Dr hab. Leszek Knopik, prof. nadzw. UTP

Faculty of Management
UTP University of Science and Technology
Fordońska Street 430, 85-890 Bydgoszcz, Poland
e-mail: knopikl@utp.edu.pl

Dr hab. inż. Klaudiusz Migawa, prof. nadzw. UTP

Faculty of Mechanical Engineering
UTP University of Science and Technology
Kaliskiego Street 7, 85-796 Bydgoszcz, Poland
e-mail: klaudiusz.migawa@utp.edu.pl

Optymalna strategia wymian według wieku obiektów technicznych nienaprawialnych z gwarancją

Optimal age-replacement policy for non-repairable technical object with warranty

Słowa kluczowe: *wymiana według wieku, proces semi–Markowa, koszt na jednostkę czasu, gwarancja, klasa rozkładów IFR, funkcja intensywności uszkodzeń.*

Keywords: *age-replacement, semi-Markov process, profit per unit time, warranty, IFR class, failure rate function.*

Streszczenie: W pracy bada się efekty wprowadzenia odnów prewencyjnych do systemu eksploatacji, realizowanych przez wymiany według wieku obiektów technicznych posiadających gwarancję producenta i nienaprawialnych. W tym celu bada się koszt przypadający na jednostkę czasu, wynikający z wykonywanych w systemie eksploatacji wymian profilaktycznych i napraw. Funkcję wyrażającą ten koszt w zależności od czasu wymiany zdefiniowano w oparciu o podstawy teorii procesów semi–Markowa. Sformułowano warunki dostateczne istnienia minimum kosztu wymian w przypadku, gdy czas do uszkodzenia ma niemalejącą funkcję intensywności uszkodzeń. W końcowej części artykułu przedstawiono przykład numeryczny ilustrujący przedstawione w pracy wyniki.

Abstract: This paper investigates the effect of introducing preventing replacement to maintenance system implemented by age-replacement of technical objects with value manufacture's warranty and non-repairable. In order to examine this, the cost per unit time, resulting from the use of the preventive replacements and repairs system is investigated. The function expressing the cost depending on the time of the exchange is defined basing on the foundations of the theory of semi-Markov processes. Sufficient conditions of the existence of the minimum of the criteria function were formulated, in this case when the failure rate function is increasing. In the final part of the paper was presented a numerical example illustrating the findings of the paper.

1. Wstęp

Celem utrzymania wystarczającego poziomu niezawodności i gotowości systemu eksploatacji wprowadza się do systemu eksploatacji wymiany prewencyjne według wieku elementów lub podsystemów. Wymiany według wieku są znane od dawna, na przykład [2]. Zagadnienie to było badane poprzez rozwijanie teorii wymian profilaktycznych według wieku dla różnych przypadków szczególnych. W szczególności w pracach [3, 4, 10, 12] otrzymano cały szereg ważnych wyników analitycznych. Jednak znacznie później opracowano metody wymian według wieku dla obiektów technicznych posiadających gwarancję producenta. Gwarancja producenta w obecnym czasie jest podstawowym elementem współczesnego rynku. Podstawową rolą gwarancji jest oferta zawierająca wykaz czynności które ma podjąć kupujący, gdy produkt ulegnie uszkodzeniu w okresie gwarancji. Gwarancja producenta na produkt tworzy zachętę dla kupującego do różnych zobowiązań, podnosi reputację producenta, ma wpływ na udział w rynku i potencjalne zyski. Szczegółową dyskusję i przegląd wyników dotyczących różnych podejść do gwarancji na produkt zamieszczono w pracach [5, 6, 7]. W szczególności dla produktów nienaprawialnych politykę gwarancyjną przedstawiono w pracy [5]. Analizowana w tej pracy polityka gwarancyjna realizuje się przez strategię wymiany uszkodzonego elementu w okresie gwarancji na nowy element z pełną gwarancją. Model matematyczny i analizę kosztów dla takiej strategii wymian rozwinięto w pracach [1, 8, 13]. W pracy [14] zdefiniowano funkcję kryterialną wyrażającą koszty związane z wykonywaniem wymian prewencyjnych elementów nienaprawialnych z gwarancją w przypadku, gdy czas do uszkodzenia ma rozkład z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. W cytowanej pracy funkcja kryterialna zależy od rozkładu czasu do uszkodzenia, kosztów naprawy i wymiany profilaktycznej oraz długości okresu gwarancji. Zakłada się, że czasy napraw i wymian profilaktycznych są pomijalne. W tej pracy rozważa się funkcję kryterialną ogólniejszą niż rozważana w pracy [14], uwzględniającą niezerowe czasy napraw i czasy odnów prewencyjnych. Budowę funkcji kryterialnej $g(x)$ oparto o własności graniczne procesów semi–Markowa. Celem pracy jest sformułowanie warunków istnienia minimum funkcji $g(x)$ opisującej straty w systemie eksploatacji.

