

Porównanie jakości prognozowania polskiego PKB dynamicznymi modelami czynnikowymi oraz modelami czynnikowymi z przełączaniem Markowa

Marcin Łupiński

Narodowy Bank Polski

e-mail: marcin.lupinski@nbp.pl

DOI: 10.12846/j.em.2013.04.11

Streszczenie

W artykule zamieszczono kontynuację cyklu opracowań autora (2007, 2009, 2012) dotyczących optymalnych metod prognozowania polskich zmiennych makroekonomicznych na przykładzie Produktu Krajowego Brutto (PKB). W ramach wykonanego na potrzeby artykułu badania porównano jakość nowcastów („prognoz” teraźniejszości) i właściwych prognoz określonych na podstawie proponowanego przez Mariano i Murasawę (2003) dynamicznego modelu czynnikowego z obsługą mieszanych częstotliwości danych wejściowych i braków obserwacji (MFDG-DFM) oraz rozszerzonego o strukturę czynnikową wielowymiarowego modelu przełącznikowego Markowa (multivariate Markov switching model) zaproponowanego przez Kima i Nelsona (1999), a następnie zastosowanego w praktyce przez Hamiltona i Chauvet (2005). Przedstawiono zaplecze matematyczne obu modeli wskazując na modyfikacje kombinowanego podejścia filtru Kalmana oraz metody największej wiarygodności (MNW), niezbędne do estymacji nieliniowego modelu z przełączaniem reżimów zgodnie ze schematem Markowa. Uzyskane wyniki sygnalizują niewielką przewagę modelu Mariano i Murasawy, choć w zakresie „prognoz” teraźniejszości konkurencyjny model Markowski dostarcza wyników o porównywalnej jakości.

Słowa kluczowe

dynamiczne modele czynnikowe, wielowymiarowe modele przełącznikowe Markowa, prognozowanie PKB Polski

Wstęp

Możliwość podejmowania decyzji opartych na adekwatnych prognozach sytuacji makroekonomicznej stanowi jeden z podstawowych filarów prowadzenia polityki społecznej, fiskalnej, monetarnej oraz makrostabilnościowej. W związku z tym w celu budowy odpowiedniego środowiska decyzyjnego na potrzeby decydentów, mających w swojej gestii poszczególne rodzaje polityk, są tworzone rozbudowane zaplecza analityczne angażujące duże zespoły analityków. W ramach wspomnianych struktur prognozy otoczenia makroekonomicznego są formułowane z reguły z wykorzystaniem złożonych środowisk analitycznych takich, jak modele strukturalne lub dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*, DSGE).

Badacze akademicy dysponując znacznie bardziej ograniczonymi zasobami ludzkimi oraz znacząco mniejszymi środkami finansowymi zwrócili na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych XX wieku uwagę na dynamiczne modele czynnikowe (*dynamic factor models*, DFM), które na podstawie niewielkiej grupy zmiennych makroekonomicznych (z reguły liczebność zbioru nie przekracza 10 szeregów czasowych) pozwoliły na konstruowanie prognoz (szczególnie prognoz krótkookresowych) o jakości porównywalnej lub wyższej od uzyskiwanych za pomocą pracochłonnych i kosztownych modeli strukturalnych/DSGE. Wśród modeli tego rodzaju szczególne uznanie zdobyły dynamiczne modele czynnikowe pozwalające na łączenie różnych częstotliwości danych wejściowych oraz zapewniające obsługę braków obserwacji.

Obserwowane w ramach stylizowanych faktów istotne zmiany strukturalne oraz cykliczny charakter kondycji makroekonomicznej analizowanych gospodarek dały badaczom impuls do uwzględnienia w ramach używanych modeli zmienności reżimów nieobserwowalnych czynników kształtujących koniunkturę gospodarczą. W trakcie prowadzonych badań popularność zaczęły zdobywać modele pozwalające na przełączanie reżimów zgodnie ze schematem Markowa. W swojej pierwotnej postaci używanej od końca lat osiemdziesiątych miały one postać modeli jednorodnaniowych. Wraz z postępem w dziedzinie metod estymacji w połowie lat dziewięćdziesiątych ewoluowały one do postaci struktur wielorodnaniowych, zapewniających jako dynamiczne modele czynnikowe z przełączaniem Markowa (*Markov switching dynamic factor models*) możliwość modelowania nieobserwowalnych komponentów (czynników).

