

Prof. dr hab. inż. Leszek MIESZKALSKI  
Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji  
Wydział Inżynierii Produkcji  
SGGW w Warszawie

## MATEMATYCZNE MODELOWANIE KSZTAŁTU OWOCÓW ŚLIWY (*Prunus domestica L.*)<sup>®</sup>

Mathematical modeling of the shape of the fruit plum (*Prunus domestica L.*)<sup>®</sup>

**Słowa kluczowe:** śliwka (Węgierka Zwykła), pestka, kształt, powierzchnia zewnętrzna, równania parametryczne, model matematyczny.

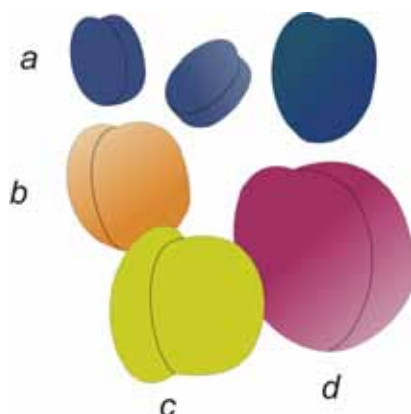
*W artykule zaprezentowano metodę matematycznego modelowania kształtu powierzchni zewnętrznych śliwek i pestek odmiany Węgierka Zwykła. Do modelowania kształtu z próby 100 owoców wybrano śliwkę najmniejszą, największą i zbliżoną wymiarami do wymiarów średnich. Do odwzorowania kształtu powierzchni śliwki i pestki wykorzystano równania parametryczne. Opracowany matematyczny model 3D kształtu śliwek i pestek można wykorzystać do modelowania i sterowania operacjami technologicznymi procesów produkcji i przetwarzania.*

**Key words:** plum (Węgierka Zwykła), drupelet, the shape, the outer surface, parametric equations, mathematical model.

*The article presents the method of mathematical modeling of the shape of the outer surface of of plums and drupelet Węgierka Zwykła varieties. To model the shape of a sample of 100 fruits selected plum smallest, largest, and similar dimensions to the dimensions of the medium. To map surface the shape of the plums and drupelet parametric equations used. Developed mathematical model of the 3D shape of plums and drupelet can be used for modeling and control of technological operations production and processing.*

### WSTĘP

Śliwa (*Prunus domestica L.*) jest gatunkiem znanym na całym świecie. Według FAO Statistical Yearbook [1] największej śliw jest uprawianych w Chinach, Stanach Zjednoczonych, Francji, Włoszech, Rumunii, Serbii, Turcji, Indiach, Chile i Iranie [14]. Śliwki, jako owoce pestkowe, są wykorzystywane w polskiej kuchni i stanowią cenny surowiec w przetwórstwie spożywczym. Minh [10] twierdzi, że dżem ze śliwek wykazuje dla ludzi wiele właściwości zdrowotnych. Zdaniem Świetlikowskiej i in. [16] największe znaczenie w przetwórstwie spożywczym w Polsce mają śliwki z grupy odmianowej węgierki. Śliwki są owocem różnorodnym pod względem wielkości, koloru i kształtu (rys. 1).



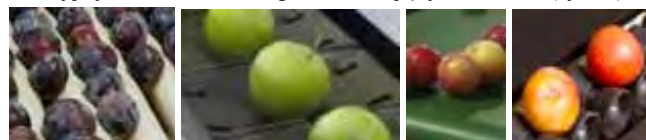
**Rys. 1.** Wybrane kształty owoców: *a* – śliwek, *b* – moreli, *c* – renklody, *d* – brzoskwini.

**Fig. 1.** Selected shapes of fruit: *a* - plums, *b* - apricot, *c* - greengage, *d* - peach.

**Źródło:** Opracowanie własne

**Source:** Own study

Właściwości geometryczne śliwek są ważne w projektowaniu systemów automatycznego sortowania i pakowania [6, 11, 12, 13, 15]. Wielkość i kształt śliwek ma duże znaczenie w projektowaniu przenośników stosowanych na liniach produkcyjnych w zakładach przetwarzających owoce (rys. 2).



**Rys. 2.** Fragmenty elementów roboczych przenośników: prętowych, płytkowych, taśmowych i rolnkowych.

**Fig. 2.** Fragments of working parts conveyors: rod, plate, belt and roller.

**Źródło:** Opracowanie na podstawie [3, 4, 5]

**Source:** Study based [3, 4, 5]

Na liniach technologicznych między operacjami technologicznymi całe śliwki, śliwki wydrylowane i ich pestki podlegają składowaniu tworząc złoża. Właściwości geometryczne złoża zależą między innymi od wymiarów i kształtu śliwki (rys. 3).



