Anna Stankiewicz
Katedra Podstaw Techniki
Akademia Rolnicza w Lublinie

IDENTYFIKACJA ZMIENNEGO W CZASIE WSPÓŁCZYNNIKA POISSONA LEPKOSPRĘŻYSTYCH MATERIAŁÓW BIOLOGICZNYCH NA PODSTAWIE TESTU PEŁZANIA

Streszczenie

W pracy, opierając się na całkowych równaniach konstytutywnych, wyprowadzono wzór określający zależność pomiędzy zmiennym w czasie współczynnikiem Poissona materiału liniowo lepkosprężystego a funkcjami pełzania w stanach jednoosiowego odkształcenia i jednoosiowego naprężenia. Opracowano algorytm identyfikacji zmiennego w czasie współczynnika Poissona na podstawie dyskretnych pomiarów jednoosiowych funkcji pełzania, uzyskanych eksperymentalnie dla próbki swobodnej i próbki ograniczonej w podwójnym teście pełzania.

Słowa kluczowe: lepkosprężystość, jednoosiowy test pełzania, funkcja pełzania, współczynnik Poissona, algorytm identyfikacji

Wykaz oznaczeń

$v(t)$ – współczynnik Poissona,-,

$\sigma_{ij}(t)$ – tensor naprężenia, *MPa*,

$\varepsilon_{ij}(t)$ – tensor odkształcenia,-,

δ_{ij} – delta Kroneckera (tensor jednostkowy),

$x(s)$, $Y(s)$ – transformaty Laplace'a funkcji $x(t)$, $Y(t)$,

$\phi(t) * d\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(t-\tau)\frac{\partial\psi(\tau)}{\partial\tau}d\tau$ – całka splotowa Stieltjesa funkcji $\phi(t)$ i $\psi(t)$.

Wprowadzenie

Współczesne metody wykorzystywane w obliczeniach inżynierskich (FEM, BEM) wymagają szczegółowej wiedzy o zjawiskach dynamicznych zachodzących w materiałach. Problemy modelowania materiałów pochodzenia roślinne-go są zazwyczaj rozwiązywane w dziedzinie czasu, ich mechaniczne własności dynamiczne mogą więc być skutecznie opisywane przez modele reologiczne [De Baerdemeaker, Segerlind 1976, Bzowska-Bakalarz 1994, Rao 1999, Fincan, Dejmek 2003]. Modele reologiczne, pozwalające badać i przewidywać zachowania materiałów biologicznych pod wpływem różnego typu obciążeń, są wykorzystywane w obliczeniach inżynierskich przy projektowaniu maszyn przetwórstwa rolno-spożywczego, urządzeń do zbioru, składowania, przechowywania, rozdrabniania i pakowania. Przykładowo, dobór mocy różnego typu mieszadeł wymaga wiedzy o lepkości przetwarzanych materiałów; znajomość lepkosprężystych własności surowca ułatwia także projektowanie przebiegu procesu ekstruzji. Podstawowe znaczenie wśród wielkości, opisujących własności lepkosprężyste materiałów biologicznych, mają te wielkości, które są wykorzystywane do obliczeń inżynierskich: współczynnik lepkości, moduł Yunga, moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego oraz współczynnik Poissona. Z reguły zależą one od czasu, często także od temperatury. Część z nich jest dostępna pomiarowo, pozostałe, tak jak współczynnik Poissona, nie są wprost dostępne pomiarowo, muszą więc być wyznaczane w oparciu o inne charakterystyki uzyskane doświadczalnie.

Hughes i Segerlind [1972] opracowali metodę wyznaczania stałego współczynnika Poissona na podstawie pomiarów modułów sprężystości w warunkach jednoosiowych stanów naprężenia i odkształcenia, którą De Baerdemeaker i Segerlind [1976] uogólnili do wyznaczania zmiennego w czasie współczynnika Poissona na podstawie pomiarów jednosiowych funkcji relaksacji próbki swobodnej i próbki ściskanej w cylindrze. Metoda ta jest stosowana także współcześnie [Gołacki, Stankiewicz 2002, Fincan, Dejmek 2003]. Znane są także prace poświęcone wyznaczaniu współczynnika Poissona na podstawie danych zgromadzonych w wyniku testu, w którym materiał poddawany jest odkształceniom oscylacyjnym [Pritz 2000]. Brak jest natomiast metod bazujących na teście pełzania, który szczególnie dla materiałów roślinnych jest, obok testu relaksacji, podstawowym źródłem informacji o ich lepkosprężystych własnościach mechanicznych [Bzowska-Bakalarz 1994, Rao 1999].

