

Maciej Major, Izabela Major

POTENCJAŁ MURNAGHANA DLA CIAŁA HIPERSPRĘŻYSTEGO - WYBRANE INFORMACJE I PRZYKŁAD OBLICZENIOWY PROPAGACJI FALI PRZYSPIESZENIA W PRĘCIE

Wprowadzenie

Ciało materialne jest rozmaitością różniczkową, tzn. zbiorem, który można jedno - jednoznacznie odwzorować na pewien obszar przestrzeni euklidesowej. Ciało sprężyste jest ośrodkiem ciągłym i posiada stan naturalny bez naprężeń i odkształceń. Gdy poddamy go obciążeniu, to wraca do tego stanu po odciążeniu, a zależność między naprężeniem i odkształceniem jest lokalna w czasie i przestrzeni.

Uwzględniając te własności ośrodka ciągłego określamy dla niego związki konstytutywne.

Jednym z podejść do tego zagadnienia jest metoda zaproponowana przez Greena, która polega na założeniu istnienia potencjału sprężystego. Przyjmuje się wówczas, że gęstość energii wewnętrznej jest funkcją tensora odkształcenia i tak opisane równaniem konstytutywnym ciało sprężyste nazywane jest ciałem sprężystym w sensie Greena lub ciałem *hipersprężystym*.

Inne podejście reprezentuje metoda Cauchyego. Zakłada ona istnienie wzajemnie jednoznacznej zależności między naprężeniem i odkształceniem w skończonym otoczeniu stanu naturalnego.

Dla małych odkształceń obie metody opisują ten sam materiał, jednak w ogólnym przypadku metoda Cauchyego jest ogólniejsza od metody Greena, [1].

Ruch ogólny ciała sprężystego opisany jest zależnością [2]:

$$x^i = x^i(X^\alpha, t) \quad \text{dla } i, \alpha = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Przez ruch rozumiemy zależne od czasu przemieszczenie ciała materialnego wewnątrz przestrzeni euklidesowej. We wzorze (1) t oznacza czas, a układy współrzędnych $\{x^i\}$ - przestrzenny oraz $\{X^\alpha\}$ - materialny, parametryzują tę samą przestrzeń.

Podstawową wielkością kinematyczną jest gradient deformacji x^i_α , który używając tradycyjnego zapisu, tj. zgodnie z [3] oznaczmy następująco:

$$x^i_\alpha(X^\alpha, t) = \frac{\partial x^i(X^\alpha, t)}{\partial X^\alpha} \quad (2)$$

Energię sprężystą nagromadzoną w ciele, a odniesioną do jednostki masy materiału w konfiguracji odniesienia \mathcal{B}_∞ oznaczmy przez σ

$$\sigma = \sigma(x^i_\alpha, X^\alpha) \quad (3)$$

Związek naprężenie - odkształcenie dla materiału sprężystego przybiera postać:

$$T_{Ri}{}^\alpha = \rho_R \frac{\partial \sigma}{\partial x^i_\alpha} \quad (4)$$

gdzie $T_{Ri}{}^\alpha$ jest tensorem Pioli-Kirchhoffa.

W przypadku jednorodnego izotropowego materiału sprężystego funkcję σ opisującą energię sprężystą odniesioną do jednostki masy w \mathcal{B}_∞ możemy przedstawić jako funkcję trzech niezmienników tensora deformacji:

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, I_3) \quad (5)$$

Tensor naprężenia dla ciała izotropowego przyjmuje postać, (por. [4]):

$$T_{Ri}{}^\alpha = 2\rho_R x^i_\alpha \left(\Sigma_1 \frac{\partial I_1}{\partial C_{\alpha\beta}} + \Sigma_2 \frac{\partial I_2}{\partial C_{\alpha\beta}} + \Sigma_3 \frac{\partial I_3}{\partial C_{\alpha\beta}} \right) \quad (6)$$

gdzie:

$$\sigma_K = \frac{\partial \sigma}{\partial I_K} \quad \text{dla } K = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Równanie ciągłości przyjmuje postać:

$$\rho_R = J\rho \quad (8)$$

gdzie ρ_R i ρ jest gęstością odpowiednio w konfiguracji odniesienia \mathcal{B}_R i konfiguracji chwilowej \mathcal{B} .

