane przebiegi mocno odbiegają od tych najczęściej spotykanych w praktyce.

Kolejnym sygnałem jest nagrany dźwięk emitowany przez gitarę klasyczną o wysokości c razkreślne (biorąc pod uwagę transpozycję w zapisie nutowym dla gitary o oktawę w dół, w rzeczywistości jest to c małe). Rozwiązanie to jest kompromisowe; widmo jest tu mocno skupione wokół prążka głównego, niemniej występują też liczne harmoniczne poboczne. Stąd też algorytmy repróbki testowane są w tym wypadku w naturalnych warunkach, choć obserwacja błędów (szczególnie niewielkich) jest mocno utrudniona.

Na końcu wygenerowany został wektor pseudolosowych próbek poddany filtracji dolnoprzepustowej o częstotliwości granicznej 14 kHz.

Wszystkie opisane wyżej sygnały posiadają pewne wspólne parametry: częstotliwość próbkowania wynosi 44100 kHz, rozdzielczość 16 bitów, a długość wektora to 88200 próbek.

Okazuje się, że dobór ostatniego parametru wpływa na precyzję pomiarów błędów widma. Jeśli źle dobierzemy długość sygnału oryginalnego, wektor wyjściowy będzie miał niecałkowitą ilość próbek. Wymagane zaokrąglenie w dół sprawi, że pojawią się nieznaczne różnice w rozdzielczości częstotliwościowej widma. Dodatkowo długość sygnału wpływa na jakość odwzorowania realnego widma podczas obliczania dyskretnej transformaty Fouriera. Tak duża ilość próbek sygnału sprawia jednak, że błędy wynikające z zastosowania okna czasowego są pomijalnie małe.

2. POMIARY BŁĘDÓW ALGORYTMÓW RESAMPLINGU

2.1. Aproksymacja liniowa

Badany algorytm jest w pewien sposób podobny do metody trapezowej całkowania numerycznego i polega na znajdowaniu próbek nowego sygnału na linii łączącej oryginalne próbki. Jest to podejście bardzo intuicyjne, często stosowane w kontekście przebiegów dyskretnych, niemniej niezbyt popularne w zastosowaniach resamplingu. Wyniki pomiarów zaprezentowane są w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Wyniki pomiarów błędów przepróbkowania algorytmem aproksymacji liniowej

| Sygnał | Błąd średniokwadratowy | | Średnie odchylenie widma | |
|-----------------------|------------------------|-------------|--------------------------|-----------|
| | 32 kHz | 48 kHz | 32 kHz | 48 kHz |
| sinus 500 Hz | 0.005217 | 7.986262 | 0.000647 | 0.155661 |
| sinus 14 kHz | 2695.818824 | 6735.812412 | 0.426500 | 3.826738 |
| suma 3 sinusów | 2716.902648 | 7250.782865 | 0.460062 | 4.803296 |
| suma 10 sinusów | 1021.849518 | 7095.369809 | 0.480165 | 8.399545 |
| gitarra klasyczna | 0.000116 | 0.000550 | 0.008895 | 0.010598 |
| przebieg pseudolosowy | 225.102210 | 553.989619 | 9.260691 | 14.693037 |

2.2. Powtórna dyskretyzacja sygnału

Metoda opiera się na zastosowaniu kaskady przetwornika C/A i A/C pracującego z nową częstotliwością próbkowania. Mimo, że algorytm wprowadza spore błędy związane z pracą przetworników ze względu na swą prostotę zyskał sporą popularność, choć obecnie jest już coraz rzadziej stosowany. Wyniki pomiarów zaprezentowane są w tabeli 2.2.

Tabela 2.2. Wyniki pomiarów błędów próbkowania algorytmem powtórnej dyskretyzacji sygnału

| Sygnał | Błąd średniokwadratowy | | Średnie odchylenie widma | |
|-----------------------|------------------------|--------------|--------------------------|-----------|
| | 32 kHz | 48 kHz | 32 kHz | 48 kHz |
| sinus 500 Hz | 10.288678 | 17.437991 | 0.087633 | 0.387542 |
| sinus 14 kHz | 7679.560883 | 12111.571365 | 2.137515 | 9.892241 |
| suma 3 sinusów | 8344.777664 | 13220.820885 | 2.552430 | 11.537094 |
| suma 10 sinusów | 8590.373907 | 15338.196949 | 3.679673 | 18.481251 |
| gitara klasyczna | 0.001210 | 0.001538 | 0.015667 | 0.017120 |
| przebieg pseudolosowy | 597.427898 | 1098.212358 | 16.334470 | 26.202234 |

2.3. Algorytm interpolacji i decymacji sygnału

Analizowane obecnie podejście polega na zastosowaniu interpolacji (n-krotne zwiększenie ilości próbek), filtracji dolnoprzepustowej, decymacji (m-krotnym zmniejszeniu ilości próbek) i ponownej filtracji dolnoprzepustowej [5].