Cel i zakres pracy

Celem pracy było opracowanie algorytmu identyfikacji zmiennego w czasie współczynnika Poissona materiałów liniowo lepkosprężystych na podstawie uzyskanych eksperymentalnie czasowych przebiegów funkcji pełzania badanego materiału. Współczynnik Poissona jest zdefiniowany jako stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia osiowego próbki (ciała) poddawanego jednoosiowemu naprężeniu. Oznacza to, iż niesie on informację o reakcji materiału w kierunku prostopadłym do osi przyłożonego naprężenia. Wychodząc z równań konstytutywnych opisujących odkształcenia i naprężenia w materiałach lepkosprężystych wyprowadzono równanie wiążące zmienny w czasie współczynnik Poissona materiału liniowo lepkosprężystego i funkcje pełzania w stanach jednoosiowego odkształcenia i jednoosiowego naprężenia. Następnie przedstawiono algorytm identyfikacji współczynnika Poissona na podstawie dyskretnych pomiarów funkcji pełzania w walcowych próbkach badanego materiału w stanach jednoosiowego odkształcenia i jednoosiowego naprężenia.

Równania konstytutywne i współczynnik Poissona

Własności mechaniczne materiałów lepkosprężystych można także, przez analogię do materiałów sprężystych, scharakteryzować za pomocą zmiennych w czasie: współczynnika Poissona i modułu sprężystości Younga. Dla izotro-powych materiałów sprężystych zachodzi dla $t \geq 0$ znane równanie [Findley i in. 1976]

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1+v}{E}\sigma_{ij}(t) - \frac{v}{E}\delta_{ij}\,\sigma_{kk}(t) \tag{1}$$

gdzie E i v oznaczają, odpowiednio, moduł Younga i współczynnik Poissona. Wprowadzając zmienne w czasie: moduł $E(t)$ oraz współczynnik Poissona $v(t)$ i stosując zasadę analogii pomiędzy liniowymi zjawiskami sprężystymi i lepkosprężystymi [Christensen 1971], na podstawie równania (1) uzyskujemy całkowe równanie konstytutywne postaci

$$E(t) * d\varepsilon_{ij}(t) = [1 + v(t)] * d\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\, v(t) * d\sigma_{kk}(t) \tag{2}$$

gdzie $E(t) = 0$ i $v(t) = 0$ dla $-\infty < t < 0$.

Rozważmy stan jednoosiowego naprężenia zakładając, że $\sigma_{11} \neq 0$, natomiast $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Na podstawie równania (2) otrzymujemy

$$E(t) * d\varepsilon_{11}(t) = [1 + v(t)] * d\sigma_{11}(t) - v(t) * d\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}(t) \tag{3}$$

Wobec tego dla materiału lepkosprężystego moduł $E(t)$ jest tożsamy z funkcją relaksacji w stanie jednoosiowego naprężenia. Równocześnie w stanie jednoosiowego naprężenia zachodzi równanie całkowe

$$\varepsilon_{11}(t) = J_E(t) * d\sigma_{11}(t) \tag{4}$$

gdzie $J_E(t)$ jest funkcją pełzania w stanie jednoosiowego naprężenia. Poddając równania (3) i (4) obustronnie przekształceniu Laplace'a, na mocy twierdzenia Borela o transformacie splotu oraz twierdzenia o różniczkowaniu w dziedzinie oryginału przekształcenia Laplace'a, otrzymujemy układ równań

$$s\,E(s)\varepsilon_{11}(s) = \sigma_{11}(s) \quad \text{i} \quad \varepsilon_{11}(s) = s\,J_E(s)\sigma_{11}(s)$$