2. Podstawowe oznaczenia i pojęcia

W pracy używa się następujących oznaczeń:

S_1 – stan poprawnej pracy,
S_2 – stan naprawy (odnowy) w okresie trwania gwarancji,
S_3 – stan wymiany prewencyjnej po okresie gwarancji,
S_4 – stan naprawy (odnowy) po okresie gwarancji,
z_2 – koszt na jednostkę czasu naprawy (odnowy) w okresie gwarancji,
z_3 – koszt na jednostkę czasu wymiany prewencyjnej,
z_4 – koszt na jednostkę czasu naprawy (odnowy) po okresie gwarancji,
w – długość okresu gwarancji,
T_1 – czas życia obiektu technicznego (czas do uszkodzenia),
T_2 – czas trwania naprawy (odnowy) w okresie trwania gwarancji,
T_3 – czas trwania wymiany prewencyjnej po okresie gwarancji,
T_4 – czas trwania naprawy (odnowy) po okresie trwania gwarancji,
ET_i – wartość średnia zmiennej losowej T_i, $i = 1, 2, 3, 4$,
x – wiek wymiany (profilaktycznej) obiektu technicznego (elementu),
$f(t)$ – gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej czasu życia T_1,
$F(t)$ – dystrybuanta zmiennej losowej T_1, $F(t) = P\{T_1 < t\}$,
$R(t)$ – funkcja niezawodności zmiennej losowej T_1, $R(t) = 1 – F(t)$,
$\lambda(t)$ – funkcja intensywności uszkodzeń dla czasu do uszkodzenia T_1, $\lambda(t) = f(t) / R(t)$,
$g(x)$ – funkcja kryterialna opisująca stratę przypadającą na jednostkę czasu w zależności od czasu wymiany x.

W pracy [14] pokazano, że jeżeli w chwili x przeprowadzono odnowę prewencyjną, to koszt na jednostkę czasu jest dany wzorem

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{c_pR(w)+c_dF(x)}{ET(x)}, & \text{dla} \quad w\le x,\\ \dfrac{c_pR(x)+c_dF(x)}{ET(x)}, & \text{dla} \quad w>x,\end{cases} \tag{1}$$

gdzie: c_d oznacza koszt wymiany uszkodzonego elementu, c_p oznacz koszt zakupu elementu oraz ET(x) jest całką postaci

$$ET(x)=\int_0^x R(s)ds\,. \tag{2}$$

Funkcja g(x) określona wzorem (1) jest ciągła dla $x \ge 0$ i różniczkowalna dla $x \ne w$. W pracy [14] podano warunki dostateczne, dla których funkcja g(x) posiada minimum. W przedstawionym w pracy modelu wymian według wieku, nie uwzględnia się czasów wymian i czasów odnów prewencyjnych. Zbudowany w pracy model semimarkowski uwzględnia czasy wymian oraz odnów i opiera się na twierdzeniu granicznym dla procesów semi–Markowa ze skończoną liczbą stanów [9]. Jednym z założeń tego twierdzenia jest wymaganie, aby wartości średnie ET_i, i = 1, 2, 3, 4 czasów T_i, i = 1, 2, 3, 4 przebywania w stanach były dodatnie. W modelu semimarkowskim funkcja kryterialna g(x) zależy od rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej T_1, wartości średnich ET_i, i = 1, 2, 3, 4, kosztów jednostkowych z_i, i = 1, 2, 3, 4 oraz od prawdopodobieństw granicznych $p^*_i(x)$, i = 1, 2, 3, 4 włożonego w proces semimarkowski X(t) łańcucha Markowa. Wiadomo, że [9, 11] funkcja kryterialna g(x) wyrażająca koszt napraw i wymian ma postać

$$g(x)=\frac{\sum_{i=1}^{4} z_i ET_i p_i^*(x)}{\sum_{i=1}^{4} ET_i p_i^*(x)}, \tag{3}$$

gdzie z_i jest kosztem jednostkowym przebywania obiektu technicznego w stanie S_i, $p_i^*(x)$ jest prawdopodobieństwem granicznym łańcucha Markowa włożonego w proces semi–Markowa, przy założeniu, że w chwili x dokonywana jest wymiana profilaktyczna. W dalszych rozważaniach przyjmuje się $z_1 = 0$.

3. Model matematyczny problemu

W pracy pokazuje się możliwość innego niż w znanych pracach podejścia do konstrukcji funkcji kryterialnej g(x). Podejście to opiera się na zastosowaniu granicznych własności procesów semimarkowskich do budowy funkcji kryterialnej. W celu zbudowania takiego modelu wyróżniono cztery stany S_1, S_2, S_3 i S_4 procesu semi–Markowa X(t).

