Joanna KRAKOWCZYK
COIG S.A., Katowice
joanna.krakowczyk@coig.pl

Marcin LAWNIK
Politechnika Śląska, Gliwice
Wydział Matematyki Stosowanej
marcin.lawnik@polsl.pl

WYKORZYSTANIE Z-LICZB WE WSPOMAGANIU PODEJMOWANIA DECYZJI

Streszczenie. W artykule zaprezentowano nowy sposób wykorzystujący Z-liczby do wspomagania podejmowania decyzji w warunkach niepewności. W przedstawionym podejściu elementy macierzy podejmowania decyzji są Z-liczbami, czyli parami liczb rozmytych $(A;R)$, z których pierwsza A stanowi ograniczenie pewnej zmiennej rzeczywistej x, natomiast druga składowa R określa wiarygodność tego ograniczenia. Algorytm jest oparty na zamianie Z-liczby na liczbę rozmytą, a następnie korzysta z klasycznego podejścia Bellmana-Zadeha do podjęcia decyzji rozmytej. Opisaną procedurę zobrazowano przykładem numerycznym.

Słowa kluczowe: Z-liczby, liczby rozmyte, wspomaganie decyzji

APPLICATIONS OF Z-NUMBERS IN DECISION MAKING

Abstract. The article presents a new way of using Z-numbers to support decision-making under uncertainty. In the presented approach, elements of the decision matrix are Z-numbers, i.e. pairs of fuzzy numbers $(A;R)$, which of the first component A constitutes a limitation of a certain real variable x, while the second component R defines the reliability of this limitation. The algorithm is based on converting the Z-number to a fuzzy number, and then uses classical Bellman-Zadeh's approach to making a fuzzy decision. The described procedure is illustrated by a numerical example.

Keywords: Z-numbers, fuzzy numbers, decision support

1. Wstęp

Systemy wspomagania decyzji w ostatnich latach stają się coraz popularniejsze. Szczególnie zauważalne jest to w takich branżach jak business intelligence [3, 18] czy medycyna [6, 13, 14]. Jednak nie zawsze można precyzyjnie określić dokładne wartości dla przyjętych kryteriów oceny. W takiej sytuacji pomocne stają się liczby rozmyte, które z powodzeniem wykorzystywane są w takiego typu zagadnieniach [4, 12, 17, 19]. Jednakże takie podejście również może okazać się niewystarczające. W warunkach niepewności modelowanie wartości kryteriów ocen za pomocą liczb rozmytych wymaga od decydenta dokładnego określenia tzw. funkcji przynależności dla każdej liczby rozmytej. Z kolei taki problem może nie być łatwy do rozwiązania, a czasami nawet niemożliwy z uwagi na charakter rozważanych zagadnień. Aby móc sobie poradzić z takiego typu zadaniami istnieje potrzeba znalezienia innego sposobu modelowania wiedzy w warunkach niepewności. Takim nowym podejściem jest Z-liczba.

W [22] Zadeh przedstawił koncepcję Z-liczby jako pary liczb rozmytych, z których pierwsza pełni rolę ograniczenia rozmytego dla pewnej zmiennej rzeczywistej, natomiast druga jest stopniem wiarygodności tego ograniczenia. W ostatnim czasie Z-liczby cieszą się coraz większym zainteresowaniem badaczy i szczególnie zauważalne są ich zastosowania w systemach wspomagania decyzji [m.in. 8, 9, 15, 20]. Powodem tego jest fakt, że eliminują one pewne wady liczb rozmytych, które to z kolei mają już ugruntowaną pozycje we wyżej wspomnianych systemach [16].

Osobnym problemem jest sposób, w jaki można wykorzystać Z-liczby do matematycznego modelowania wiedzy w warunkach niepewności. Jednym z pierwszych rozwiązań tego problemu jest praca [10], gdzie na bazie wiedzy eksperta w danym zagadnieniu określana jest Z-liczba. Procedura ta polega na uzyskaniu od eksperta odpowiedzi na szereg pytań, a następnie zagregowaniu otrzymanych odpowiedzi do postaci Z-liczby.