Stąd

$$J_E(s)\,E(s) = 1/s^2 \tag{5}$$

Rozważmy teraz stan jednoosiowego odkształcenia zakładając, że $\varepsilon_{11} \neq 0$, zaś $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$. Na podstawie równania (2) mamy

$$E(t) * d\varepsilon_{11}(t) = [1 + v(t)] * d\sigma_{11}(t) - v(t) * d\,[\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) + \sigma_{33}(t)] \tag{6}$$

$$0 = [1 + v(t)] * d\sigma_{ii}(t) - v(t) * d\,[\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) + \sigma_{33}(t)],\ i = 2{,}3 \tag{7}$$

Ponieważ $\sigma_{22}(t) = \sigma_{33}(t)$ dla każdego $t \geq 0$ (materiał izotropowy), z układu równań (6)-(7) wynikają równości

$$E(t) * d\varepsilon_{11}(t) = \sigma_{11}(t) - 2\,v(t) * d\sigma_{22}(t) \tag{8}$$

$$0 = \sigma_{22}(t) - v(t) * d[\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t)] \tag{9}$$

Równocześnie w stanie jednoosiowego odkształcenia spełnione jest równanie

$$\varepsilon_{11}(t) = J_X(t) * d\sigma_{11}(t) \tag{10}$$

gdzie $J_X(t)$ jest funkcją pełzania próbki w stanie jednoosiowego odkształcenia. Poddając równania (8)-(10) obustronnie przekształceniu Laplace'a otrzymujemy układ równań algebraicznych

$$s\,E(s)\varepsilon_{11}(s) = \sigma_{11}(s) - 2\,s\,v(s)\sigma_{22}(s) \tag{11}$$

$$0 = \sigma_{22}(s) - s\,v(s)[\sigma_{11}(s) + \sigma_{22}(s)] \tag{12}$$

$$\varepsilon_{11}(s) = s\,J_X(s)\sigma_{11}(s) \tag{13}$$

Eliminując kolejno $\varepsilon_{11}(s)$, $\sigma_{22}(s)$, $\sigma_{11}(s)$ oraz $E(s)$ można pokazać, że rozwiązanie układu równań (5), (11)-(13) względem $v(s)$ sprowadza się do rozwiązania kwadratowego równania funkcyjnego

$$2s^2\,v(s)^2 + s\,v(s)[1 - J_X(s)/J_E(s)] + [J_X(s)/J_E(s) - 1] = 0 \tag{14}$$

Ponieważ $J_X(t) < J_E(t)$, łatwo sprawdzić, iż warunek fizykalnej realizowalności $0 < \nu(t) < 1$ spełnia tylko jeden z pierwiastków równania (14), dany wzorem

$$\nu(s) = \frac{1}{4s}\left\{[J_X(s)/J_E(s) - 1] + \sqrt{[1 - J_X(s)/J_E(s)]^2 + 8[1 - J_X(s)/J_E(s)]}\right\} \quad (15)$$

Zmienny w czasie współczynnik Poissona materiału liniowo lepkosprężystego można więc wyznaczyć jako oryginał transformaty (15) stosując znane numeryczne techniki odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Przegląd starszych metod podaje praca [Davies, Martin 1979], kompleksowy przegląd najnowszych metod można uzyskać na stronie *MathSciNet* American Mathematical Society (*www.ams.org/mathscinet*), po wpisaniu słów kluczowych "*Laplace transform inversion*". Można także pokazać, że gdy funkcje pełzania opisywane są kilkuparametrowymi modelami, to współczynnik Poissona można wyznaczyć w oparciu o dokładne formuły analityczne [Stankiewicz 2005].