Na podstawie warunków definiujących stany S_1, S_2, S_3, S_4 macierz P prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa można zapisać w postaci

$$P=\begin{bmatrix}0 & p_{12}(x) & p_{13}(x) & p_{14}(x)\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdzie x jest wiekiem wymiany. Prawdopodobieństwa warunkowe $p_{1i}(x)$, i = 2, 3, 4 wyznacza się osobno dla przypadków $x < w$ i $x \geq w$. Jako pierwszy rozważa się przypadek, gdy $x < w$. Jeśli czas wymiany $x < T_1$, to naprawa nastąpiła w okresie trwania gwarancji (stan S_2), stąd

$$p_{12}(x) = F(x).$$

Jeśli $x \geq T_1$, to w okresie gwarancji realizuje się wymianę prewencyjną (stan S_3), stąd

$$p_{13}(x) = R(x).$$

W przypadku, gdy $x < w$, to dla naprawy po gwarancji (stan S_4) jest

$$p_{14}(x) = 0.$$

Dla $x \geq w$ naprawa jest realizowana, gdy $w < T_1$, stąd

$$p_{12}(x) = F(w).$$

Jeśli $T_1 \geq x$, to realizuje się wymianę prewencyjną, stąd

$$p_{13}(x) = R(x).$$

Naprawa po okresie gwarancji jest realizowana, gdy $w \leq T_1 < x$, stąd

$$p_{14}(x) = F(x) – F(w).$$

Łatwo można sprawdzić, że w obu rozważanych tu przypadkach dla macierzy (4) prawdziwa jest równość

$$p_{12}(x) + p_{13}(x) + p_{14}(x) = 1.$$

Wiadomo, że [9] prawdopodobieństwa graniczne $p_i^*(x)$, i = 1, 2, 3, 4 we wzorze (3) wyznacza się jako rozwiązanie układu równań liniowych postaci

$$\sum_i p_i^*(x) p_{ij} = p_j^*(x) \text{, gdzie } j = 1, 2, 3, 4.$$

Powyższy układ równań jest układem zależnym, dlatego jedno z równań zastępuje się warunkiem normalizacyjnym postaci

$$\sum_i p_i^*(x) = 1.$$

Dla $x < w$ rozwiązuje się układ równań postaci:

$$F(x)\, p_1^*(x) = p_2^*(x),$$

$$R(x)\, p_1^*(x) = p_3^*(x), \qquad (5)$$

$p_4^*(x) = 0,$

$p_1^*(x) + p_2^*(x) + p_3^*(x) + p_4^*(x) = 1.$

Rozwiązanie układu równań liniowych (5) dla $x < w$ jest następujące:

$$
\begin{aligned}
p^*_1(x) &= ½,\\
p^*_2(x) &= ½\, F(x),\\
p^*_3(x) &= ½\, R(x),\\
p^*_4(x) &= 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Natomiast dla $x \geq w$ układ równań ma postać:

$$
\begin{aligned}
&F(w)\, p_1^*(x) = p_2^*(x),\\
&R(x)\, p_1^*(x) = p_3^*(x),\\
&[\, F(x) - F(w)\,]\, p_1^*(x) = p_4^*(x),\\
&p_1^*(x) + p_2^*(x) + p_3^*(x) + p_4^*(x) = 1.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Rozwiązanie układu równań liniowych (7) dla $x \geq w$ jest następujące:

$$
\begin{aligned}
p^*_1(x) &= ½,\\
p^*_2(x) &= ½\, F(w),\\
p^*_3(x) &= ½\, R(x),\\
p^*_4(x) &= ½\, (F(x) - F(w)).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Uwzględniając, że w analizowanym modelu wymian według wieku przyjmuje się, że $z_1 = 0$, stąd funkcja kryterialna (3) dla $x < w$ ma postać

$$
g(x) = \frac{z_2 F(x) ET_2 + z_3 R(x) ET_3}{ET(x) + F(x) ET_2 + R(x) ET_3}, \tag{9}
$$

gdzie $ET(x)$ jest funkcją określoną wzorem (2).

Na podstawie (6) i (9) funkcję kryterialną $g_1(x)$ dla $x \leq w$ można teraz przedstawić w postaci

$$
g_1(x) = \frac{B_1 F(x) + C_1}{ET(x) + BF(x) + C}, \tag{10}
$$

gdzie współczynniki B_1, B, C_1 i C wyrażone są następująco:

$$
\begin{aligned}
&B_1 = ET_2\, z_2 - ET_3\, z_3, \\
&B = ET_2 - ET_3, \\
&C_1 = ET_3\, z_3, \\
&C = ET_3.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Na podstawie (8) i (9) funkcję kryterialną g(x) dla x > w można teraz przedstawić w postaci

$$
g_2(x) = \frac{D_1 F(x) + E_1}{ET(x) + DF(x) + E}, \tag{12}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
&D_1 = ET_4\, z_4 - ET_3\, z_3, \\
&D = ET_4 - ET_3, \\
&E_1 = F(w)\,[ET_4\, z_4 - ET_2\, z_2] + ET_3\, z_3, \\
&E = F(w)\,[ET_4 - ET_2] + ET_3.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Głównym problemem rozpatrywanym w pracy jest sformułowanie warunków istnienia minimum funkcji g(x) przy warunku $x \geq 0$, określonej następująco

$$
g(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{dla} \quad x < w, \\ g_2(x), & \text{dla} \quad x \geq w. \end{cases}
$$

Na podstawie wzorów (10), (11), (12) i (13) wnioskuje się, że funkcja kryterialna g(x) zależy od rozkładu zmiennej losowej T_1, długości okresu gwarancji w, kosztów jednostkowych z_2, z_3 i z_4, średnich czasów ET_2, ET_3 i ET_4 przebywania w stanach S_2, S_3 i S_4 procesu.