Ponadto, w literaturze fachowej można znaleźć publikacje związane z Z-liczbami dotyczące m.in. operacji matematycznych na nich [1], programowania matematycznego opartego o Z-liczby [2] czy zamiany na liczby rozmyte [11, 21].

Powyższy krótki przegląd literatury pokazuje, że Z-liczby obok liczb rozmytych mogą być z powodzeniem stosowane w procesie podejmowania decyzji. Celem tego artykułu jest przedstawienie algorytmu wspomagania podejmowania decyzji opartego o Z-liczby. Artykuł składa się z następujących sekcji: Wstępu, Podstaw matematycznych, Proponowanej metody, Przykładu numerycznego, Wniosków i Bibliografii.

2. Podstawy matematyczne. Sformułowanie problemu i definicje

Wielokryterialne zadanie podejmowania określonej decyzji z m wariantami decyzyjnymi $O_i\,(i=1,\ldots,m)$ i n kryteriami oceny $K_j\,(j=1,\ldots,n)$ może zostać określone przez tzw. macierz podejmowania decyzji $D=\lfloor x_{ij}\rfloor$, gdzie x_{ij} reprezentuje j-te kryterium oceny w i-tym wariancie decyzyjnym. Wspomniane wyżej kryteria oceny K_j możemy podzielić na kryteria oceny korzyści i kryteria oceny kosztów. W kryterium korzyści, im większa wartość x_{ij}, tym jest ono „lepsze" dla danego wariantu decyzyjnego, z kolei w kryterium kosztów, im mniejsza wartość x_{ij}, tym lepiej. Powyższe zadanie jest uproszczonym wariantem zadania podejmowania decyzji z uwagi na założenie, że wszystkie kryteria oceny są tak samo istotne dla decydenta.

Kryteria ocen kosztów jak i korzyści mogą zostać podane w postaci rozmytej, tzn. jako liczby rozmyte bądź Z-liczby.

Pojęcie liczby rozmytej bazuje na ogólniejszym jakim jest zbiór rozmyty [23]:

Definicja 1 Niech X jest pewną zadaną przestrzenią. Wtedy zbiorem rozmytym A nazywamy parę $(x,\mu(x))$, gdzie $\mu(x)$ jest nazywane funkcją przynależności zbioru A i określa stopień, z jakim element $x\in X$ należy do zbioru A.

Natomiast liczbę rozmytą definiujemy następująco [16]:

Definicja 2 Liczbą rozmytą nazywamy zbiór rozmyty A określony na przestrzeni $X=R$, którego funkcja przynależności $\mu(x):R\to\langle 0,1\rangle$ spełnia następujące warunki:

1) $\sup\limits_{x\in R}\mu(x)=1$ (tzn. zbiór A jest normalny)

2) $\forall x_1,x_2\in X\ \forall\lambda\in\langle 0,1\rangle\ \ \mu(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\min(\mu(x_1),\mu(x_2))$ (tzn. zbiór rozmyty A jest wypukły)

3) funkcja przynależności $\mu(x)$ jest przedziałami ciągła.

Kryteria oceny mogą być również Z-liczbami, które można zdefiniować następująco [22]:

Definicja 3 Z-liczbą nazywamy parę liczb rozmytych $(A;R)$, gdzie liczba A jest ograniczeniem rozmytym pewnej zmiennej rzeczywistej x, natomiast R określa jej stopień wiarygodności.

Zarówno liczby rozmyte jak i Z-liczby można wyrazić w zmiennych lingwistycznych. Wtedy zmienna lingwistyczna *wolno* jest przykładem liczby rozmytej, natomiast (*wolno; pewne*) jest przykładem Z-liczby. Zmienne lingwistyczne można przedstawić wzorami matematycznymi, definiując ich funkcje przynależności.

Jedną z najczęściej używanych funkcji przynależności jest funkcja trójkątna, którą możemy wyrazić za pomocą wzoru:

$$\mu(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b<x\le c\\ 0, & x>c\end{cases}, \tag{1}$$

gdzie $a,b,c\in R$ są parametrami zachowującymi zależność $a<b<c$. Liczbę rozmytą trójkątną w dalszej części tego artykułu będziemy oznaczać przez $(a,\,b,\,c)$.

