

Paweł Poczekajło

Wydział Elektroniki i Informatyki

Politechnika Koszalińska

ul. J.J. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin

Badanie dokładności rotatora opartego na algorytmie CORDIC w systemie o skończonej precyzji obliczeń

Słowa kluczowe: rotator, algorytm CORDIC, skończona precyzja obliczeń, dokładność

1. Wstęp

Rotator (z matematycznego punktu widzenia) jest to funkcja realizująca obrót punktu lub obiektu o danych współrzędnych wokół określonego początku układu współrzędnych. Dla tradycyjnego dwuwymiarowego (2D) układu współrzędnych kartezjańskich, rotator opisany jest w następujący sposób [1]:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \cos(\alpha) - y_0 \sin(\alpha) \\ y_1 &= x_0 \sin(\alpha) + y_0 \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{1}$$

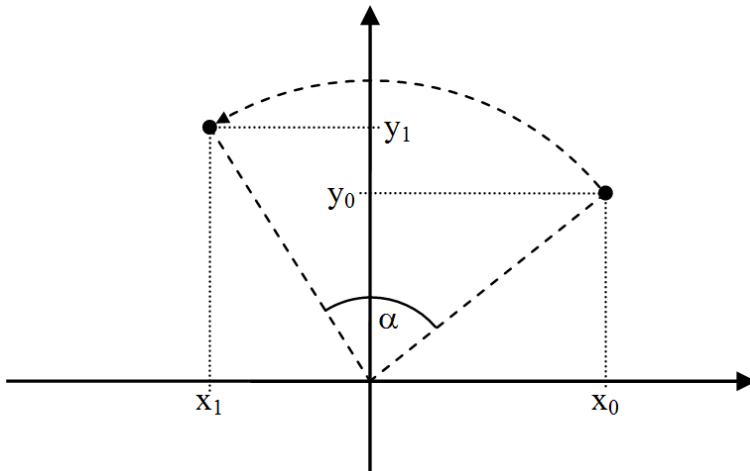
gdzie:

x_0, y_0 – współrzędne punktu przed obrotem,

x_1, y_1 – współrzędne punktu po obrocie,

α – kąt obrotu punktu wokół początku układu współrzędnych.

Graficzną interpretację rotacji punktu (1) przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Graficzna interpretacja rotacji punktu w układzie współrzędnych

Rotatory jako funkcje matematyczne są znane i wykorzystywane już od wielu lat. Nawet w dobie powszechnej digitalizacji, cyfrowe odpowiedniki rotatorów są powszechnie używane, np. w systemach graficznych [2] lub układach cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS) [3, 4]. W kolejnych punktach przedstawiono możliwość realizacji sprzętowej rotatora przy wykorzystaniu algorytmu CORDIC [5].

2. Realizacja sprzętowa rotatora

Niniejszy artykuł skupia się na problemie implementacji rotatorów w układach FPGA, gdzie bardzo istotnym uwarunkowaniem jest skończona precyzja zapisu zmiennych. Przy realizacji rotatorów w bezpośredni sposób niezbędne jest wykonanie aż czterech mnożeń i dwóch sumowań. Problemem są tu zwłaszcza układy mnożące, które wymagają użycia znacznych zasobów lub specjalnych bloków DSP procesora FPGA.

Alternatywą jest tu możliwość zastosowania algorytmu CORDIC, który oparty jest na zasadzie kolejnych przybliżeń i wykorzystuje jedynie multipleksery i sumatory. Poniżej przedstawiony został iteracyjny algorytm CORDIC wykorzystany do wykonywania rotacji w systemach CPS [6]:

$$\begin{aligned}
 a_{i+1} &= a_i / 2 \\
 p_{i+1} &= p_i / 2 \\
 r_{i+1} &= r_i / 2 \\
 s_{i+1} &= \begin{cases} s_i + a_i & \text{dla } s_i < 0 \\ s_i - a_i & \text{dla } s_i > 0 \\ s_i & \text{dla } s_i = 0 \end{cases} \\
 c_{i+1} &= \begin{cases} c_i + a_i & \text{dla } c_i < 0 \\ c_i - a_i & \text{dla } c_i > 0 \\ c_i & \text{dla } c_i = 0 \end{cases} \\
 x_{1i+1} &= \begin{cases} x_{1i} + p_i & \text{dla } c_i \geq 0, s_i < 0 \\ x_{1i} - p_i & \text{dla } c_i < 0, s_i \geq 0 \\ x_{1i} - r_i & \text{dla } c_i < 0, s_i < 0 \\ x_{1i} + r_i & \text{dla } c_i > 0, s_i \geq 0 \text{ lub } c_i \geq 0, s_i > 0 \\ x_{1i} & \text{dla } c_i = 0, s_i = 0 \end{cases} \\
 y_{1i+1} &= \begin{cases} y_{1i} + r_i & \text{dla } c_i < 0, s_i \geq 0 \\ y_{1i} - r_i & \text{dla } c_i \geq 0, s_i < 0 \\ y_{1i} - p_i & \text{dla } c_i < 0, s_i < 0 \\ y_{1i} + p_i & \text{dla } c_i > 0, s_i \geq 0 \text{ lub } c_i \geq 0, s_i > 0 \\ y_{1i} & \text{dla } c_i = 0, s_i = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$$a_0 = 1,$$

$$s_0 = \sin(\alpha),$$

$$c_0 = \cos(\alpha),$$

$$p_0 = x_0 + y_0,$$

$$r_0 = x_0 - y_0,$$

$$w_0 = 0,$$

$$z_0 = 0,$$

x_{1i+1}, y_{1i+1} – kolejne przybliżenia współrzędnych punktu po rotacji.