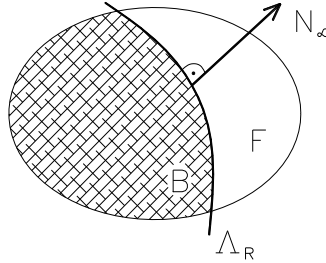
1. Powierzchnia nieciągłości

W ośrodku ciągłym wszystkie zaburzenia rozprzestrzeniają się ze skończoną prędkością. Powierzchnię rozgraniczającą obszar zaburzony i niezaburzony nazywamy ruchomą powierzchnią nieciągłości w kontinuum materialnym.

Ruchomą powierzchnię nieciągłości możemy określić równaniem:

$$t = \psi(X^\alpha) \quad \text{dla } \alpha = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Powyższy związek jednoznacznie określa położenie powierzchni Λ_R w czasie t .



Rys. 1. Położenie wektora $N_\alpha \equiv \mathbf{N}$ w stosunku do ruchomej powierzchni nieciągłości Λ_R , dzielącej obszar przed frontem fali – F i za frontem fali – B.

Kierunek propagacji powierzchni określimy przez wektor jednostkowy \mathbf{N} , ortogonalny do powierzchni Λ_R . Funkcja ψ – patrz warunek (9), określa chwilę, w której powierzchnia nieciągłości dochodzi do punktu X^α . Rzut prędkości $X^{\alpha, t}$ na normalną \mathbf{N} jest niezależny od sposobu parametryzacji. Oznaczamy go przez U i nazywamy *prędkością propagacji powierzchni Λ_R* , (patrz [5])

$$U = X^{\alpha, t} N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Psi_{,p} \Psi^{,p}}} \quad (10)$$

gdzie:

$$N_\alpha = U \Psi_{, \alpha} \quad (11)$$

Skok pola powierzchni nieciągłości Λ_R oznaczmy podwójnym nawiasem kwadratowym

$$[[\cdot]] = (\cdot)^F - (\cdot)^B \quad (12)$$

2. Fala słabej nieciągłości

Jeśli istnieje ruchoma powierzchnia nieciągłości Λ_R , to ogół zjawisk związanych z ruchem tej powierzchni, nazywa się *falą nieciągłości*. Najniższa nieciągła pochodna przemieszczenia decyduje o nazwie fali. Jeśli wszystkie pochodne aż do rzędu $n-1$ są ciągłe, a jedna z pochodnych rzędu n jest nieciągła, to fala jest falą rzędu n .

$$[[H_{,\alpha}]] = AN_{\alpha}, \quad [[H_{,t}]] = -AU \quad (13)$$

Równania zgodności [por. 6], gwarantują, że wszystkie pozostałe pochodne rzędu n są wtedy różne od zera.

Falą słabej nieciągłości jest fala przyspieszenia. Zakładamy, że dla ruchu opisanego zależnością (1) funkcje

$$x^i(X^{\alpha}, t), \quad \frac{\partial x^i(X^{\alpha}, t)}{\partial X^{\alpha}}, \quad \frac{\partial x^i(X^{\alpha}, t)}{\partial t} \quad (14)$$

są ciągłe na powierzchni Λ_R , natomiast nieciągłe są drugie i wyższe pochodne. W szczególności nieciągłe jest wówczas przyspieszenie $x^i_{,tt}$. Ogół zjawisk na takiej powierzchni (patrz rys.1 dla Λ_R) nazywamy *falą przyspieszenia* albo *falą słabej nieciągłości* w odróżnieniu od *fali silnej nieciągłości*, dla której już pierwsze pochodne funkcji $x^i(X^{\alpha}, t)$, a więc $x^i_{,\alpha}$ oraz $x^i_{,t}$ są nieciągłe.

Skoki drugich pochodnych funkcji $x^i(X^{\alpha}, t)$ zapiszemy w postaci zależności:

$$[[x^i_{,\alpha\beta}]] = A^i N_{\alpha} N_{\beta}, \quad [[x^i_{,\alpha t}]] = -UA^i N_{\alpha}, \quad [[x^i_{,tt}]] = U^2 A^i \quad (15)$$