Najprostszym sposobem wykonywania działań na Z-liczbach jest ich zamiana na liczby rozmyte i stosowanie znanych metod obliczeniowych. Jednym z algorytmów, który przekształca Z-liczby na liczby rozmyte, jest algorytm z pracy [11], gdzie wykorzystano w tym celu pojęcie rozmytej wartości oczekiwanej danej wzorem:

$$E(x)=\int_X x\mu(x)dx. \tag{2}$$

W pracy tej pokazano, że zbiór rozmyty

$$Z_1^\alpha=(x,\alpha\mu(x)), \tag{3}$$

gdzie $x\in X$ i $\alpha\in\langle 0,1\rangle$, ma taką samą wartość oczekiwaną (2) jak zbiór

$$Z_2^\alpha=\left(x,\mu\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)\right), \tag{4}$$

gdzie $x\in\sqrt{\alpha}X$.

W [11] przedstawiono również sposób zamiany Z-liczby na liczbę rozmytą, wykorzystując zależności (2) - (4). Polega on na dodaniu wiarygodności rozmytej R do ograniczenia rozmytego A za pomocą defuzyfikacji liczby R. Otrzymana liczba rozmyta jest postaci:

$$Z=(x,\alpha\mu_A(x)), \tag{5}$$

gdzie

$$\alpha=\frac{\int x\mu_R(x)}{\int \mu_R(x)}dx. \tag{6}$$

Podejmując decyzję w środowisku rozmytym, można postępować zgodnie z metodą podaną przez Bellmana i Zadeha w [5]:
jeśli w danym wariancie decyzyjnym jest p kryteriów kosztów (nazywanych czasami ograniczeniami rozmytymi) $KC_j(j=1,\ldots,p)$ i $n-p$ kryteriów korzyści (nazywanych czasami celami rozmytymi) $KB_j(j=p+1,\ldots,n)$, to decyzja rozmyta D spełnia zależność:

$$D = KC_1 \cap \ldots \cap KC_p \cap KB_{p+1} \cap \ldots \cap KB_n\,, \tag{7}$$

gdzie $\cap$ oznacza część wspólną zbiorów rozmytych rozumianą następująco:
jeśli A i B są zbiorami rozmytymi, to zbiór rozmyty będący ich częścią wspólną $C = A \cap B$ ma funkcję przynależności określoną zależnością:

$$\mu(x) = \min_{x \in X}(\mu_A(x), \mu_B(x))\,. \tag{8}$$

Końcowa nierozmyta wartość x_i^* decyzji rozmytej dla wariantu decyzyjnego O_i spełnia zależności:

$$\mu_{O_i}(x) = \min_{x \in X}\left(\mu_{KC_1}(x), \ldots, \mu_{KC_p}(x), \mu_{KB_{p+1}}(x), \ldots, \mu_{KB_n}(x)\right), \tag{9}$$

$$x_i^* = \max_{x \in X}\left(\mu_{O_i}(x)\right), \tag{10}$$

Jeśli kryteria oceny K_j są określone na różnych nośnikach (w szczególności rozłącznych) przestrzeni X, to warto poddać je normalizacji, tj. określić wszystkie nośniki na przedziale jednostkowym. W przypadku liczby rozmytej trójkątnej proces normalizacji wygląda następująco [7]:

- gdy j-te kryterium oceny jest kryterium korzyści:

$$n_{ij} = \left(\frac{x_{ij1}}{M}, \frac{x_{ij2}}{M}, \frac{x_{ij3}}{M}\right), \tag{11}$$

- gdy j-te kryterium oceny jest kryterium kosztów:

$$n_{ij} = \left(\frac{M - x_{ij3}}{M}, \frac{M - x_{ij2}}{M}, \frac{M - x_{ij1}}{M}\right), \tag{12}$$

gdzie $M = \max_i x_{ij3}$, a n_{ij} oznacza znormalizowaną wartość x_{ij} z macierzy podejmowania decyzji D.

3. Proponowana metoda

Ze względu na fakt, że liczby rozmyte są często wykorzystywane we wspomaganiu podejmowania decyzji, proponowana metoda będzie polegała na transformacji Z-liczb na liczby rozmyte i użycie powszechnie stosowanych procedur obliczeniowych.

