

Robert HANUS

POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH

Estymacja czasu opóźnienia z fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy

Dr inż. Robert HANUS

Adiunkt w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się głównie zagadnieniami związanymi z modelowaniem i analizą sygnałów losowych oraz statystycznymi metodami pomiaru opóźnienia. Autor lub współautor kilkudziesięciu publikacji w czasopiśmie i materiałach konferencyjnych w kraju i za granicą.



e-mail: rohan@prz.edu.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono określanie przedziału ufności dla opóźnienia wyznaczonego z fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy przy znanej i nieznannej rzeczywistej wartości funkcji koherencji. Omówiono błędy estymacji i dobór parametrów analizy.

Słowa kluczowe: estymacja czasu opóźnienia, wzajemna gęstość widmowa mocy, błędy statystyczne, sygnały losowe

Time delay estimation using phase of cross-spectral density function

Abstract

This article presents the methods of computing the confidence interval for time delay obtained using phase of cross-spectral density function when true value of coherence function is known and unknown. Estimation errors and the choice of parameters of the analysis are described.

Keywords: time delay estimation, cross-spectral density function, statistical errors, random signals

1. Wprowadzenie

Statystyczne metody pomiaru opóźnienia wykorzystywane są głównie w przypadkach, gdy sygnały pomiarowe są przebiegami losowymi. Mają one wiele zastosowań w nauce i technice (m.in. geologia, hydrologia, radiolokacja, astronomia, medycyna) [1-5]. W pomiarach opóźnień transportowych realizowanych przy zastosowaniu dwóch czujników często stosuje się modele losowych sygnałów pomiarowych $x(t)$ i $y(t)$ w postaci:

$$y(t) = c \cdot x(t - \tau_0) + z(t) = v(t) + z(t) \quad (1)$$

gdzie: $x(t)$ - ergodyczny sygnał losowy o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa $N(0, \sigma_x)$; c - stały współczynnik (zwykle przyjmuje się $c \approx 1$); $\tau_0 = d/V$ - opóźnienie transportowe równe ilorazowi odległości rozmieszczenia czujników d i prędkości sygnału V ; $z(t)$ - stacjonarny, nieskorelowany z sygnałem $x(t)$ szum biały o rozkładzie $N(0, \sigma_z)$.

W pomiarach opóźnienia zastosować można m.in. metodę wykorzystującą charakterystykę fazową wzajemnej gęstości widmowej mocy (WGWM), której zaletą jest możliwość wyznaczenia τ_0 dla określonej wartości częstotliwości f_0 [1-3, 6]. Podstawowe właściwości metody przedstawiono w pracy [7].

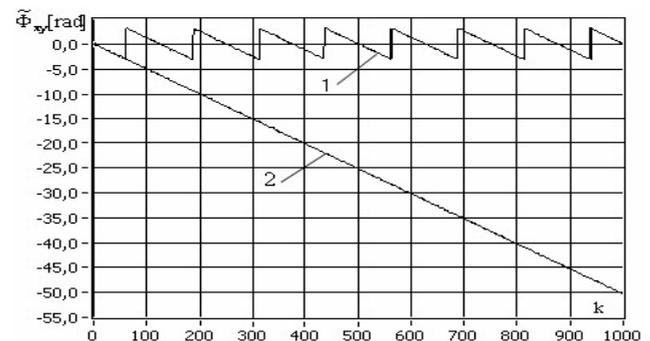
Do estymacji fazy WGWM stosuje się najczęściej procedurę nazywaną metodą Welch [3] dla ciągów dyskretnych próbek sygnałów x_n i y_n o długościach N_{total} , pobieranych ze stałym odstępem Δt będącym odwrotnością odpowiednio dobranej

częstotliwości próbkowania f_s . Procedura Welch wymaga podziału zbiorów próbek N_{total} na N_d segmentów, każdy o długości N . W wyniku zastosowania skończonej dyskretnej transformaty Fouriera uzyskuje się f_k użytecznych dyskretnych wartości częstotliwości ($k = 0 \dots (N-1)/2$), a rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości wynosi $\Delta f = 1/N\Delta t$.