**Rys. 3.** Złóża całych śliwek, śliwek wydrylowanych i ich pestek.

**Fig. 3.** The deposits whole plums, pitted prunes and their drupelet.

**Źródło:** Opracowanie własne

**Source:** Own study

Rashidi, i in., [14] analizując wielkości śliwek w celu ich klasyfikacji wymiarowej posłużyli się modelem elipsoidy dokonując pomiaru długości, średnicy maksymalnej i średnicy minimalnej. Obecnie nie wystarcza określenie kształtu owocu w sposób umowny, np. kulisty, eliptyczny czy owalny. Grafika komputerowa daje projektantom użyteczne narzędzia opisu kształtu brył [2, 7, 9]. Mieszkalski [8] do opisu kształtu surowców pochodzenia roślinnego zastosował parametryczną krzywą przestrzenną oraz czterowęzłową siatkę rozpiętą na zewnętrznej powierzchni modelowanej bryły. Problemem do rozwiązania jest opracowanie metody, za której pomocą byłby możliwy opis 3D kształtu śliwek oraz ich pestek.

**Celem artykułu jest przedstawienie opracowanego z dokładnością do 5% matematycznego modelu kształtu śliwek odmiany Węgierka Zwykła i ich pestek.**

## MATERIAŁ I METODYKA BADAŃ

Materiałem do badań była śliwka odmiany Węgierka Zwykła pochodząca z sadów z rejonu Grójca. Ze złoża wybrano losowo 100 śliwek. Za pomocą suwmiarki z dokładnością do 0,1 mm zmierzono ich długość, szerokość oraz grubość. Korzystając z programu komputerowego Microsoft Excel 2010 wyznaczono wymiary minimalne, maksymalne, średnie, odchylenia standardowe i rozkłady częstości podstawowych wymiarów śliwek. Do matematycznego modelowania, z próby 100 owoców wybrano 3 śliwki różniące się pod względem wielkości i kształtu. Wybrano śliwkę najmniejszą, największą i zbliżoną wymiarami do wymiarów średnich. Owoce i ich pestki fotografowano aparatem Panasonic LUMIX DMC-TZ3. Odległość obiektywu od fotografowanego obiektu była stała i wynosiła 400 mm. Zdjęcia o wymiarach 2560x1712 pikseli zapisywano w formacie JPEG.

Kształt powierzchni śliwek i ich pestek opisano równaniami parametrycznymi. Wymiary w ustalonych przekrojach (dla śliwek na wysokościach 5, 10, 25, 35 mm, dla pestki na wysokościach 5, 10, 15, 20 mm) rzutów na płaszczyznę XY modeli 3D śliwek i pestki porównano z odpowiednimi wymiarami rzutów rzeczywistych śliwek i pestki.

## OPIS MODELU MATEMATYCZNEGO

Równanie parametryczne współrzędnej Z w zapisie macierzowym do opisu długości śliwki i pestki ma następującą postać:

$$Z_{i,j} = \frac{c}{2} \cdot \cos(\varphi_i)^h + k \quad (1)$$

Równanie parametryczne współrzędnej Y w zapisie macierzowym do opisu szerokości śliwki i pestki ma następującą postać:

$$Y_{i,j} = \frac{b}{2} \cdot \sin(\varphi_i)^f \cdot \sin(\vartheta_j)^g \quad (2)$$

Na podstawie równania 2 można w wyniku uzyskać liczby zespolone. Dlatego z równania 2 wydzielono część rzeczywistą i urojoną, a do modelu wybrano tylko części rzeczywiste liczb zespolonych:

$$Y1_{a_{i,j}} = \operatorname{Re}(Y)_{i,j} \quad (3)$$

$$Y2_{i,j} = \operatorname{Im}(Y)_{i,j} \quad (4)$$

W celu uzyskania zadanych wymiarów szerokości (b) modeli śliwki i pestki należy dokonać skalowania. Wyskalowane macierzowe równanie współrzędnych Y punktów węzłowych siatki powierzchni opisującej kształt zewnętrzny śliwki i pestki ma następującą postać:

$$Y1 = \frac{b}{\max(Y1a) - \min(Y1a)} \cdot Y1a \quad (5)$$

Równanie parametryczne współrzędnej X w zapisie macierzowym do opisu grubości śliwki i pestki ma następującą postać:

$$X_{i,j} = \frac{a}{2} \cdot \sin(\varphi_i)^d \cdot \cos(\vartheta_j)^e \quad (6)$$

gdzie:

$$\varphi_i = i \cdot \frac{\pi}{N} \quad (7)$$

$$\vartheta_j = j \cdot \frac{n \cdot \pi}{N} \quad (8)$$

$$i = j = 0 \dots N \quad (9)$$

N – rozmiar macierzy (liczba wierszy i kolumn).