4. Własności funkcji kryterialnej

Pochodna funkcji kryterialnej (10) jest równa

$$
g_1'(x) = \frac{R(x)}{M_1^2(x)} \{B_1 H(x) - C_1 + \lambda(x)[B_1 C - BC_1]\}, \tag{14}
$$

gdzie $M_1(x) = ET(x) + BF(x) + C$ oraz $H(x) = ET(x)\,\lambda(x) - F(x)$.

Mianownik $M_1(x)$ pochodnej funkcji kryterialnej (10) jest funkcją rosnącą od $M_1(0) = C > 0$ do $M_1(\infty) = ET_1 + B + C$. Stąd wynika, że $M_1(x) > 0$. Znak pochodnej funkcji kryterialnej jest taki sam jak znak funkcji $h_1(x)$, którą można zapisać w postaci

$$
h_1(x) = \alpha_1\, H(x) + \beta_1 + \lambda(x)\, \gamma_1,
$$

gdzie przyjmuje się następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = B_1,$$

$$\beta_1 = -\,C_1,$$

$$\gamma_1 = B_1C - BC_1.$$

Współczynniki α_1, β_1 i γ_1 wyrażają się wzorami:

$$\alpha_1 = ET_2\, z_2 - ET_3\, z_3,$$

$$\beta_1 = -\,ET_3\, z_3, \tag{15}$$

$$\gamma_1 = ET_2\, ET_3(z_2 - z_3).$$

Analogicznie pochodna funkcji kryterialnej (12) ma postać

$$g_2^{'}(x) = \frac{R(x)}{M_2^2(x)}\{D_1H(x) - E_1 + \lambda(x)[D_1E - DE_1]\}, \tag{16}$$

gdzie $M_2(x) = ET(x) + DF(x) + E$.

Mianownik $M_2(x)$ pochodnej funkcji kryterialnej (12) jest określony wzorem

$$M_2(x) = ET(x) + F(x)\,(ET_4 - ET_3) + F(w)\,(ET_4 - ET_2) + ET_3,$$

$$M_2(x) = ET(x) + F(x)\, ET_4 + F(w)\,(ET_4 - ET_2).$$

Jeśli $ET_4 \geq ET_2$, to prawdziwa jest nierówność $M_2(x) > 0$. Znak pochodnej (16) funkcji kryterialnej jest taki sam jak znak funkcji $h_2(x)$, którą można zapisać w postaci

$$h_2(x) = \alpha_2\, H(x) + \beta_2 + \lambda(x)\, \gamma_2,$$

gdzie współczynniki α_2, β_2 i γ_2 wyrażają się wzorami:

$$\alpha_2 = D_1 = ET_4\, z_4 - ET_3\, z_3,$$

$$\beta_2 = -\,E_1 = F(w)\,[\,ET_4\, z_4 - ET_2\, z_2] - ET_3\, z_3,$$

$$\gamma_2 = D_1E - DE_1.$$

Po przekształceniach współczynnik γ_2 można zapisać jako

$$\gamma_2 = F(w)\,[ET_2\, ET_4\,(z_4 - z_2) + ET_2\, ET_3\,(z_2 - z_3) + ET_3\, ET_4(z_3 - z_4)] + ET_3\, ET_4(z_4 - z_3).$$

Lemat 1. Jeśli $ET_4 > ET_3$ i $z_4 \geq z_3$, to prawdziwa jest nierówność $\gamma_2 > 0$.

Dowód. Grupując dwa ostatnie składniki powyższej sumy można zapisać jako

$$\gamma_2 = F(w)\,[ET_2\, ET_4\,(z_4 - z_2) + ET_2\, ET_3\,(z_2 - z_3)] + R(w)\, ET_3\, ET_4(z_4 - z_3).$$

Korzystając z tego, że $ET_4 > ET_3$ otrzymujemy nierówność

$$\gamma_2 > F(w)\, ET_2\, ET_3[\,(z_4 - z_2 + z_2 - z_3] + R(w)\, ET_3\, ET_4(z_4 - z_3).$$

Z tego, że $z_4 \geq z_3$ otrzymano

$$\gamma_2 > (z_4 - z_3)\, ET_3\,[F(w)ET_2 + R(w)\, ET_4],$$

co kończy dowód lematu 1.

Podczas formułowania kryteriów istnienia minimum funkcji kryterialnej g(x) wygodnie jest badać funkcję h(x) określoną następująco:

$$h(x) = h_1(x) \text{ dla } x \in <0, w> \text{ oraz } h(x) = h_2(x) \text{ dla } x \in (w, \infty),$$

gdzie $h_i(x) = \alpha_i\, H(x) + \beta_i + \gamma_i\, \lambda(x)$, i = 1, 2.