Podejście takie jest obecnie szeroko stosowane, a ze względu na dużą złożoność obliczeniową doczekało się wielu rozwiązań patentowych optymalizujących pracę algorytmu. Wyniki pomiarów zaprezentowane są w tabeli 2.3.

Tabela 2.3. Wyniki pomiarów błędów próbkowania algorytmem interpolacji i decymacji

| Sygnał | Błąd średniokwadratowy | | Średnie odchylenie widma | |
|-----------------------|------------------------|-----------|--------------------------|----------|
| | 32 kHz | 48 kHz | 32 kHz | 48 kHz |
| sinus 500 Hz | 0.004792 | 2.953835 | 0.040424 | 0.044449 |
| sinus 14 kHz | 113.866638 | 32.744863 | 1.093709 | 0.933345 |
| suma 3 sinusów | 116.329107 | 36.957711 | 1.430225 | 1.247007 |
| suma 10 sinusów | 19.017785 | 22.790742 | 2.793034 | 2.536565 |
| gitara klasyczna | 0.000455 | 0.005156 | 0.018679 | 0.013475 |
| przebieg pseudolosowy | 3.497921 | 1.628069 | 1.102863 | 0.770386 |

2.4. Przepróbkowanie w dziedzinie częstotliwości

Algorytm jest pewną formą implementacji krótkoczasowej transformaty Fouriera, przy czym do badań zastosowana została jego najprostsza wersja. Opiera się ona na podziale wektora wejściowego na mniejsze, równomiernej długości odcinki, obliczeniu i modyfikacji ich widma [1]. Następnie nowe widmo jest za pomocą odwrotnej transformaty przekształcane na postać czasową, która wraz z pozostałymi odcinkami stanowi sygnał wyjściowy. Wspomniana modyfikacja widma to proste obcięcie widma w przypadku konwersji częstotliwości próbkowania w dół lub dopisaniu zer do widma dla przepróbkowania w górę. Wyniki pomiarów zaprezentowane są w tabeli 2.4.

Tabela 2.4. Wyniki pomiarów błędów przepróbkowania w dziedzinie częstotliwości

| Sygnał | Błąd średniokwadratowy | | Średnie odchylenie widma | |
|-----------------------|------------------------|--------------|--------------------------|-----------|
| | 32 kHz | 48 kHz | 32 kHz | 48 kHz |
| sinus 500 Hz | 2354.001733 | 10569.146025 | 0.231110 | 1.366161 |
| sinus 14 kHz | 13914.549027 | 11264.220703 | 0.743082 | 0.777693 |
| suma 3 sinusów | 19536.037367 | 23898.097494 | 2.252920 | 2.266584 |
| suma 10 sinusów | 25456.756718 | 79509.230603 | 3.627943 | 6.176525 |
| gitara klasyczna | 3.825061 | 7.395325 | 0.094560 | 0.291330 |
| przebieg pseudolosowy | 1190.611437 | 3121.224733 | 23.902531 | 40.287597 |

2.5. Wbudowana funkcja Matlaba

Środowisko Matlaba posiada własną, zaawansowaną funkcję konwersji o nazwie `resample`. Wyniki pomiarów zaprezentowane są w tabeli 2.5.