Proponowany proces podejmowania decyzji z wykorzystaniem Z-liczb można określić następującą procedurą:

1) Ustalenie sytuacji decyzyjnej, w tym opis za pomocą Z-liczb poszczególnych kryteriów ocen korzyści i kosztów w danych wariantach decyzyjnych.
2) Określenie macierzy podejmowania decyzji, uzupełniając jej elementy Z-liczbami w postaci zmiennych lingwistycznych podanymi przez decydenta.
3) Przekształcenie zmiennych lingwistycznych Z-liczb na wartości numeryczne.
4) Znormalizowanie w ramach każdego z kryteriów ocen Z-liczb w macierzy podejmowania decyzji za pomocą wzorów (11) - (12).
5) Przekształcenie Z-liczb na liczby rozmyte, wykorzystując (5) i (6).
6) Obliczenie końcowej wartości dla każdego wariantu decyzyjnego, korzystając z klasycznego podejścia (7) - (10).

Powyższy algorytm wykorzystuje, przedstawione w sekcji Podstawy matematyczne, przytoczone operacje na liczbach rozmytych i Z-liczbach. Jego niewątpliwą zaletą jest prostota wynikająca chociażby z zamiany Z-liczby na liczbę rozmytą, a następnie zastosowanie podejścia Bellmana-Zadeha do wyznaczenia decyzji rozmytej. Należy jednak zwrócić uwagę, że zamieniając Z-liczbę na liczbę rozmytą, utracona zostaje część informacji, co jest pewną wadą przytoczonej procedury.

4. Przykład numeryczny

W celu lepszego zrozumienia przedstawionej procedury wspomagania podejmowania decyzji poniżej zaprezentowano kolejne etapy algorytmu dla konkretnego problemu:

Właściciel firmy rozważa pomysł otwarcia nowego oddziału. Zainteresowany jest budową nowego budynku i gotów jest wyłożyć na ten cel pieniądze. Jednak zastanawia się nad lokalizacją. Na podstawie informacji zebranych od zapytanych ekspertów i wymienionych poniżej kryteriów analizuje trzy lokalizacje, które oznaczymy kolejno lokalizacja 1, lokalizacja 2 i lokalizacja 3. Kryteria oceny, którymi kieruje się właściciel firmy to:

- *koszt wybudowania budynku podany w tys. zł,*
- *czas budowy wyrażony w miesiącach,*
- *dostęp do potencjalnej wykwalifikowanej kadry wyrażony w jednostkach.*

Otrzymane wyniki dotyczące trzech lokalizacji zostały podane za pomocą Z-liczb w postaci zmiennych lingwistycznych, a macierz podejmowania decyzji *D* została przedstawiona w formie poniższej tabeli:

Tabela 1

Wartości lingwistyczne dla poszczególnych lokalizacji przy przyjętych kryteriach ocen

Kryterium	Lokalizacja		
	lokalizacja 1	lokalizacja 2	lokalizacja 3
Koszt budowy	(bardzo duży; wiarygodność duża)	(średni; wiarygodność b. duża)	(duży; wiarygodność duża)
Czas budowy	(średni; wiarygodność średnia)	(długi; wiarygodność średnia)	(bardzo długi; wiarygodność b. duża)
Dostęp do kadry	(duży; wiarygodność niska)	(duży; wiarygodność średnia)	(średni; wiarygodność średnia)

Po zamianie zmiennych lingwistycznych na odpowiednie liczby rozmyte Tabela 1 przyjmuje postać:

Tabela 2

Wartości numeryczne dla zmiennych lingwistycznych

Kryterium	Lokalizacja		
	lokalizacja 1	lokalizacja 2	lokalizacja 3
Koszt budowy	$(800,1000,1200;\ H)$	$(700,800,1000;\ VH)$	$(800,900,1000;\ H)$
Czas budowy	$(3,6,12;\ M)$	$(6,9,12;\ M)$	$(6,12,18;\ VH)$
Dostęp do kadry	$(200,400,600;\ L)$	$(300,400,600;\ M)$	$(200,300,400;\ M)$