Bardzo ważną własność funkcji h(x) ujmuje lemat 2.

Lemat 2. Jeżeli jednostkowe koszty napraw po okresie gwarancji przekraczają jednostkowe koszty napraw w okresie gwarancji i wymiany prewencyjnej po okresie gwarancji oraz dla wartości średnich zachodzi $ET_4 \geq ET_2$, to $h(w^+) - h(w) \geq 0$, gdzie $h(w^+)$ jest granicą prawostronną funkcji h(x) w punkcie x = w.

Dowód. Wiadomo, że:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = ET_4\, z_4 - ET_2\, z_2 \geq 0, \tag{17}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = F(w)\,[ET_4\, z_4 - ET_2\, z_2] \geq 0. \tag{18}$$

Wówczas różnica

$$\gamma_2 - \gamma_1 = F(w)\,[ET_2\, ET_4\,(z_4 - z_2) + ET_2\, ET_3\,(z_2 - z_3) + ET_3\, ET_4(z_3 - z_4)] + ET_3\, ET_4(z_4 - z_3) - ET_2\, ET_3(z_2 - z_3),$$

po pogrupowaniu ostatnich składników może być zapisana w postaci:

$$\gamma_2 - \gamma_1 = F(w)\, ET_2\, ET_4\,(z_4 - z_2) - R(w)\, ET_2\, ET_3\,(z_2 - z_3) + R(w)\, ET_3\, ET_4(z_4 - z_3),$$

$$\gamma_2 - \gamma_1 = F(w)\, ET_2\, ET_4\,(z_4 - z_2) + R(w)\, ET_3\,[\,ET_4(z_4 - z_3) - ET_2\,(z_2 - z_3)].$$

Korzystając z tego, że $ET_4 \geq ET_2$ i $z_4 \geq z_3$ dla różnicy $\gamma_2 - \gamma_1$ można zapisać

$$\gamma_2 - \gamma_1 \geq F(w)\, ET_2\, ET_4\,(z_4 - z_2) + R(w)\, ET_3\, ET_2(z_4 - z_2),$$

stąd $\gamma_2 - \gamma_1 \geq 0$.

Ostatnia nierówność i nierówności (17) i (18) dowodzą prawdziwości tezy lematu 2.

5. Warunki istnienia minimum funkcji kryterialnej

Badanie funkcji kryterialnej g(x) rozważa się przy następujących założeniach:

Z1. $\beta_1 + \gamma_1 f(0^+) < 0$,
Z2. Funkcja intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$ zmiennej losowej T_1 jest niemalejąca ($T_1 \in$ IFR),
Z3. $ET_4 > ET_2$,
Z4. $ET_4 > ET_3$,
Z5. $z_4 \geq z_2$,
Z6. $z_4 \geq z_3$.

Pierwsze założenie jest zwykle stosowane przy rozważaniu wymian prewencyjnych [9]. Łatwo jest zauważyć, że dla wielu znanych rozkładów prawdopodobieństwa zachodzi $f(0^+) = 0$. Na przykład dla rozkładu Weibulla i rozkładu gamma z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń warunek ten jest spełniony. Jeśli zatem $f(0^+) = 0$, to w tej pracy zawsze prawdziwa jest nierówność $\beta_1 = - ET_3\, z_3 < 0$. Bardzo ważnym jest założenie mówiące, że funkcja intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$ jest niemalejąca ($T_1 \in$ IFR).

5.1. Badanie funkcji kryterialnej w przedziale <0, w>

Do badania funkcji g(x) w przedziale <0, w> przyjmuje się założenia Z1 i Z2. Niżej rozważa się cztery przypadki dla współczynników α_1, γ_1.

Przypadek 1. $\alpha_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$
Funkcja $h_1(x)$ rośnie w przedziale <0, w> od wartości $h_1(0) = \beta_1 + \gamma_1 f(0^+) < 0$ do wartości $h_1(w)$. Możliwe są dwa przypadki:
(A): $h_1(w) > 0$,
(B): $h_1(w) \leq 0$.

Przypadek 2. $\alpha_1 < 0$, $\gamma_1 < 0$
Funkcja $h_1(x)$ maleje w przedziale <0, w> od wartości $\beta_1 + \gamma_1 f(0^+) < 0$ do wartości $h_1(w)$. Możliwy jest przypadek (B).

Przypadek 3. $\alpha_1 > 0$, $\gamma_1 < 0$
Pochodna funkcji $h_1(x)$ wyraża się wzorem

$$h_1'(x) = \lambda'(x)\, [\alpha_1\, ET(x) + \gamma_1].$$

Niech $u(x) = \alpha_1\, ET(x) + \gamma_1$, wtedy u(x) rośnie od $u(0) = \gamma_1 < 0$ do u(w). Możliwe są dwa przypadki:
(a): $u(w) \leq 0$, wtedy $u(x) \leq 0$ dla $x \in$ <0, w>, stąd $h_1(x)$ maleje i zachodzi przypadek (B),
(b): $u(w) > 0$, w tym przypadku funkcja u(x) zmienia znak z „–” na „+”. Funkcja u(x) osiąga zatem minimum. Możliwe są przypadki (A) i (B).