Ze względu na tensorowy charakter wielkości $x^i_{,\alpha\beta}$ oraz N_{α} zespół parametrów A^i jest wektorem. Wektor ten określa skoki wszystkich drugich pochodnych funkcji $x^i(X^{\alpha}, t)$ i nazywany jest amplitudą fali przyspieszenia. Na podstawie analizy równania ruchu (1) w układzie kartezjańskim $\{X^{\alpha}\}$ zakładając, że gęstość ρ_R oraz pole sił masowych b_i jest ciągłe, otrzymujemy w oparciu o (15) warunek propagacji fali przyspieszenia w konfiguracji odniesienia \mathcal{B}_s w postaci:

$$(Q_{ik} - \rho_R U^2 g_{ik}) A^k = 0 \quad (16)$$

W równaniu (16) Q_{ik} jest tensorem akustycznym dla kierunku \mathbf{N} i wynosi:

$$Q_{ik} = A_i^{\alpha} k^{\beta} N_{\alpha} N_{\beta} \quad (17)$$

Tensor $A_i^{\alpha} k^{\beta}$ jest tensorem funkcji materiałowej pierwszego rzędu, który opisemy zależnością:

$$A_i^{\alpha} k^{\beta} = \rho_R \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial X^i_{,\alpha} \partial X^k_{,\beta}} \quad (18)$$

Ze względu na symetrię $A_i^{\alpha} k^{\beta} = A_k^{\beta} i^{\alpha}$ tensor Q_{ik} jest również tensorem symetrycznym $Q_{ik} = Q_{ki}$. Z warunku (16) wynika, że amplituda A^k jest *wektorem wła-*

snym, a iloczyn $\rho_R U^2$ wartością własną tensora akustycznego Q_{ik} . Z symetrii tensora akustycznego wynika, że istnieją zawsze trzy wzajemnie ortogonalne amplitudy i trzy odpowiadające im rzeczywiste kwadraty prędkości propagacji. Jeżeli wartości własne są dodatnie, to istnieje rzeczywiste U i powierzchnia może się propagować, jeżeli wartości własne są ujemne, to $A^i = 0$ i powierzchnia Λ_R nie jest powierzchnią nieciągłości, [7].

3. Przykład propagacji fali przyspieszenia w osiowo symetrycznym pręcie o zmiennym przekroju poprzecznym

Celem niniejszego przykładu jest analiza fali przyspieszenia propagującej się w pręcie o zmiennym przekroju poprzecznym. Podstawowe równania propagacji dla omawianego przypadku pręta pochodzą z pracy [8], w której autor wykazał, że równanie transportu dla intensywności fali w przypadku propagacji fali przyspieszenia w hipersprężystym pręcie o zmiennym przekroju poprzecznym jest uogólnionym równaniem Riccatiego.

Rozważamy jednorodny izotropowy ośrodek sprężysty o stałej gęstości w kształcie półnieskończonego cienkiego pręta o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym i potencjale sprężystym Murnaghana. Deformację możemy zapisać w postaci zależności (por. [8], [9]):

$$x = u(X, t) + X \quad (19)$$

gdzie $u(X, t)$ jest przemieszczeniem punktów kontinuum na kierunku osi pręta. W przyjętym układzie współrzędnych gradient przemieszczenia i prędkość wynoszą:

$$p = \frac{\partial u}{\partial X} = u_x, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} = u_t \quad (20)$$

Zakładamy, że w przekroju poprzecznym występuje wyłącznie naprężenie normalne i stałe wzdłuż przekroju.

$$T = T_{R11} = \frac{\partial \Sigma}{\partial p} \neq 0 \quad (21)$$

Naprężenia normalne $T_{R22} = T_{R33}$ towarzyszące ruchowi głównemu w tym przybliżeniu można pominąć. Wówczas powierzchnia boczna pręta jest wolna od naprężeń, a założenie to dopuszcza jedynie propagację fal płaskich. Tym samym warunki brzegowe spełnione są w sposób przybliżony.

4. Analiza numeryczna

Zakładamy, że fala przyspieszenia propaguje się w ściśliwym materiale sprężystym określonym potencjałem Murnaghana (por. [7]):

$$W(I_1, I_2, I_3) = \rho_R \sigma(I_1, I_2, I_3) = \frac{1+2m}{24} (I_1 - 3)^3 + \frac{\hat{\lambda} + 2\mu + 4m}{8} (I_1 - 3)^2 + \frac{8\mu + n}{8} (I_1 - 3) - \frac{m}{4} (I_1 - 3)(I_2 - 3) - \frac{4\mu + n}{8} (I_2 - 3) + \frac{n}{8} (I_1 - 1) \quad (22)$$

Materiał sprężysty Murnaghana opisany jest pięcioma stałymi sprężystości $(l, m, n, \hat{\lambda}, \mu)$. Trzy pierwsze są stałymi sprężystości drugiego rzędu, pozostałe dwie stałymi Lamégo.