Symbole L, M, H i VH oznaczają kolejno poziomy wiarygodności *niski*, *średni*, *duży* i *bardzo duży* i mogą zostać wyrażone za pomocą następujących liczb rozmytych trójkątnych:

$$L=(0,0.25,0.5),\qquad M=(0.25,0.5,0.75),\qquad H=(0.5,0.75,1),\qquad VH=(0.75,0.95,1). \tag{13}$$

Przyjęte kryteria określone są na różnych nośnikach, dlatego uzyskane wartości numeryczne warto poddać normalizacji. W tym celu należy najpierw określić rodzaj kryterium oceny, a następnie zastosować wzory (11) - (12). Rozpatrywane kryteria oceny możemy pogrupować następująco: kryterium korzyści (im większa wartość tym ocena „lepsza") – dostęp do kadr, kryterium kosztów (im mniejsza wartość tym ocena „lepsza") – koszt budowy, czas budowy. Po dokonaniu normalizacji Tabela 2 wygląda następująco:

Tabela 3

Znormalizowane ograniczenia rozmyte Z-liczb

Kryterium	Lokalizacja		
	lokalizacja 1	lokalizacja 2	lokalizacja 3
Koszt budowy	$\left(0,\frac{1}{6},\frac{1}{3};\ H\right)$	$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{5}{12};\ VH\right)$	$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3};\ H\right)$
Czas budowy	$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{6};\ M\right)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3};\ M\right)$	$\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3};\ VH\right)$
Dostęp do kadry	$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1;\ L\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},1;\ M\right)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3};\ M\right)$

W kolejnym kroku należy dokonać zamiany Z-liczb na liczby rozmyte. Należy zatem poziomy wiarygodności (13) przekształcić za pomocą defuzyfikacji na wartości z przedziału $\langle 0,1 \rangle$.

Po odpowiednich przekształceniach z wykorzystaniem wzoru (6) otrzymujemy:

$$L: \ \alpha_L = 0.25, \qquad M: \ \alpha_M = 0.5, \qquad H: \ \alpha_H = 0.75, \qquad VH: \ \alpha_{VH} = 0.9. \tag{14}$$

Uwzględniając zamianę Z-liczb na liczby rozmyte, otrzymujemy:

Tabela 4

Z-liczby zamienione na liczby rozmyte

Kryterium	**Lokalizacja**		
	lokalizacja 1	**lokalizacja 2**	**lokalizacja 3**
Koszt budowy	$\left(0, \frac{\sqrt{0.75}}{6}, \frac{\sqrt{0.75}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{0.9}}{6}, \frac{\sqrt{0.9}}{3}, \frac{5\sqrt{0.9}}{12}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{0.75}}{6}, \frac{\sqrt{0.75}}{4}, \frac{\sqrt{0.75}}{3}\right)$
Czas budowy	$\left(\frac{\sqrt{0.5}}{3}, \frac{2\sqrt{0.5}}{3}, \frac{5\sqrt{0.5}}{6}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{0.5}}{3}, \frac{\sqrt{0.5}}{2}, \frac{2\sqrt{0.5}}{3}\right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{0.9}}{3}, \frac{2\sqrt{0.9}}{3}\right)$
Dostęp do kadry	$\left(\frac{\sqrt{0.25}}{3}, \frac{2\sqrt{0.25}}{3}, \sqrt{0.25}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{0.5}}{2}, \frac{2\sqrt{0.5}}{3}, \sqrt{0.5}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{0.5}}{3}, \frac{\sqrt{0.5}}{2}, \frac{2\sqrt{0.5}}{3}\right)$

Ostatecznie Tabela 4 przyjmuje postać:

Tabela 5

Przybliżone końcowe wartości liczb rozmytych

Kryterium	**Lokalizacja**		
	lokalizacja 1	**lokalizacja 2**	**lokalizacja 3**
Koszt budowy	$(0, 0.145, 0.288)$	$(0.158, 0.316, 0.396)$	$(0.145, 0.217, 0.288)$
Czas budowy	$(0.235, 0.472, 0.589)$	$(0.235, 0.354, 0.472)$	$(0, 0.316, 0.633)$
Dostęp do kadry	$(0.167, 0.334, 0.5)$	$(0.354, 0.472, 0.707)$	$(0.235, 0.354, 0.472)$