Opóźnienie estymowane jest z wygładzonej charakterystyki fazowej WGWM $\tilde{\Phi}_{xy}(f_k)$ dla dyskretnej wartości wybranej częstotliwości f_{0k} ze wzoru¹:

$$\hat{\tau}_{0k} = -\frac{\tilde{\Phi}_{xy}(f_{0k})}{2\pi f_{0k}} \quad (2)$$

Procedury numeryczne stosowane do obliczania wartości funkcji \arctg powodują powstawanie nieciągłości w przebiegu $\tilde{\Phi}_{xy}(f_k)$ (tzw. zawijanie fazy), co ogranicza zakres użytecznych częstotliwości. Dlatego należy dążyć do wyeliminowania tego zjawiska stosując procedury rozwijania fazy. Przykładowy przebieg charakterystyki fazowej WGWM uzyskanej przed i po zastosowaniu takiej procedury przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Przebieg fazy WGWM przed (1) i po zastosowaniu (2) procedury rozwijania fazy

Fig. 1. Phase of cross-spectral density function without unwrapping (1) and after use phase unwrapping procedure (2)

Faza WGWM jest liniową funkcją częstotliwości (jeśli prędkość sygnału nie zależy od jego częstotliwości). W pracy [9] określono odchylenie standardowe estymatora opóźnienia $\hat{\tau}_{0k}$ dla liczby uśrednień N_d :

$$\sigma[\hat{\tau}_{0k}] \approx \frac{1}{2\pi f_{0k}} \left\{ \frac{1 - \gamma_{xy}^2(f_{0k})}{2N_d \gamma_{xy}^2(f_{0k})} \right\}^{1/2} \quad (3)$$

W zależności (3) występuje rzeczywista wartość funkcji koherencji $\gamma_{xy}(f)$, która jest unormowaną wzajemną gęstością widmową mocy i określa podobieństwo sygnałów w dziedzinie częstotliwości. Funkcja koherencji dla wszystkich częstotliwości spełnia warunek $0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$. W praktyce wykorzystuje się kwadrat modułu tej funkcji:

¹ W zależności od notacji przyjętej przez producentów oprogramowania, dla sytuacji gdy sygnał $x(t)$ wyprzedza $y(t)$ ($\tau_0 > 0$) uzyskuje się dodatnie lub ujemne wartości fazy WGWM. W niniejszej pracy uwzględniono ten drugi przypadek, stąd minus w zależności (2) i pochodnych.

$$\left| \gamma_{xy}(f) \right|^2 = \gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} \quad (4)$$

gdzie $G_{xx}(f)$ i $G_{yy}(f)$ są odpowiednio gęstościami widmowymi mocy sygnałów $x(t)$ i $y(t)$, a $G_{xy}(f)$ jest gęstością wzajemną.

2. Estymacja opóźnienia z fazy WGWM

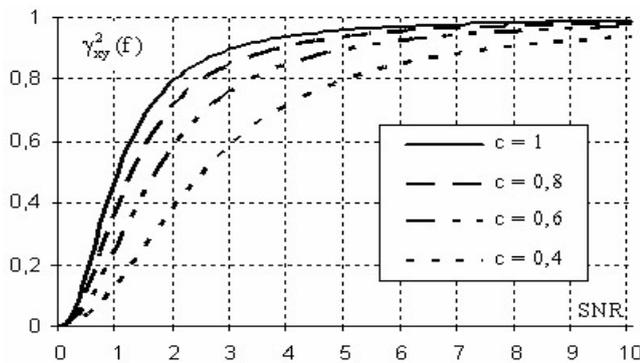
Dla modelu (1) funkcję koherencji można przedstawić wyrażeniem [1,2]:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{G_{vv}(f)}{G_{vv}(f) + G_{zz}(f)} \quad (5)$$

Przy założeniu stałych wartości gęstości widmowych mocy sygnałów w analizowanym zakresie częstotliwości i podstawieniach: $G_{vv}(f) = c^2 \cdot \sigma_x^2$, $SNR = \sigma_x / \sigma_z$ otrzymamy:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{c \cdot SNR} \right)^2} \quad (6)$$

Z wyrażenia (6) obliczyć można wartość $\gamma_{xy}(f)$ przy znanych parametrach c i SNR . Wykres zależności $\gamma_{xy}^2(f) = f(c \cdot SNR)$ dla kilku wartości współczynnika c przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Wykres zależności $\gamma_{xy}^2(f) = f(c \cdot SNR)$ dla kilku różnych wartości współczynnika c

Fig. 2. The dependence $\gamma_{xy}^2(f) = f(c \cdot SNR)$ for different values of c