Na potrzeby niniejszej publikacji założono, że system o ograniczonej precyzji zapisu liczb oparty jest na publikacji [6] i dopuszcza zapis zmiennych stałoprzecinkowych na 16-bitach, przy czym zachowana musi być możliwość zapisu wartości funkcji trygonometrycznych w zakresie $\langle -1, 1 \rangle$. Stąd przyjęto zapis stałopozycyjny Q2.14 w systemie U2 dla zmiennych a_i, s_i i c_i ; oraz zapis Q10.6 dla zmiennych p_i, r_i, w_i i z_i . Dane wejściowe systemu to wartości całkowite z zakresu od -128 do 127 (zgodnie z systemem U2 8-bit). Pobudzenie o takiej postaci zostaje

rozszerzone do formatu Q10.6 [6] oraz w odpowiednio analogiczny sposób dane wyjściowe przekształcane są ponownie do formatu U2 8-bit uwzględniając zaokrąglenie do wartości całkowitej.

W kolejnym rozdziale przedstawiono analizę działania oraz wyniki obliczeń rotatora w systemie o skończonej precyzji obliczeń przy zastosowaniu algorytmu CORDIC (2).

3. Badanie i analiza dokładności rotatora

Zbadanie dokładności działania rotatora opartego na algorytmie CORDIC opiera się głównie na analizie współrzędnych wyjściowych po kolejnych iteracjach. W związku z tym dokonano dokładnej analizy pojedynczych rotatorów oraz zbadano wyniki końcowe dla większej losowej grupy. W tabeli 1 zebrano wartości wyjściowe dla trzech przykładowych rotatorów o losowo dobranych parametrach początkowych.

Jak widać z tabeli 1, przy uwzględnieniu zaokrągleń, już po 8-9 iteracjach algorytmu uzyskujemy wynik zgodny z oczekiwaną wartością. Warto tu jednak zaznaczyć, że minimalna ilość iteracji, koniecznych do uzyskania poprawnego wyniku, jest różna dla różnych danych wejściowych x_0 , y_0 , i α . Może to skutkować uzyskaniem prawidłowych wartości na wyjściu rotatora nawet dopiero po 10-11 iteracjach. Zauważyć można niewielką niedokładność wartości x_1 w 11-tej iteracji rotatora nr 3. Wynika ona z faktu, że w 10-tej iteracji osiągnięto już prawidłowy wynik dla przyjętego systemu zapisu liczb. Pomimo tego, zgodnie z (2), system w kolejnej iteracji dokonał następnego „przybliżenia” wyniku, co realnie skutkowało jego pogorszeniem. Uniknięcie takiego błędu dla (2) wymagałoby przekształcenia i wyprowadzenia na nowo całego algorytmu oraz uzupełnienia o dodatkowe warunki, co znacznie zwiększyło by złożoność obliczeniową systemu. W efekcie miałyby to również wpływ na znacznie większą zajętość struktury w docelowym układzie sprzętowym. Biorąc pod uwagę, iż dane wyjściowe sprowadzane są do wartości całkowitych z zakresu $\langle -128, 127 \rangle$, dla niedokładności $\{-1, 1\}$, błąd wynosi ok. 0.39% i jest praktycznie pomijalny.

Dodatkowa próba dokładności polegała na przebadaniu wyników rotacji dla 1000 rotatorów o losowo dobranych parametrach x_0 , y_0 i kącie rotacji α . Próba ta wykazała, że dla wartości wynikowych x_1 i y_1 przekształconych i zaokrąglonych do 8-bitowego systemu U2, 816 próbek miało prawidłowe wyniki, natomiast 184 próbki miały błąd o wartość ± 1 (w porównaniu do wartości przewidywanej). Podobnie jak we wcześniejszym przypadku, daje to błąd na poziomie ok. 0.39% dla 18,4% odpowiedzi systemu. Należy tu podkreślić, iż są to wyniki otrzymane na podstawie grupy losowej, która zależnie od konkretnych wartości może dawać mniejsze lub większe błędy.