Przypadek 4. $\alpha_1 < 0$, $\gamma_1 > 0$
Funkcja u(x) maleje od $u(0) = \gamma_1 > 0$ do u(w). W zależności od znaku u(w) wyróżnia się dwa przypadki:
(c): $u(w) \geq 0$, wtedy funkcja $h_1(x)$ rośnie dla $x \in$ <0, w>, zatem możliwe są przypadki (A) i (B),

(d): $u(w) < 0$, w tym przypadku $u(x)$ zmienia znak z „+” na „–”, skąd funkcja $h_1(x)$ w pewnym punkcie x_0 osiąga maksimum. Formalnie możliwe są trzy następujące przypadki:
(i): $h_1(x_0) \leq 0$, wtedy $h_1(w) < 0$, przypadek (B),
(ii): $h_1(x_0) > 0$ i $h_1(w) \leq 0$,
(iii): $h_1(x_0) > 0$ i $h_1(w) > 0$.

Przypadki (ii) i (iii) są rozważane w poniższym wniosku.

Lemat 3. Jeśli $\alpha_1 < 0$, $\gamma_1 > 0$ i funkcja $h_1(x)$ osiąga maksimum w punkcie x_0, to $h_1(x_0) \leq 0$.

Dowód. Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia maksimum funkcji $h_1(x)$ w przedziale <0, w> jest zmiana znaku pochodnej $h_1'(x)$ w pewnym punkcie x_0, tzn. funkcji $u(x)$ z „+” na „–”. Dla funkcji $u(x)$ można napisać $u(x_0) = \alpha_1 ET(x_0) + \gamma_1 = 0$, stąd $ET(x_0) = -\gamma_1 / \alpha_1$. Ostatnią równość wstawia się do wzoru na funkcję $h_1(x)$. Stąd $h_1(x_0) = -\alpha_1 F(x_0) + \beta_1$. Jeśli $h_1(x_0) > 0$, to $F(x_0) > \beta_1 / \alpha_1$. Podstawiając do prawej strony ostatniej nierówności wzory (15), nierówność tą można zapisać w postaci

$$F(x_0) > 1 / (1 - ET_2 z_2 / ET_3 z_3). \tag{19}$$

Z tego, że $\alpha_1 < 0$ wynika prawdziwość nierówności $0 < (ET_2 z_2) / (ET_3 z_3) < 1$, stąd ostatecznie na podstawie (19) wnioskuje się, że $F(x_0) > 1$. Ostatnia nierówność jest sprzeczna z podstawową własnością dystrybuanty zmiennej losowej. Założenie $h_1(x_0) > 0$ nie jest zatem w tym dowodzie prawdziwe co kończy dowód lematu 3.

Z tezy lematu 3 wynika, że przy dokonanych założeniach przypadki (ii) oraz (iii) nie występują w rozważaniach pracy.

5.2. Badanie funkcji kryterialnej w przedziale (w, ∞)

W tym podpunkcie przyjmuje się następujące założenia: Z2, Z3, Z4, Z5 i Z6. Przyjęcie tych założeń pozwala na korzystanie z nierówności $\alpha_2 > 0$ i $\gamma_2 > 0$. Z (17) i lematu 1 wynika, że funkcja $h_2(x)$ jest rosnąca dla $x \in (w, \infty)$. Rozważa się przypadki:
(C): $h_2(w) \geq 0$, wtedy z tego, że funkcja $h_2(x)$ jest rosnąca wynika, że dla każdego $x \in (w, \infty)$ funkcja $g(x)$ jest rosnąca,
(D): $h_2(w) < 0$ i $h_2(x)$ rośnie do $h_2(\infty) \leq 0$, wtedy $h_2(x) \leq 0$ dla każdego $x \in (w, \infty)$. Funkcja $g(x)$ maleje w przedziale (w, ∞),
(E): $h_2(w) < 0$ i $h_2(\infty) > 0$. Funkcja $h_2(x)$ rośnie i jest jedna zmiana znaku z „–” na „+”. Funkcja kryterialna $g(x)$ ma minimum w pewnym punkcie $x_0 \in (w, \infty)$.

5.3. Analiza funkcji dla x > 0

Dla $x \in (0, w)$ w wyróżniono dwa przypadki (A) i (B), natomiast dla $x \in (w, \infty)$ trzy przypadki (C), (D) i (E). Formalnie w celu zbadania przebiegu funkcji kryterialnej $g(x)$ dla $x \geq 0$ należy zbadać 6 par przypadków. Jednak dokładniejsza analiza własności funkcji $g(x)$ pozwala wyeliminować niektóre pary przypadków.
Przypadek (A, C): (A): $h_1(x) > 0$, (C): $h_2(w) \geq 0$
Na podstawie lematu 2 stwierdzono, że w przypadku (A, C) wystarczy rozważać (A): $h_1(x) > 0$, (C): $h_2(w) > 0$. Można zatem sformułować następujący wniosek:

Wniosek 1. Dla przypadku (A, C) funkcja kryterialna $g(x)$ osiąga dokładnie jedno minimum w punkcie $x_0 \in (0, w)$.