Dla deformacji (19) niezmienniki tensora deformacji wynoszą:

$$I_1 = p^2 + 2p + 3 \quad I_2 = 2p^2 + 4p + 3 \quad I_3 = p^2 + 2p + 1 \quad (23)$$

Przyjmując stałe na podstawie [10],

$$\begin{aligned} m &= -6,237 \cdot 10^{11} [\text{Pa}], & n &= -6,943 \cdot 10^{11} [\text{Pa}], \\ l &= -4,521 \cdot 10^{11} [\text{Pa}], & \hat{\lambda} &= 1,089 \cdot 10^{11} [\text{Pa}], \\ \mu &= 8,051 \cdot 10^{10} [\text{Pa}] \end{aligned} \quad (24)$$

oraz zakładając, że początkowo:

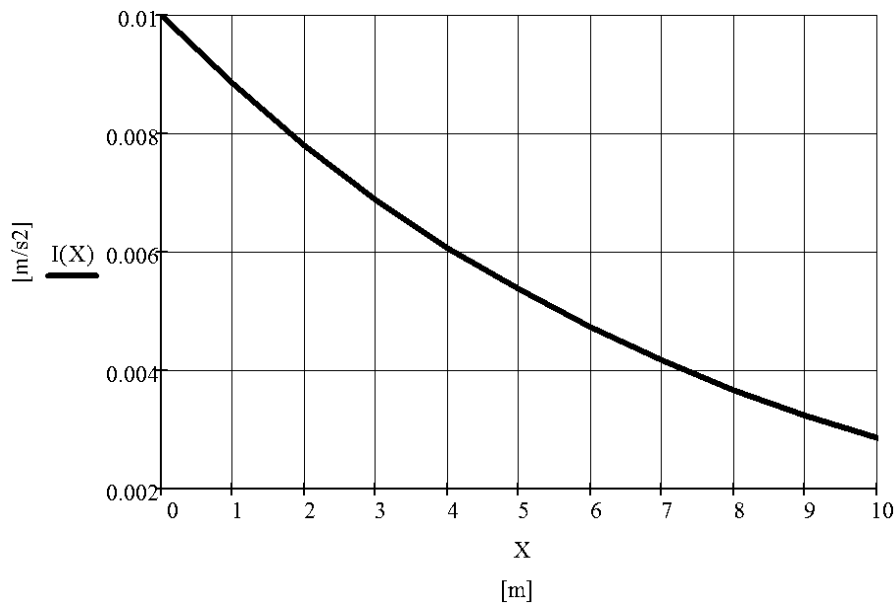
$$T_o A_o = T_{11} A(X) = 0, \quad p_o(X) = 0 \quad (25)$$

Przyjmujemy wykładniczą zmianę przekroju $A(X) = A_o e^{\frac{\gamma X}{4}}$. Wówczas intensywność fali przyspieszenia $I(X)$ wynosi:

$$I(X) = \frac{I(0)}{e^{\frac{\gamma Q(X) X}{4}} + \beta(X) X e^{\frac{\gamma Q(X) X}{2}} I(0)} \quad (26)$$

gdzie:

$$Q(X) = \left[1 - \frac{T_o}{2\rho_R^2 c_o^4} \left(\frac{\partial^3 \sigma}{\partial p^3} \right)_o \right] \quad \beta(X) = -\frac{1}{4\rho_R c_o^4} \left(\frac{\partial^3 \sigma}{\partial p^3} \right)_o \quad (27)$$



Rys. 2. Wykres intensywności fali przyspieszenia dla $A(X) = A_0 e^{\gamma \frac{X}{4}}$ przy założeniu, że $I(0) = 10^{-2} [\text{m/s}^2]$

Podsumowanie i wnioski

Podsumowując przeprowadzoną analizę numeryczną można stwierdzić, że wraz ze zmianą przekroju poprzecznego analizowanego przypadku pręta zmienia się intensywność fali przyspieszenia.