Tabela 1. Wartości wyjściowe dla kolejnych iteracji algorytmu CORDIC

	Parametry rotatora nr 1: $x_0 = 57, y_0 = -92,$ $\alpha = -37.672354^\circ$		Parametry rotatora nr 2: $x_0 = 12, y_0 = 105$ $\alpha = 79.384715^\circ$		Parametry rotatora nr 3: $x_0 = -65, y_0 = -108$ $\alpha = -43.563295^\circ$	
Numer iteracji	x_1 po danej iteracji	y_1 po danej iteracji	x_1 po danej iteracji	y_1 po danej iteracji	x_1 po danej iteracji	y_1 po danej iteracji
1	-35.000000	-149.000000	-93.000000	117.000000	-173.000000	-43.000000
2	-17.500000	-74.500000	-46.500000	58.500000	-86.500000	-21.500000
3	-26.250000	-111.750000	-75.750000	35.250000	-129.750000	-32.250000
4	7.625000	-116.125000	-90.375000	23.625000	-108.125000	-26.875000
5	-5.437500	-106.812500	-96.187500	30.937500	-118.937500	-29.562500
6	-10.093750	-105.718750	-99.843750	28.031250	-124.343750	-30.906250
7	-10.640625	-108.046875	-101.296875	29.859375	-123.671875	-33.609375
8	-11.812500	-107.765625	-100.375000	30.593750	-122.312500	-33.265625
9	-11.218750	-107.906250	-100.750000	31.062500	-121.625000	-33.093750
10	-11.140625	-107.609375	-100.937500	31.296875	-121.531250	-33.437500
11	-10.984375	-107.656250	-101.062500	31.203125	-121.359375	-33.390625
Wartość oczekiwana (w systemie U2 Q10.6)	-11.109375	-107.65625	-101	31.140625	-121.53125	-33.46875
Wartość oczekiwana (w systemie U2 8-bit)	-11	-107	-101	31	-122	-33

4. Wnioski

Niniejszy artykuł skupia się na problemie realizacji rotatora w systemach o skończonej precyzji obliczeń z wykorzystaniem algorytmu CORDIC. W efekcie przeprowadzonych badań i analiz (rozdział 3) można stwierdzić, że wyniki są bardzo dobre i taka realizacja rotatorów jest idealna do implementacji w słabszych układach scalonych czy mikroprocesorach. Dodatkowym atutem jest tu możliwość regulacji dokładności poprzez zmianę ilości iteracji lub nawet korektę dokładności zapisu różnych parametrów. Oczywiście zmniejszenie iteracji lub rozdzielczości bitowej ma też wpływ na zmianę rozmiarów struktury i zajętości w układzie docelowym. Możliwość stosowania rotatorów do realizacji filtrów FIR [3, 4, 6], daje ciekawą alternatywę wobec klasycznej realizacji splotu, która często wymaga użycia wielu bloków mnożących, co zazwyczaj uniemożliwia potokową realizację przetwarzania. Struktury rotatorowe bazujące na CORDIC'u, ze względu na organizację obliczeń, od razu przetwarzają dane w sposób potokowy, tzn. za każdym cyklem zegara pobierana jest jedna próbka wejściowa i jednocześnie zwracana jest jedna próbka wyjściowa. Dalsze prace i badania będą skupiały się na

modyfikacji (2) oraz zmianie rozdzielczości bitowej, tak aby otrzymać jeszcze mniejsze struktury sprzętowe oraz w miarę możliwości bardziej dokładne rotatory sprzętowe bazujące na algorytmie CORDIC.

Bibliografia

1. Downing D.: *Trigonometry*, Barron's Educational Series, 2001, ISBN-10: 0764113607
2. Liu Z. Y., Zhao X. Z.: *Research and Implementation of Image Rotation Based on CUDA*, Advanced Materials Research, vol. 216, str. 708-712, 2011
3. Wirski R., Wawryn K., Strzeszewski B.: *State-space approach to implementation of FIR systems using pipeline rotation structures*, ICSES 2012
4. Wawryn, K., Wirski, R.T., Strzeszewski, B.: *Implementation of finite Impulse Response Systems Using Rotation Structures*, ISITA 2010, Taiwan
5. Volder J. E.: *The CORDIC trigonometric computing technique*, IRE Trans. Electron. Comput., vol. EC-8, nr. 3, str. 330-334, wrzesień 1959
6. Wawryn K., Poczekajło P., Wirski R.: *FPGA implementation of 3-D separable Gauss filter using pipeline rotation structures*, MIXDES 2015, Toruń

Streszczenie

W artykule dokonano pomiaru dokładności algorytmu CORDIC stosowanego do realizacji rotatora używanego m.in. w dedykowanych systemach CPS. Badania dotyczyły implementacji struktury w układzie o skończonej precyzji obliczeń. Wykonane zostały szczegółowe pomiary wyników algorytmu dla poszczególnych iteracji oraz dokonano ogólnej analizy dla większej grupy losowej. Przedstawione wyniki dały podstawę do oceny prawidłowego działania algorytmu oraz wykazały zalety i wady takiego podejścia do realizacji sprzętowej rotatorów.

Abstract

In this paper, the accuracy of the CORDIC algorithm is measured and present. This algorithm is used to the rotation realization, which is utilized e.g. in dedicated DSP systems. The research is related to the structure implementation in a system with finite-precision arithmetic. Detailed measurements of the results of the algorithm for each iteration are made and also general analysis of a larger random group is presented. The results allow to rate CORDIC algorithm and show pros and cons this approach to hardware realization of rotation.