Podobnie na podstawie równania 6 można w wyniku uzyskać liczby zespolone. Z równania 6 wydzielono część rzeczywistą i urojoną, a do modelu wybrano tylko części rzeczywiste liczb zespolonych:

$$X1_{a_{i,j}} = \operatorname{Re}(X)_{i,j} \quad (10)$$

$$X2_{i,j} = \operatorname{Im}(X)_{i,j} \quad (11)$$

W celu uzyskania zadanych wymiarów grubości (a) modeli śliwki i pestki dokonano skalowania. Wyskalowane macierzowe równanie współrzędnych X1 punktów węzłowych siatki powierzchni opisującej kształt zewnętrzny śliwki i pestki mają następującą postać:

$$X1 = \frac{a}{\max(X1a) - \min(X1a)} \cdot X1a \quad (12)$$

Podstawiając do równań 1 – 12 wartości parametrów zapisanych w macierzy 13 otrzymuje się powierzchnię modelu śliwki.

$$\begin{bmatrix} f1 & f2 & f3 \\ d1 & d2 & d3 \\ a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \\ g & h & n \\ e & k & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,5 \\ 1,1 & 1,2 & 1,5 \\ 24,1 & 27,5 & 30 \\ 25,3 & 29,5 & 31,1 \\ 33,1 & 36,8 & 39,2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0,75 & 0 & 21 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Podstawiając do równań 1 – 12 wartości parametrów zapisanych w macierzy 14 otrzymuje się powierzchnię modelu pestki.

$$\begin{bmatrix} f1 & f2 & f3 \\ d1 & d2 & d3 \\ a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \\ g & h & n \\ e & k & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 & 1,2 & 1,2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 6,8 & 7,5 \\ 13,1 & 12,2 & 12,9 \\ 22,3 & 22,6 & 21,1 \\ 0,6 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 21 \end{bmatrix} \quad (14)$$

## WYNIKI BADAŃ I ICH ANALIZA

Wyniki podstawowych wymiarów śliwek określonych z próby 100 owoców zamieszczono w tabeli 1. Różnica między maksymalnym a minimalnym wymiarem długości w próbie wynosi 6,3 mm, dla szerokości 6,6 mm a dla grubości 6 mm. Określono również wartość średnią podstawowych wymiarów śliwy w próbie. Ponieważ w warunkach rzeczywistych nie ma śliwki odpowiadającej dokładnie wymiarom średnim, w związku z tym wartość średnia wymiarów pozwoli na wybranie w próbie śliwki o wymiarach zbliżonych do wartości średniej.

**Tabela 1. Podstawowe wymiary śliwek odmiany Węgierka Zwykła**

**Table 1. Basic dimensions of prunes Węgierka Zwykła varieties**

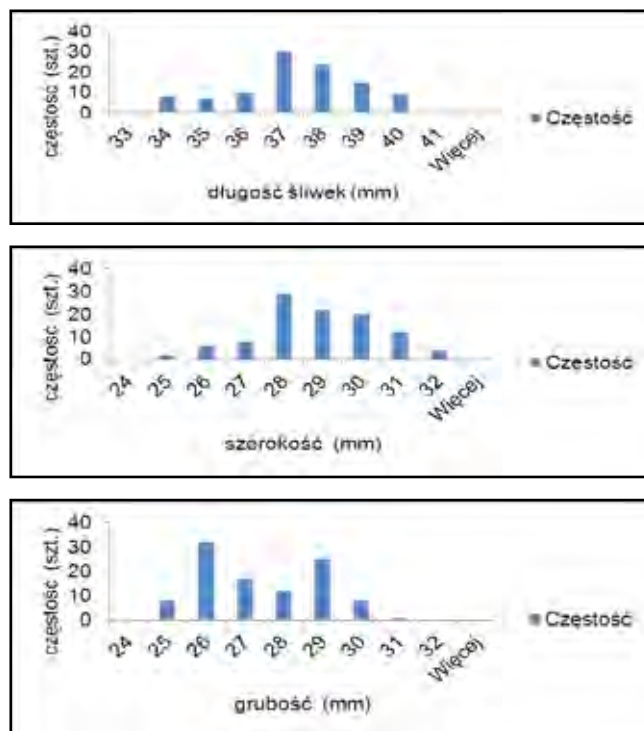
Wyszczególnienie	długość	szerokość	grubość
	mm	mm	mm
min	33,1	24,8	24,1
max	39,4	31,4	30,1
średnia	36,8	28,3	26,9
Od. standardowe	1,54	1,52	1,54