Dla pręta o rosnącym przekroju poprzecznym intensywność fali maleje, (patrz rys.2). Do obliczeń numerycznych przyjęto statyczną prędkość odkształcenia rzędu $1 \cdot 10^{-4} [\text{s}^{-1}]$, zgodnie z [11]. Wartość odkształceń dynamicznych w procesie propagacji fal przyspieszenia w metalach, zgodnie z cytowaną literaturą (por. [11]), mieści się w przedziale od $10^{-2} [\text{s}^{-1}]$, do $10^2 [\text{s}^{-1}]$. Przeprowadzona analiza numeryczna, zgodnie z poczynionym założeniem, uwzględnia wyłącznie statyczną prędkość odkształcenia.

Wprowadzona funkcja opisująca przekrój poprzeczny pręta $A(X) = A_0 e^{\gamma \frac{X}{4}}$, dała nowe jakościowo rozwiązanie w stosunku do pracy [14], jednakże wyniki przeprowadzonej analizy numerycznej nie wykazały znaczącej różnicy w wartościach intensywności propagującej się fali przyspieszenia. Można wręcz powiedzieć, że wartości dla omawianego tu przekroju i dla przekroju opisanego w pracy [14] dają niezauważalne różnice w intensywności fali przyspieszenia.

Literatura

- [1] Ostrowska – Maciejewska J., Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych, PWN, 1982
- [2] Truesdell C. and Toupin R.A., 1960, The classical field theories, Handbuch der Physik, III/1, Springer-Verlag, Berlin
- [3] Truesdell C., Noll W., The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik (Ed. S. Flügge) Vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin, 1965
- [4] Wesołowski Z., Mechanika techniczna tom IV, Cz. 2 Nieliniowa teoria sprężystości, praca zbiorowa pod redakcją M. Sokołowskiego, PWN, Warszawa, 1978
- [5] Wesołowski Z., Akustyka ciała sprężystego, PWN, Warszawa-Poznań, 1989
- [6] Wesołowski Z., Strong discontinuity wave in initially strained elastic medium, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 30, 3, pp. 309-322, Warszawa, 1978
- [7] Wesołowski Z.: Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości. Warszawa, PWN, 1974.
- [8] Jeffrey A.: Acceleration wave propagation in hyperelastic rods of variable cross-section. Wave Motion, 1982, No. 4, s. 173-180.
- [9] Jeffrey A., Gilbert R.P.: On the approximation of acceleration waves in rods. Int. J. Non-Linear Mechanics, 1987, Vol. 22, No. 3, s. 209-215.
- [10] Kosiński S.: Odbicie i ewolucja fali uderzeniowej w wybranych materiałach hipersprężystych. Warszawa, IPPT PAN, 1995.
- [11] Klepaczek J.: Doświadczalne badania sprężysto – plastycznych procesów falowych w metalach. Warszawa, IPPT PAN, 1970.
- [12] Major I., Propagacja fali przyspieszenia w pręcie o zmiennym przekroju, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 1559, s. 379-386, 2002
- [13] Major I., Zjawiska falowe w cienkim pręcie o zmiennym przekroju. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 1595 Bud.z.101, 2003
- [14] Major M., Major I., Acceleration wave in a thin segmental hyperelastic rod. Arch.Civ.Mech.Eng. Vol.10 nr 1, 2010

Streszczenie

Przedstawiono podstawowe informacje dotyczące materiałów hipersprężystych. Omówiono powierzchnię nieciągłości, podając wzór na prędkość propagacji powierzchni oraz omówiono falę słabej nieciągłości. Do analizy numerycznej przyjęto pręt o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym opisany potencjałem Murnaghana. Zamodelowano funkcję opisującą przekrój poprzeczny i wykonano obliczenia propagacji fali przyspieszenia w pręcie wykonanym ze stali. Analiza numeryczna wykazała, że wraz ze wzrostem przekroju pręta intensywność propagującej się fali przyspieszenia maleje.

Murnaghan`s potential for hyperelastic body - selected informations and calculation example of acceleration wave propagation in the rod

Abstract

The paper presents basic information about the hiperelastic materials. Discussed the surface of discontinuity, giving the formula for the speed of propagation of surface and also were discussed wave of weak discontinuities. For numerical analysis assumed rod with slowly changing cross-section, described by Murnaghan potential. Modeled the function describing the cross-section and calculated the acceleration wave propagation speed in a stainless rod. Numerical analysis proves that if the rod cross-section growth, the intensity of propagating wave decreases.