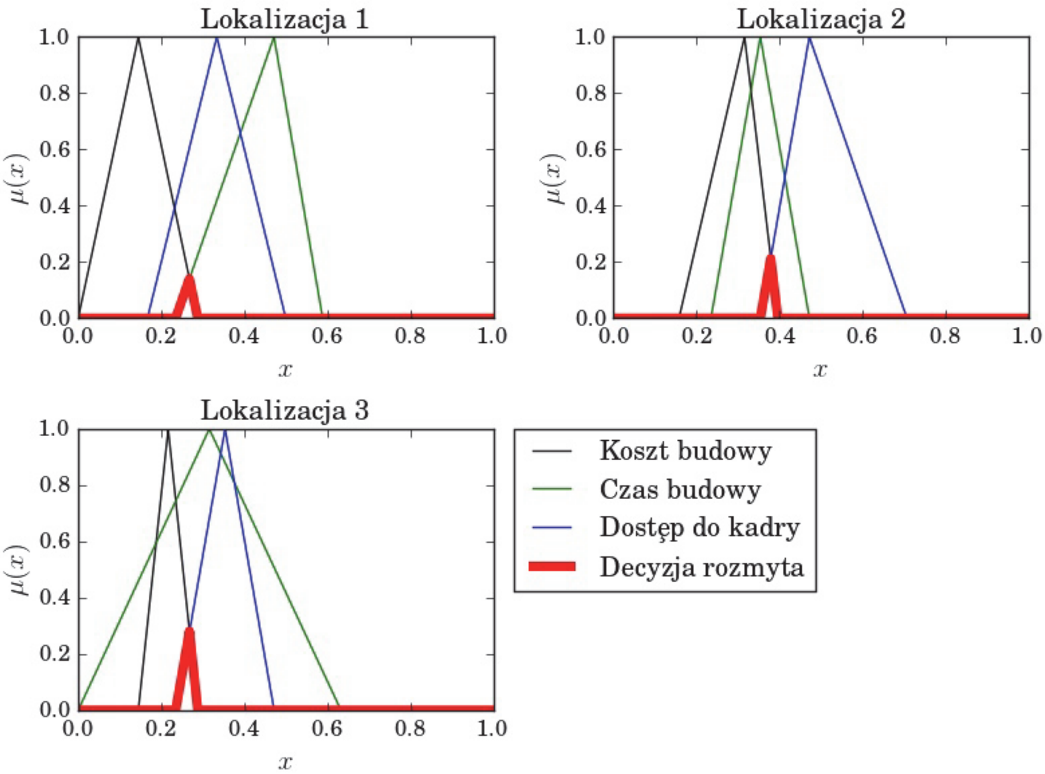
Wartości w Tabeli 5 są liczbami rozmytymi. Zatem aby wyznaczyć decyzję rozmytą można zastosować wzory (7) - (10). Ostatecznie dla poszczególnych lokalizacji otrzymujemy następujące wartości:

Tabela 6

Ostateczne wartości dla każdego z wariantów decyzyjnych

	Lokalizacja		
Numeryczna wartość wariantu decyzyjnego	0.140	0.213	0.282

Wyznaczanie końcowej wartości decyzji rozmytej pokazano na Rys. 1. Z otrzymanych w Tabeli 6 wyników można wywnioskować, że najlepszą lokalizacją jest lokalizacja nr 3.



Rys. 1. Końcowe wartości decyzji rozmytej dla rozważanych wariantów decyzyjnych

5. Wnioski

W artykule przedstawiony został algorytm wykorzystujący Z-liczby do rozwiązania wielokryterialnego zadania podejmowania decyzji. Zaprezentowane podejście może zostać wykorzystane, gdy decydent nie jest w stanie precyzyjnie określić wartości dla zadanych kryteriów ocen, a samo zastosowanie liczb rozmytych może w takim przypadku nie być wystarczające. Proponowany algorytm został zobrazowany na przykładzie numerycznym, gdzie krok po kroku przedstawiono kolejne etapy dochodzenia do jednoznacznego wyznaczenia najlepszego wariantu decyzyjnego.