Tabela 2.5. Wyniki pomiarów błędów przepróbkowania wbudowaną funkcją Matlaba

| Sygnał | Błąd średniokwadratowy | | Średnie odchylenie widma | |
|-----------------------|------------------------|----------|--------------------------|----------|
| | 32 kHz | 48 kHz | 32 kHz | 48 kHz |
| sinus 500 Hz | 0.003610 | 0.007169 | 0.004402 | 0.002279 |
| sinus 14 kHz | 21.123801 | 0.026458 | 0.320360 | 0.054313 |
| suma 3 sinusów | 21.164532 | 0.054292 | 0.353345 | 0.068131 |
| suma 10 sinusów | 0.212707 | 0.106038 | 0.312569 | 0.109680 |
| gitara klasyczna | 0.000099 | 0.000024 | 0.007160 | 0.001443 |
| przebieg pseudolosowy | 0.436950 | 0.005726 | 0.264002 | 0.059992 |

3. WNIOSKI

3.1. Ocena jakości algorytmów

Wyniki zaprezentowane w poprzednim rozdziale są dość jednoznaczne i wskazują, że najlepsza jakość uzyskana została przez algorytmy konwertujące częstotliwość poprzez interpolację, decymację i filtrację sygnału (tabela 2.3 i 2.5). Przewaga funkcji Matlaba wynika ze stosowania zdecydowanie bardziej wydajnych algorytmów filtracji, a w konsekwencji wyższych rzędów filtrów. Metody te są jednocześnie najbardziej złożone obliczeniowo.

Zdecydowanie niższa jakość uzyskana została w przypadku liniowej aproksymacji sygnału próbkowanego. Algorytm działa jednak zdecydowanie szybciej od wcześniej opisanych.

Stosowanie przetworników A/C i C/A wyraźnie mocniej zniekształca widmo niż aproksymacja liniowa, pozwala jednak na prostą implementację sprzętową także w zastosowaniach czasu rzeczywistego.

Podejście spektralne uzyskało zdecydowanie najwyższe wartości błędów, co po części spowodowane jest prostotą zastosowanego algorytmu. Bardziej rozbudowane algorytmy w inny sposób dzielą widmo sygnału i przetwarzają wektory krótkoczasowej transformaty Fouriera. Wydaje się, że możliwości rozbudowy i optymalizacji tej metody są wciąż bardzo duże.

3.2. Wpływ doboru sygnałów testowych na wyniki pomiarów

Istnieje wyraźny związek wyników oceny jakości badanych algorytmów z doborem sygnałów testowych, niemniej, co najważniejsze, nie wpływa on na klasyfikację metod resamplingu. Oznacza to, że z reguły dla poszczególnych sygnałów wejściowych spadek lub wzrost wartości błędów poszczególnych algorytmów jest proporcjonalny.

Warto zaznaczyć, że błędy konwersji częstotliwości próbkowania najbardziej uwidaczniają się w sygnałach, gdzie występują pojedyncze wysokie harmoniczne. Co ciekawe, najwierniej odwzorowany jest pojedynczy dźwięk gitary klasycznej, którego widmo skupione jest w relatywnie wąskim paśmie i skoncentrowane jest wokół niskich częstotliwości.

LITERATURA

- [1] Lohwasser M., Jander M., Neuendorf M., Geiger R., Schnell M., Hildenbrand M., Chalupka T., Resampling output signals of QMF based audio codecs, IPN: WO 2012/020090 A1, 2012.
- [2] Jorgensen J., Method, apparatus and system for digital data resampling utilizing Fourier series based interpolation, Patent No.: US 6 915 225 B2, 2005.

- [3] Wang Z. L., Jiang J., Multi-staging recursive audio frame-based resampling and time mapping, Patent No.: US 2010/0153122 A1, 2010.
- [4] Sobchak C. L., Rahman M., Multirate resampling and filtering system and method, Patent No.: US 8 165 255 A1, 2012.
- [5] Zieliński T., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań, Warszawa 2007, ISBN 978-83-206-1640-8 2007.
- [6] Chu K., Resampling system and apparatus, Patent No.: US 2002/0184277 A1, 2002.
- [7] Muhammad A., On the implementation of integer and non-integer sampling rate conversion, Linköping Studies in Science and Technology Dissertations, No 1420, 2012.

QUALITY ANALYSIS OF RESAMPLING ALGORITHMS FOR ONE-DIMENSIONAL SIGNALS

The article contains the quality analysis of selected resampling algorithms for digital signals. Mentioned evaluation bases on spectral analysis of processed signals. This way, objective and accurate information about distortion of resampled signal was obtained. It was also demonstrated that spectral approach is universal so can be used for any digital signals and resampling coefficient.

For testing purpose there was generated a few sample signals both deterministic and random with miscellaneous frequency distribution. Afterwards the prepared testing signals were resampled both to increase and reduce sampling frequency by non-integer coefficient.

Collected data gives a view on spectral distortion, new harmonics occurring and attenuating already existing frequencies in source signal.