Algorytm identyfikacji

Identyfikacja współczynnika Poissona polega na wyznaczeniu modelu matematycznego opisującego funkcję $\nu(t)$ na podstawie danych pomiarowych. Wobec zależności danej wzorem (15) zadanie identyfikacji zmiennego w czasie współczynnika Poissona sprowadza się do identyfikacji funkcji pełzania $J_E(t)$ i $J_X(t)$ na podstawie danych pomiarowych, a następnie wyznaczenia oryginału transformaty $\nu(s)$ (15). Jednoosiowe funkcje pełzania $J_E(t)$ i $J_X(t)$ można wyznaczyć eksperymentalnie w dwu niezależnych testach pełzania przeprowadzonych dla dwu próbek z tego samego materiału. Pierwsza próbka ściskana jest (z prędkością rzędu 3.33 $\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$) między dwiema równoległymi płytkami w warunkach stanu jednoosiowego naprężenia [Hughes, Segerlind 1972]. Po uzyskaniu założonego stałego naprężenia (rzędu 1.2 MPa) rejestruje się przebieg odkształcenia w czasie [Rao 1999]. Druga próbka umieszczana jest w cylindrze uniemożliwiającym jej boczne odkształcenie i ściskana jest poprzez przesunięcie tłoka w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia.

Załóżmy, że przeprowadzono eksperyment dyskretny, którego rezultatem są zbiory pomiarów $\{J_{E,eksp}(t_i)\}$ i $\{J_{X,eksp}(t_i)\}$ funkcji pełzania dla $i = 1, \ldots, N$.

Powszechnie przyjętym sposobem opisu zjawiska pełzania zachodzącego w materiale lepkosprężystym jest model Kelvina [Christensen 1971, Rao 1999]

$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^{k} J_i \left(1 - e^{-t/\lambda_i}\right) \quad (17a)$$

lub model Bürgersa postaci [Christensen 1971, Rao 1999]:

$$J(t) = J_0 + t/\eta_o + \sum_{i=1}^{k} J_i \left(1 - e^{-t/\lambda_i}\right) \tag{17b}$$

gdzie $J_i = 1/E_i$, E_i to moduły sprężystości, $\lambda_i = \eta_i / E_i$ oznaczają czasy retardacji, natomiast η_i są współczynnikami lepkości dynamicznej.

Współczynniki modeli (17) będziemy dobierać tak, aby modele te przybliżały wyniki eksperymentu jak najlepiej w sensie najmniejszej sumy kwadratów

$$\sum_{i=1}^{N} \left[J_{E,eksp}(t_i) - J_{E,model}(t_i)\right]^2 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{N} \left[J_{X,eksp}(t_i) - J_{X,model}(t_i)\right]^2 \tag{18}$$

Zadania minimalizacji wskaźników (18) są nieliniowymi problemami najmniejszych kwadratów. Wykorzystując znane twierdzenie Kammlera [1979] o średniokwadratowej aproksymacji danych sumą funkcji wykładniczych, łatwo pokazać, że jeśli ciągi dodatnich danych pomiarowych $\{J_{E,eksp}(t_i)\}$ i $\{J_{X,eksp}(t_i)\}$ są monotonicznie rosnące i ograniczone z góry, to optymalne modele postaci (17) istnieją i zarówno parametry J_{ji} oraz η_o jak i czasy retardacji λ_{ji} są dodatnie. Ponieważ w przypadku modeli (17) zarówno gradienty jak i hesjany kwadratowych wskaźników jakości (18) dane są prostymi wzorami analitycznymi, do ich minimalizacji można zastosować metodą Levenberga-Marquardta, która gwarantuje bardzo dobre rezultaty nie tylko w przypadku pomiarów bezszumowych ale także przy niewielkich zakłóceniach. Łatwo także zauważyć, że dla funkcji pełzania postaci (17) oryginały Laplace'a pierwszych dwu składników transformaty $v(s)$ (15) są kombinacjami liniowymi funkcji stałej oraz funkcji wykładniczych. Wybraną technikę numeryczną odwrotnego przekształcenia Laplace'a należy więc zastosować tylko do trzeciego składnika sumy w (15).

Współczynnik Poissona można wyznaczyć w oparciu o podwójny test pełzania stosując następującą procedurę:

1. Przeprowadź eksperyment i zgromadź pomiary jednosiowych funkcji pełzania próbki swobodnej $\{J_{E,eksp}(t_i)\}$ i ograniczonej $\{J_{X,eksp}(t_i)\}$.
2. Wyznacz modele (17) optymalne w sensie najmniejszej sumy kwadratów.
3. Wyznacz zmienny w czasie współczynnik Poissona $v(t)$ jako oryginał transformaty $v(s)$ (15) stosując wybraną technikę numeryczną odwrotnego przekształcenia Laplace'a.