**Źródło:** Badania własne

**Source:** The own study

Na rysunku 4 zamieszczono harmonogramy częstości wymiarów podstawowych (długość, szerokość, grubość) śliwek. Z danych zamieszczonych na rysunku 4 wynika, że najczęściej jest śliwek o długości w przedziale od 37 do 38 mm. Śliwek o szerokości w przedziale od 28 do 29 mm jest w próbie najczęściej. Wartości długości i szerokości śliwek są zbliżone do rozkładu normalnego. Od rozkładu normalnego odbiegają wartości grubości śliwek. W próbie śliwek o grubości z przedziału 26 mm i z przedziału 29 mm jest najczęściej.

W tabeli 2 zamieszczono wymiary wybranych do modelowania trzech śliwek odmiany Węgierka Zwykła (mała, zbliżona wymiarami do wartości średniej i duża) oraz ich pestek. Modele tych śliwek wraz z ich pestkami zamieszczono na rysunku 5.

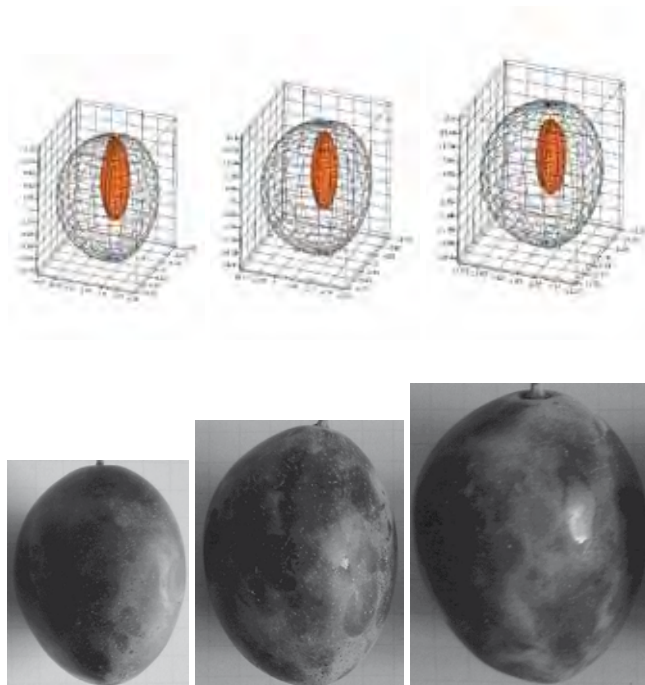


**Rys. 4. Rozkład częstości podstawowych wymiarów śliwek odmiany Węgierka Zwykła.**

**Fig. 4. The frequency distribution of the basic dimensions of prunes Węgierka Zwykła varieties.**

**Źródło:** Opracowanie własne

**Source:** Own study



**Rys. 5. Modele 3D śliwek małej, średniej i dużej odmiany Węgierka Zwykła.**

**Fig. 5. 3D models plums small, medium and large varieties of Węgierka Zwykła.**

**Źródło:** Opracowanie własne

**Source:** Own study

Tabela 2. Wymiary wybranych do modelowania śliwek odmiany Węgierka Zwykła i ich pestek

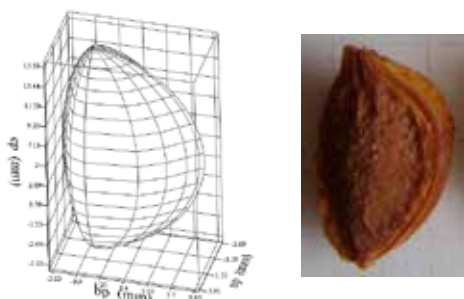
Table 2. Dimensions selected to modeling plums Węgierka Zwykła varieties, and their drupelet

Wielkość śliwki	Śliwka			Pestka		
	długość	szerokość	grubość	długość	szerokość	grubość
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
mała	33,1	25,3	24,1	22,3	13,1	7
średnia	36,8	29,5	27,5	22,6	12,2	6,8
duża	39,2	31,1	30	21,1	12,9	7,5

Źródło: Badania własne

Source: The own study

Na rysunku 6 zamieszczono model 3D pestki wybranej śliwki odmiany Węgierka Zwykła.