Bibliografia

1. Aliev R.A., Alizadeh A.V., Huseynov O.H.: The arithmetic of discrete Z-numbers. "Information Sciences", Vol. 290, 2015.
2. Aliev R.A., Alizadeh A.V., Huseynov O.H., Jabbarova K.I.: Z-Number-Based Linear Programming. "International Journal of Intelligent Systems", Vol. 30, No. 5, 2015.

3. Atwah Al-ma'aitah M.: The Role of Business Intelligence Tools in Decision Making Process. “International Journal of Computer Applications” Vol. 73, No.13, 2013.
4. Banasik A.: Innowacyjne podejście do analizy danych na przykładzie systemu wspomagania decyzji dla inwestora. „Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Organizacja i Zarządzanie”, z. 57, 2011, s. 7.
5. Bellman R.E., Zadeh L.A.: Decision-Making in a Fuzzy Environment. “Management Science”, Vol. 17, No. 4, 1970.
6. Berner E.S. (ed.): Clinical Decision Support Systems: Theory and Practice. Springer, New York, 2007.
7. Fenton N., Wang W.: Risk and confidence analysis for fuzzy multicriteria decision making. “Knowledge-Based Systems”, Vol. 19, 2006.
8. Gardashova L.: A New Approach To Solving Decision Making Problem With Z-Information Under Uncertain Environment. Tenth İnternational Conference on Applicationa of Fuzzy Systems and Soft Computing, Lisbon, Portugal, Vol.1.
9. Gardashova L.: Application of Operational Approaches to Solving Decision Making Problem Using Z-Numbers. “Applied Mathematics”, Vol. 5, 2014.
10. Glukhoded E.A., Smetanin S.I.: The Method of Converting an Expert Opinion to Z-number. “Trudy ISP RAN /Proc. ISP RAS”, Vol. 28, No. 3, 2016.
11. Kang B., Wei D., Li Y., Deng Y.: A Method of Converting Z-number to Classical Fuzzy Number. “Journal of Information & Computational Science”, Vol. 9, No. 3, 2012.
12. Kapczyński A., Psurek K., Żurek T.: Wspomaganie podejmowania decyzji z wykorzystaniem systemów ekspertowych z wnioskowaniem przybliżonym. „Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Organizacja i Zarządzanie”, z. 35, 2006, s. 71.
13. Kumar A.: Stakeholder’s Perspective of Clinical Decision Support System. “Open Journal of Business and Management”, Vol. 4, 2016.
14. Moon J.D., Galea M.P.: Improving Health Management through Clinical Decision Support Systems. IGI Global, 2016.
15. Peng H., Wang J.: Hesitant Uncertain Linguistic Z-Numbers and Their Application in Multi-criteria Group Decision-Making Problems. “International Journal of Fuzzy Systems”, 2016, p. 1.
16. Rutkowski L.: Metody i techniki sztucznej inteligencji, PWN, Warszawa 2006.
17. Trzaskalik T.: Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Przegląd metod i zastosowań. „Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Organizacja i Zarządzanie”, z. 74, 2014, s. 239.
18. Wieder B., Ossimitz M.L.: The Impact of Business Intelligence on the Quality of Decision Making – A Mediation Model. “Procedia Computer Science” Vol. 64, 2015.
19. Woźniak M., Gabryel M., Nowicki R.: Model of decision support system for ball positioning relative to the center of mobile beam. “Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Matematyka Stosowana”, z. 2, 2012, s. 35.

20. Xiao Z.Q.: Application of Z-numbers in multi-criteria decision making. 2014 International Conference on Informative and Cybernetics for Computational Social Systems (ICCSS) 2014.
21. Xiao Z.: A new approach to representing and defuzzifying a Z-number and Z-valuation. Chinese Automation Congress (CAC) 2015, p. 797.
22. Zadeh L.A.: A Note on Z-numbers. "Information Sciences", No. 181, 2011.
23. Zadeh L.A.: Fuzzy sets. „Information and Control", Vol. 8, No. 3, 1965.