Na podstawie lematu 2 wnioskuje się, że pary przypadków (A, D) i (A, E) nie mogą wystąpić. Dla pary (B, C): (B): $h_1(w) \le 0$, (C): $h_2(w) \ge 0$ rozważa się zbiór

$$K = \{ w : h_1(w) = 0,\ h_2(w) = 0 \}.$$

Oczywisty jest wniosek:

Wniosek 2. Jeżeli dla przypadku (B, C) zbiór $K \neq \emptyset$, to dla każdego $x_0 \in K$ funkcja $g(x)$ osiąga minimum.

Wprowadzenie dodatkowego założenia na funkcję intensywności uszkodzeń prowadzi do następującego wniosku:

Wniosek 3. Jeżeli funkcja intensywności uszkodzeń $\lambda(x)$ jest rosnąca, to funkcje $h_1(x)$ i $h_2(x)$ są rosnące i dla (B, C) funkcja kryterialna $g(x)$ osiąga dokładnie jedno minimum w punkcie $x_0 = w$.

Dla pary (B, D) jest (B): $h_1(x) \le 0$, (D): $h_2(w) \le 0$, $h_2(\infty) \le 0$. Z tego, że funkcja $h_2(x)$ jest niemalejąca i z lematu 2 wynika, że wystarczy rozpatrywać przypadek, gdy $h_1(x) < 0$, $h_2(w) < 0$ i $h_2(\infty) \le 0$. Wówczas prawdziwy jest następujący wniosek:

Wniosek 4. Dla przypadku (B, D) funkcja kryterialna $g(x)$ maleje.

Dla pary (B, E) jest (B): $h_1(w) \le 0$, (E): $h_2(w) \le 0$, $h_2(\infty) > 0$. Przypadek szczególny, gdy $h_1(w) \le 0$, $h_2(w) = 0$ rozważano dla przypadku (B, C).

Wniosek 5. Jeśli $h_1(w) < 0$, $h_2(w) < 0$ i $h_2(\infty) > 0$, to istnieje punkt $x_0 \in (w, \infty)$, w którym funkcja $g(x)$ osiąga minimum.

Wnioski 1, 2, 3, 4 i 5 zawierają warunki dostateczne istnienia minimum funkcji kosztu $g(x)$.

Przykład obliczeniowy

Przykład 1. W tym przykładzie optymalizację funkcji kryterialnej realizuje się dla dwóch rozkładów zmiennej losowej T_1. W pierwszym zakłada się, że zmienna losowa T_1 ma rozkład Weibulla z funkcją gęstości prawdopodobieństwa postaci

$$f(t) = a\, b\, t^{b-1} \exp(-a\, t^{b}),$$

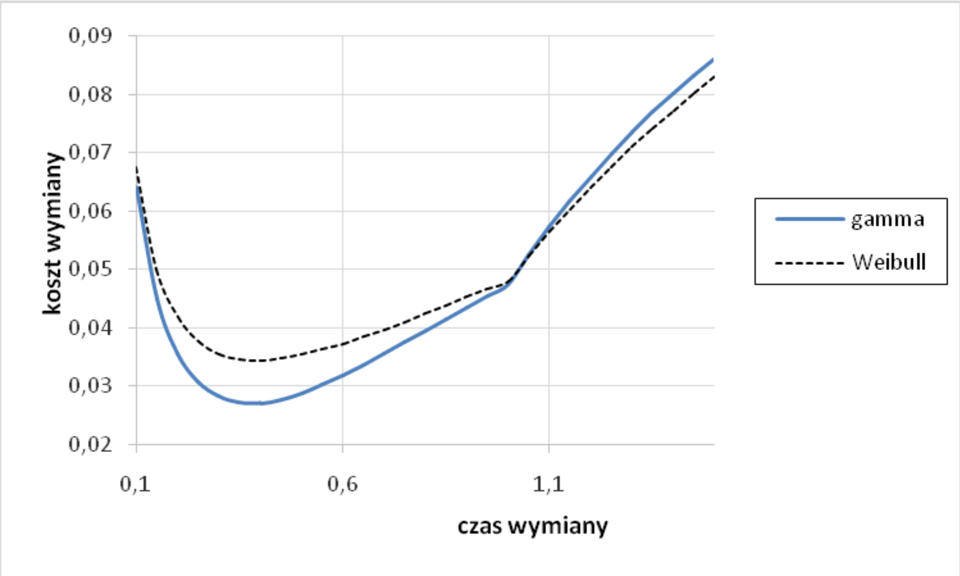
dla $t \ge 0$, $a > 0$, $b > 0$.
Czas do uszkodzenia $T_1 \in$ IFR, jeśli $b \ge 1$. Drugim rozkładem rozważanym w tym przykładzie jest rozkład gamma z funkcją gęstości postaci