Rys. 6. Model 3D pestki wybranej śliwki odmiany Węgierka Zwykła.

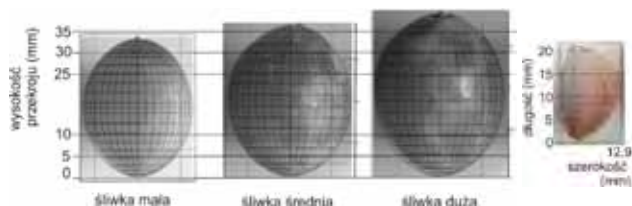
Fig. 6. 3D Model drupelet selected varieties of plums Węgierka Zwykła.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

### WERYFIKACJA MODELU

W celu weryfikacji modelu matematycznego opisującego kształt śliwek i ich pestek (wymiary w tabeli 2) wykonano nałożone na siebie zrzutowane na płaszczyznę XZ fotografie śliwek, pestki oraz ich modeli i pokazano je na tle poziomych linii wykresu (rys. 7). Linie poziome przecinają obraz rzutu modelu i obraz rzutu rzeczywistej bryły śliwki i pestki. Linie poziome, przecinając się z konturami rzutów, wskazują długości zaznaczonych przekrojów. Na podstawie różnic wyznaczonych długości tych przekrojów dla śliwek oraz modeli obliczono błąd względny (tabela 3).



Rys. 7. Rzuty śliwek, ich modeli oraz pestki i jej modelu na płaszczyznę XZ.

Fig. 7. The projection plums and their model, drupelet and their models on the XZ plane.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Tabela 3. Wartości błędu względnego (%) dla wymiarów śliwek (małej, średniej, dużej) i ich modeli 3D w zależności od wartości wykładników potęg d i f

Wysokość przekroju (mm)	Wartości wykładników potęg d i f		
	1,1	1,2	1,5
<b>Śliwka mała</b>			
5	-1,1	0	14,6
10	-1,3	0	0
25	1,5	4,5	7,4
30	3,6	7,8	20,9
<b>Śliwka średnia</b>			
5	0	0	8,7
10	0	0	2
25	1,8	1,4	3,8
30	1,3	2,3	10,4
35	2,6	11,3	33,3
<b>Śliwka duża</b>			
5	-3,9	-3,1	8,5
10	-4,5	-2,7	0,8
25	1,3	2,7	4,4
30	3,4	4,2	10,8
35	0	7,1	15

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

W proponowanym modelu kształtu powierzchni zewnętrznych śliwek odmiany Węgierka Zwykła, by błąd względny odwzorowania nie przekraczał 5%, należy zastosować wartości wykładników potęg wynoszących:  $f=1,1$ ;  $d=1,1$ .

W tabeli 4 zamieszczono wartości błędu względnego (%) dla wymiarów pestki i jej modelu 3D. W proponowanym modelu, uzyskanie kształtu powierzchni zewnętrznej pestki z błędem względnym nie przekraczającym 5% jest możliwe przy zastosowaniu wartości wykładników potęg wynoszących:  $f=1,2$ ;  $d=1$ ;  $e=3$ ;  $g=0,6$ .

Tabela 4. Wartości błędu względnego (%) dla wymiarów pestki i jej modelu 3D, przy  $f=1,2$ ;  $d=1$ ;  $e=3$ ;  $g=0,6$

Table 4. The values of relative error (%) for the dimensions of the drupelet and the 3D model, at  $f = 1.2$ ;  $d = 1$ ;  $e = 3$ ;  $g = 0.6$

Wysokość przekroju (mm)	Wartości błędu względnego (%)
5	-4,3
10	-3,1
15	2,6
20	-2

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study



Na podstawie porównania nałożonych na płaszczyznę XZ rzutów śliwek i ich modeli oraz pestki i jej modelu (rys. 7) i z wyników zawartych w tabelach 3 i 4 uznano, że proponowana metoda dokładnie odwzorowuje podstawowe wymiary części składowych śliwek (powierzchnia śliwki, pestka). Z analizy danych zawartych w tabelach 3 i 4 wynika, że dokładność modeli kształtu śliwek i pestki jest wystarczająca do celów praktycznych, ponieważ błąd względny nie przekracza 5%.