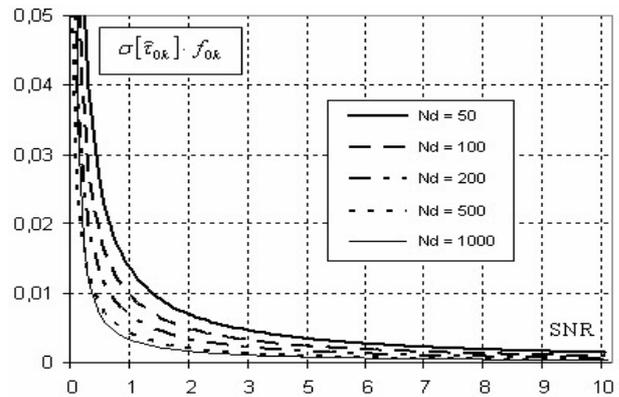
Po wstawieniu (6) do (3) otrzymuje się zależność odchylenia standardowego estymatora opóźnienia od SNR dla $f = f_{ok}$:

$$\sigma[\hat{\tau}_{ok}] \approx \frac{1}{2\sqrt{2N_d \pi f_{ok} c SNR}} \quad (7)$$

Ponieważ estymator fazy WGWM dla określonej częstotliwości f_k ma normalny rozkład prawdopodobieństwa [8], tego typu rozkład będzie miało również estymowane opóźnienie. Ze wzoru (7) wynika, że odchylenie standardowe opóźnienia przyjmuje najmniejsze wartości dla dużych N_d i SNR . Wykres zależności $\sigma[\hat{\tau}_{ok}] \cdot f_{ok} = f(SNR)$ dla kilku wartości N_d przedstawiono na rysunku 3, a wykres $\sigma[\hat{\tau}_{ok}] \cdot f_{ok} = f(N_d)$ dla różnych wartości SNR – na rys. 4. Dla obydwu przypadków przyjęto wartość współczynnika c równą 1.

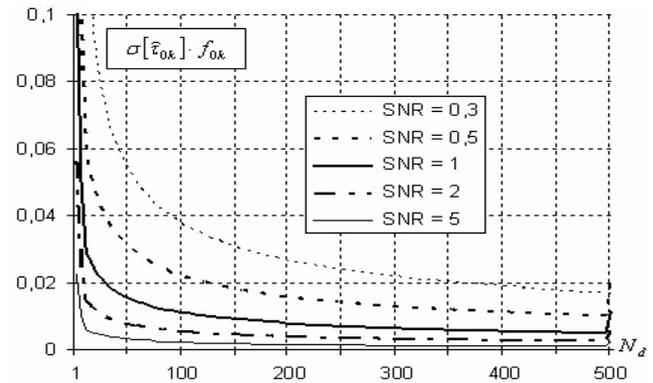
Wyznaczając odchylenie standardowe estymatora opóźnienia z zależności (3) i można określić przedział ufności dla τ_{ok} ze wzoru $\tau_{ok} = \hat{\tau}_{ok} \pm z_\alpha \sigma(\hat{\tau}_{ok})$, gdzie z_α jest wartością unormowanej zmiennej o rozkładzie normalnym dla przyjętego poziomu ufności $1-\alpha$. Dla $z_\alpha = 2$ ($1-\alpha = 0,95$) po uwzględnieniu (7) uzyskuje się przedział:

$$\tau_{ok} = \hat{\tau}_{ok} \pm \frac{1}{\sqrt{2N_d \pi f_{ok} c SNR}} \quad (8)$$



Rys. 3. Wykres zależności $\sigma[\hat{\tau}_{ok}] \cdot f_{ok} = f(SNR)$ dla kilku różnych wartości współczynnika SNR

Fig. 3. The dependence $\sigma[\hat{\tau}_{ok}] \cdot f_{ok} = f(SNR)$ for different values of SNR



Rys. 4. Wykres zależności $\sigma[\hat{\tau}_{ok}] \cdot f_{ok} = f(N_d)$ dla kilku wartości N_d

Fig. 4. The dependence $\sigma[\hat{\tau}_{ok}] \cdot f_{ok} = f(N_d)$ for different values of N_d

Ponieważ w większości przypadków spotykanych w praktyce nie jest możliwe określenie rzeczywistej wartości funkcji koherencji, wartość tę należy zastąpić estymatorem obliczonym na podstawie wygładzonych estymatorów gęstości widmowych:

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f_k) = \frac{|\tilde{G}_{xy}(f_k)|^2}{\tilde{G}_{xx}(f_k)\tilde{G}_{yy}(f_k)} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{N_d} \hat{G}_{xyi}(f_k) \right|^2}{\sum_{i=1}^{N_d} \hat{G}_{xii}(f_k) \sum_{i=1}^{N_d} \hat{G}_{yyi}(f_k)} \quad (9)$$

Dobór parametrów analizy powinien uwzględniać minimalizację błędów estymatora (9). Błędy te opisywane są złożonymi zależnościami [4]; dla $N_d > 30$ i $0 < \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$ wariancją i obciążeniem estymatora (9) można aproksymować wyrażeniami:

$$\sigma^2[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] \approx \frac{2\gamma_{xy}^2(f)}{N_d} [1 - \gamma_{xy}^2(f)]^2 \quad (10)$$

$$b[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] \approx \frac{1}{N_d} [1 - \gamma_{xy}^2(f)]^2 \quad (11)$$

Dodatkowymi przyczynami obciążenia estymatora funkcji koherencji może być występowanie innych sygnałów wejściowych skorelowanych z mierzonym sygnałem wejściowym lub szum zawarty w wynikach pomiaru sygnału wejściowego [1,3]. Błędy (10) i (11) są odwrotnie proporcjonalne do N_d , przy czym największy błąd obciążenia równy $1/N_d$ będzie miał miejsce dla koherencji bliskiej 0, a maksymalna wariancja równa $(2/3)^3/N_d$ wystąpi dla $\gamma_{xy}^2 = 1/3$. Zmniejszenie wartości tych błędów można osiągnąć przez zwiększanie liczby uśrednień N_d , co wydłuża czas analizy. Interesujące jest, że dla dużych wartości koherencji względny błąd standardowy (względne odchylenie standardowe) estymacji tej funkcji może być mniejszy niż błędy standardowe gęstości widmowych, wykorzystywanych do jej obliczania [1,2]. Z drugiej strony przy ograniczonej wartości N_{total} zwiększanie liczby uśrednień powoduje zmniejszenie liczby próbek N każdego segmentu danych ($N_{total} = NN_d$), co powoduje wzrost obciążenia estymatorów gęstości widmowych. Stąd konieczność poszukiwania kompromisu pomiędzy akceptowaną dokładnością a czasem analizy. W pracy [11] podano, że przy koherencji równej 0,7 uzyskuje się wartości względnego błędu standardowego i obciążenia estymatora tej funkcji poniżej 0,01 dla $N_d \approx 100$.

W pracach [1,2] wymienia się jeszcze inną przyczynę obciążenia estymatora (9) - może ono mieć miejsce, gdy sygnały $x(t)$ i $y(t)$ nie są mierzone w tych samych momentach czasu. Wynika to z zależności:

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) \approx (1 - \tau_0/T)^2 \gamma_{xy}^2(f) \quad (12)$$

gdzie $T = N \Delta t$. Ponieważ w praktyce $T \gg \tau_0$, wartość błędu wynikająca z (12) jest zwykle pomijalnie mała.

Przedział ufności dla opóźnienia (2) po zastąpieniu estymatorem rzeczywistej wartości funkcji koherencji w (3) można określić z zależności:

$$\tau_{0k} = \hat{\tau}_{0k} \pm z_{\alpha} \cdot \frac{1}{2\pi f_{0k}} \left\{ \frac{1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f_{0k})}{2N_d \hat{\gamma}_{xy}^2(f_{0k})} \right\}^{1/2} \quad (13)$$

Gdy nie jest wymagana znajomość opóźnienia dla konkretnej częstotliwości f_{0k} , można zastosować metodę regresji liniowej do aproksymacji charakterystyki fazowej WGWM [6,7]. Ponieważ charakterystyka $\Phi_{xy}(f)$ jest liniowa i przechodzi przez początek układu współrzędnych, opóźnienie można wyznaczyć przy wykorzystaniu współczynnika kierunkowego a linii regresji liniowej fazy WGWM względem częstotliwości:

$$\hat{\tau}_0 = -\frac{1}{2\pi} \hat{a} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sum_{k=1}^m f_k \tilde{\Phi}_{xy}(f_k)}{\sum_{k=1}^m f_k^2} \quad (14)$$