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta},$$

dla $x \ge 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, symbol $\Gamma(\alpha)$ oznacza funkcję gamma określoną wzorem

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx\,.$$

Jeśli $\alpha \geq 1$, to czas do uszkodzenia $T_1 \in$ IFR. W obliczeniach przyjęto następujące wartości parametrów:
$ET_2 = 0.10$, $z_2 = 1.2$,
$ET_3 = 0.01$, $z_3 = 0.7$,
$ET_4 = 0.15$, $z_4 = 1.5$.
W przykładzie rozważa się okres gwarancji $w = 1$. Do obliczeń przyjęto następujące wartości parametrów rozkładu Weibulla: $a = 0.4$, $b = 2$. Wartości parametrów rozkładu gamma przyjęto jako $\alpha = 3.63$ i $\beta = 0.38$. Wartości parametrów α i β rozkładu gamma dobrano tak, aby w dla obu rozważanych czasów do uszkodzenia wartość średnia rozkładu gamma $ET_1 = \beta\alpha = 1.4$ i wartość dystrybuanty $F(w) = 0.33$. Wykresy funkcji $g(x)$ dla obu rozkładów pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Wykresy zależności kosztu wymiany profilaktycznej dla rozkładów gamma i Weibulla
Fig. 1. Graphs of the cost of preventive replacement for gamma and Weibull distributions

Wykresy funkcji kosztów pokazane na powyższym rysunku są wyznaczone dla tych samych wartości parametrów, różnią się tylko typem rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej T oznaczającej czas do uszkodzenia. Analiza wykresów pokazuje, że obie funkcje kryterialne osiągają wartość minimalną dla zbliżonych chwil czasowych. Jednak są pewne różnice w optymalnych wartościach funkcji kryterialnej. Wartość minimalna funkcji kryterialnej dla rozkładu gamma jest mniejsza niż dla rozkładu Weibulla. Pokazuje to, że identyfikacja typu rozkładu prawdopodobieństwa czasu do uszkodzenia jest ważna w zadaniach eksploatacji.

6. Wnioski

W pracy utworzono funkcję kryterialną opisującą koszt działania systemu eksploatacji w przypadku stosowania wymian według wieku elementów (obiektów technicznych) posiadających gwarancję producenta i nienaprawialnych. Sformułowano kryteria istnienia minimum kosztu takich wymian. Udowodniono, że przy ogólnych założeniach funkcja kryterialna posiada dokładnie jedno minimum. Pokazano przykład numeryczny, w którym dla dwóch rozkładów czasu do uszkodzenia funkcja kosztu osiąga wartość minimalną. Jest to dowodem na to, że w praktyce mogą występować sytuacje, w których minimalizacja kosztów utrzymania systemu eksploatacji jest możliwa w wyniku realizacji wymian obiektów przed upływem okresu gwarancyjnego.

Literatura

1. Balcer Y, Sahin I. Replacement costs under warranty: cost moments and time variability. Operations Research, 1986; 34: 554-559.

2. Barlow R E, Proschan F. Mathematical Theory of Reliability. John Wiley & Sons, 1965.

3. Berg H. A proof of optimality for age replacement policies. Journal Application. Probability, 1976; 13: 751-759.

4. Berg H, Epstein B. Comparison of age, block and failure replacement policies. IEEE Transactions on Reliability, 1978; 27: 25-29.

5. Blischke W R, Murthy D N P. Product warranty management I: A taxonomy for warranty policies. European Journal Operations Research, 1992; 62: 127-148.

6. Blischke W R, Murthy D N P. Product warranty management III: A review of mathematical models. European Journal Operations Research, 1992; 63: 1-34.

7. Blischke W R, Murthy D N P. Warranty cost analysis. Marcel Dekker, 1994.

8. Blischke W R, Scheuer E H. Applications of renewal theory in analysis of the replacement warranty. Naval Research Logistics Quartley, 1981; 28: 193-205.

9. Grabski F. Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji. Instytut Badań Systemowych PAN, 2002.

10. Ingram C R, Scheaffer R L. On consistent estimation of age replacement. Technometrics, 1976; 18: 213-219.

11. Knopik L. Metoda wyboru efektywnej strategii eksploatacji obiektów technicznych. Wydawnictwo Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy, Rozprawy nr 145, 2010.

12. Osaki S S, Nakagawa T. A note on age replacement. IEEE Transactions on Reliability, 1975; 34: 147-150.

13. Ritchken P H. Warranty policies for non-repairable items under risk aversion. IEEE Transactions on Reliability, 1985; 34: 147-150.

14. Yeh R H, Chen G Ch, Chen M Y. Optimal age-replacement policy for non-repairable products under renewing free-replacement warranty. IEEE Transactions on Reliability, 2005; 54: 92-97.