## WNIOSKI

1. Równania parametryczne mogą być stosowane do modelowania kształtów śliwek odmiany Węgierka Zwykła i ich pestek.
2. Opracowany model 3D bryły śliwki (Węgierka Zwykła) odwzorowujący kształt powierzchni śliwki i jej pestki dla wartości wykładników potęg  $d$  i  $f$  wynoszącej 1,1 może służyć do reprezentowania rzeczywistych owoców wszędzie tam, gdzie jest wymagana dokładność odwzorowania kształtu na poziomie błędu względnego wynoszącego do 5 %.
3. Odwzorowane równaniami parametrycznymi bryły śliwek (Węgierka Zwykła) i ich pestek mają identyczne podstawowe wymiary główne jak dla rzeczywistych śliwek i ich pestek.
4. Proponowana metoda modelowania powierzchni śliwek i ich pestek może być stosowana przez projektantów do konstruowania przenośników, separatorów, pakowarek i urządzeń do drylowania.

## LITERATURA

- [1] **FAO Statistical Yearbook, 2010.** Food and Agriculture Organization of the United Nations.
- [2] **FOLEY J. D., VAN DAM A., FEINER S.K., HUGHES J.F., PHILLIPS R. L. 2001.** Wprowadzenie do grafiki komputerowej. Warszawa: WNT, ISBN 83-204-2662-6.
- [3] [http://www.olimpias-sa.com/?section=2005&language=en\\_US](http://www.olimpias-sa.com/?section=2005&language=en_US),
- [4] <http://videohdtv.co/mp3moviedownload/-sorting-grading-classifying-lines-for-plums->,
- [5] <http://www.sorter.pl/pl/automatyka/maszyna-sortownicza-do-czeresni-sliwek-i-pomidorow-koktajlowych,1667.html>
- [6] **KESHAVARZPOUR F. and RASHIDI M. 2010.** „Classification of apple size and shape based on mass and outer dimensions. Am-Euras”. J. Agric. and Environ. Sci. 9(6): 618-621.
- [7] **KICIAK P. 2000.** Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej. Warszawa: WNT, ISBN 83-204-2464-X.
- [8] **MIESZKALSKI L. 2011a.** „Metoda matematycznego modelowania kształtu bryły ziarna pszenicy za pomocą parametrycznej krzywej przestrzennej i czterowęzłowej siatki”. Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego 1: 41–45.
- [9] **MIESZKALSKI L. 2011b.** Agriculture and Food Machinery, Application of Physics For Improving. Gliński J., Horabik J., Lipiec J. (edited by). Encyclopedia of Agrophysics. Institute of Agrophysics Polish Academy of Sciences. Lublin, Poland, Springer. ISBN 978 – 90 – 481 - 3584 – 4: 14 – 26.
- [10] **MINH N. P. 2014.** „Various factors affecting to the production of marian plum (Thanh Tra) jam”. International Journal of Multidisciplinary Research and Development 1(5): 127-131.
- [11] **POLDER G., van der HEIJDEN G.W.A.M. and YOUNG I.T. 2003.** „Tomato sorting using independent component analysis on spectral images”. Real-Time Imaging 9: 253-259.
- [12] **RASHIDI M. and KESHAVARZPOUR F. 2011.** „Classification of tangerine size and shape based on mass and outer dimensions”. Agricultural Engineering Research Journal 1(3): 51-54.
- [13] **RASHIDI M. and SEYFI K. 2007.** „Classification of fruit shape in cantaloupe using the analysis of geometrical attributes”. World Appl. Sci. J. 3(6): 735-740.
- [14] **RASHIDI M., BENI M.S., MOHSENI P., KESHAVARZPOUR F. 2014.** „Plum Size and Shape Classification Based on Mass and Dimensions”. American-Eurasian J. Agric.&Environ. Sci. 14 (1): 29-32. DOI: 10.5829/idosi.ajeaes.2014.14.01.12277
- [15] **SADRNI A., RAJABIPOUR A., JAFARY A., JAVADI A. and MOSTOFI Y. 2007.** „Classification and analysis of fruit shapes in long type watermelon using image processing”. Int. J. Agric. Biol., 9: 68-70.
- [16] **ŚWIETLIKOWSKA K. (red). 2008.** Surowce spożywcze pochodzenia roślinnego. Warszawa: Wydawnictwo SGGW, ISBN 978-83-7244-929-0.