gdzie m jest liczbą par wartości fazy i częstotliwości stosowaną do wyznaczania prostej regresji. Otrzymana na podstawie (14) estymata opóźnienia jest liczbą losową, więc dla kolejnych eksperymentów uzyska się inne wartości, gdyż proste regresji będą przebiegały nieco inaczej. Estymator odchylenia standardowego opóźnienia (14) będzie miał postać:

$$\hat{\sigma}[\hat{\tau}_0] \approx \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2N_d} \sum_{k=1}^m \frac{1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f_k)}{f_k^2 \hat{\gamma}_{xy}^2(f_k)} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

i wymaga obliczenia m estymat funkcji koherencji według (9). Eksperymentalne odchylenie standardowe estymatora opóźnienia (14) można obliczyć z zależności:

$$s[\hat{\tau}_0] = \left\{ \frac{1}{4\pi^2(m-1) \sum_{k=1}^m f_k^2} \left[\sum_{k=1}^m \tilde{\Phi}_{xy}^2(f_k) - \frac{\left[\sum_{k=1}^m f_k \tilde{\Phi}_{xy}(f_k) \right]^2}{\sum_{k=1}^m f_k^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (16)$$

Do określania przedziału ufności dla opóźnienia wyznaczanego przy zastosowaniu aproksymacji liniowej stosuje się rozkład Studenta.

3. Podsumowanie

W artykule przedstawiono niektóre problemy związane z estymacją opóźnienia sygnałów losowych, wyznaczanego z fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy. Podano zależności pozwalające na wyznaczenie odchylen standardowych i omówiono określanie przedziałów ufności dla opóźnienia przy znanej i nieznannej rzeczywistej wartości funkcji koherencji. Rozważono wyznaczanie opóźnienia dla jednej określonej wartości częstotliwości (metoda „jednopunktowa”) oraz zastosowanie liniowej aproksymacji charakterystyki fazowej WGWM w celu zmniejszenia błędów losowych. Opisane w [7] badania symulacyjne wykazały, że zastosowanie aproksymacji liniowej daje około dziesięciokrotne zmniejszenie eksperymentalnego odchylenia standardowego opóźnienia w stosunku do metody „jednopunktowej”. Zwrócono uwagę na dobór parametrów analizy (zwłaszcza liczby uśrednień) ze względu na konieczność minimalizacji błędów estymacji funkcji koherencji i opóźnienia.

W pracy stosowano terminologię przyjętą w teorii estymacji, gdyż rozważano tylko błędy statystyczne, szczególnie istotne w przypadku analizy sygnałów losowych.

4. Literatura

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G.: Random data - analysis and measurement procedures. John Wiley, New York 2000.
- [2] Bendat J.S., Piersol A.G.: Engineering applications of correlation and spectral analysis. John Wiley, New York 1993.
- [3] Bendat J.S., Piersol A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.
- [4] Carter C.G.: Coherence and time delay estimation. Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 2, February 1987, 236-255.
- [5] Dwyer A.: A survey of techniques for the estimation and compensation of processes with time delay. Technical Report, Dublin Institute of Technology 2000.
- [6] Piersol A. G.: Time delay estimation using phase data. IEEE Transactions on ASSP, Vol. 29, No. 3, June 1981, 471-477.
- [7] Hanus R.: Statystyczne błędy estymacji czasu opóźnienia przy zastosowaniu fazy wzajemnej gęstości widmowej mocy. Pomiary Automatyka Kontrola 12/2006, 10-13.
- [8] Schulz M., Statterger K.: Spectral analysis of unevenly spaced paleoclimatic time series. Computers & Geosciences Vol. 23, No. 9, 1997, 929-945.
- [9] Hanus R.: Statistical error analysis of time delay measurement by using phase of cross-spectral density function. Systems Analysis Modelling Simulation Vol. 43, No. 8, 2003, 993-998.
- [10] Lindermann M., Raethjen J., Timmer J., et al.: Delay estimation for cortico-peripheral relations. Journal of Neuroscience Methods 111, (2001), 127-139.
- [11] Wang S.Y., Xugang L., Yianni J. et al. Optimising coherence estimation to assess the functional correlation of tremor-related activity between the subthalamic nucleus and the forearm muscles. Journal of Neuroscience Methods 136 (2004), 197-205.