Uwagi końcowe

Przedstawiony algorytm wyznaczania zmiennego w czasie współczynnika Poissona jest uniwersalnym i łatwym w implementacji narzędziem, w którym wszystkie obliczenia mogą być zrealizowane z zastosowaniem znanych, standardowych technik numerycznych. Efektywność metody zależy przede wszystkim od dokładności i stabilności metody numerycznej odwrotnego przekształcenia Laplace'a zastosowanej do wyznaczenia oryginału z $v(s)$ (15). Pomimo, że procedura identyfikacji została opracowana z myślą o materiałach biologicznych, może ona znaleźć zastosowanie do badania własności dowolnych ośrodków liniowo lepkosprężystych. Opracowany algorytm jest oczywiście dualny do, wykorzystującego jednoosiowe funkcje relaksacji, algorytmu De Baerdemeakera i Segerlinda, jednak bazujące na równaniach konstytutywnych wyprowadzenie wzoru (15) różni się od zastosowanego przez nich uzasadnienia.

Bibliografia

Bzowska-Bakalarz M. 1994. Właściwości mechaniczne korzeni buraków cukrowych. Rozprawy Naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie, 166.

Christensen R. M. 1971. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. Academic Press, New York.

Davies B., Martin B. 1979. Numerical inversion of the Laplace transform: A survey and comparison of methods. J. Comput. Phys. 33:1-32.

De Baerdemeaker J. G., Segerlind L. J. 1976. Determination of the viscoelastic properties of the apple flesh. Transaction of the ASAE 19: 346-353.

Fincan M., Dejmek P. 2003. Efect of osmotic pretreatment and pulsed electric field on the viscoelastic properties of potato tissue. J. Food Eng. 59: 169–175.

Gołacki K., Stankiewicz A. 2002. Algorytm obliczeniowy wyznaczania współczynnika Poissona lepkosprężystego materiału roślinnego. Acta Agrophysica 78: 51-61.

Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. 1976. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity. North-Holland, Amsterdam New York Oxford.

Hughes H., Segerlind L. J. 1972. A rapid mechanical method for determining Poisson's ratio of biological materials. ASAE Paper No. 72-310, ASAE, St. Joseph, MI 49085.

Kammler D. W. 1979. Least squares approximation of completely monotonic functions by sums of exponentials. SIAM J. Numer. Anal. 16(5): 801-818

Pritz T. 2000. Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials. Applied Acoustics 60: 279-292.

Rao M. A.1999. Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications. Aspen Publishers, Inc., Gaithersburg, Maryland.

Stankiewicz A. 2005. Algorytm identyfikacji zmiennego w czasie współczynnika Poissona lepkosprężystych materiałów roślinnych opisanych modelem Kelvina. Skierowano do Inżynierii Rolniczej.

IDENTIFICATION OF TIME-DEPENDENT POISSON'S RATIO OF PLANT VISCOELASTIC MATERIALS BASED ON UNIAXIAL CREEP EXPERIMENT

Summary

The need for knowledge of time-dependent viscoelastic material functions has been growing with the increased use of an accurate engineering methods for rigorous predictions of the plant materials behaviour, such as the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM). Essentially, only linear viscoelasticity is considered for which the correspondence principle applies. A new method for computing the time-dependent Poisson's ratio of linear viscoelastic materials, using discrete time-measurements of the uniaxial creep compliance of unconfined and a laterally constrained cylindrical specimens of the material obtained in double creep experiment, is developed on the basis of the constitutive convolution integral equations. The approach proposed solves the problem in Laplace transform domain and relies on numerical inversion for the determination for the time-dependent Poisson's ratio. The method combines effectiveness and accuracy and is general enough to cover both viscoelastic solids and liquids.

Key words: viscoelasticity, uniaxial creep test, creep compliance, Poisson's ratio, identification algorithm