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja wyników porównania obu podejść (dynamicznych modeli czynnikowych z mieszanymi częstotliwościami i obsługą

braków danych oraz dynamicznych modeli czynnikowych z przełączaniem Markowa) zarówno w zakresie teoretycznym, jak i praktycznych aspektów obejmujących prognozowanie teraźniejszości - (*nowcasts*) oraz przyszłego przebiegu (*forecasts*) zmiennych makroekonomicznych na przykładzie polskiego Produktu Krajowego Brutto. W ramach dokonanej komparatystryki zostaną przedstawione zarówno podstawy teoretyczne obu metod, jak też sposoby ich estymacji. Zasadniczym elementem wykonanego badania jest niewątpliwie porównanie jakości *nowcastów* oraz prognoz uzyskanych za pomocą konkurencyjnych modeli poprzez zestawienie odpowiednich błędów „prognoz“ teraźniejszości oraz właściwych prognoz przyszłości za pomocą ćwiczenia w pseudo czasie rzeczywistym (*pseudo real-time exercise*). Należy podkreślić, że jest to pierwsze znane autorowi porównanie jakości prognoz uzyskanych za pomocą referencyjnych modeli. Szczególnie cenne wydaje się być zastosowanie obu modeli do prognozy na przyrostowym panelu danych o mieszanych częstotliwościach. Zgodnie z wiedzą autora ograniczona jest również grupa opracowań, w których w praktyczny sposób wykorzystany zostałby wielowymiarowy model czynnikowy z przełączaniem Markowa, w szczególności w zakresie jego aplikacji do danych z różniącymi się częstotliwościami.

Artykuł ma następujący układ. W pierwszej części, teoretycznej, przedstawiono zaplecze matematyczne obu proponowanych metod budowy *nowcastów* i prognozowania makrozmiennych. W drugiej części, poświęconej praktycznym zastosowaniom przedstawionych struktur, zaprezentowano dane użyte do estymacji, omówiono również właściwy proces estymacji modeli oraz określono wielkości błędów obliczonych *nowcastów* i prognoz na maksymalnie cztery kwartały. W ostatniej części artykułu zamieszczono analizę uzyskanych rezultatów oraz podsumowanie.

1. Przegląd literatury

Historia zastosowań dynamicznych modeli czynnikowych w analizie ekonomicznej oraz finansowej została zainicjowana przez Geweke (1977). Ponad dekadę później modele te zostały spopularyzowane przez serię artykułów pary ekonometryków Stocka i Watsona (między innymi 1989, 1998). Modele zaproponowane przez obu wymienionych badaczy miały charakter niewielkich struktur analitycznych obejmujących z reguły swoim zakresem kilka zmiennych makroekonomicznych. Próbę generalizacji modeli czynnikowych do obliczeń wykorzystujących rozległe zbiory danych podjęli Forni, Hallin, Lippi i Reichlin (Forni i in., 2001) w swoim *frameworku*, zwanym uogólnionymi dynamicznymi modelami czynnikowym (*generalized dynamic*

mic factor models). Raporty z praktycznych zastosowań dynamicznych modeli czynnikowych wskazały na inne niż wielość próby problemy, których rozwiązanie mogłoby w kluczowy sposób przyczynić się do poprawę trafności oczekiwanych scenariuszy rozwoju sytuacji. Wśród głównych zagadnień wymagających wyjaśnienia można wymienić różnorodność częstotliwości danych wejściowych oraz brak części obserwacji dla zmiennych stanowiących podstawę estymacji. Wariant dynamicznych modeli czynnikowych stanowiący rozwiązanie opisanych problemów zaproponowali Mariano i Murasawa (2003). Praktyczne zastosowania przedmiotowej struktury analitycznej przedstawili w krótkim odstępie czasu Camacho i Perez-Quirios (2009) oraz Arouba, Diebold i Scotti (2009).

Podstawy modelowania zmiennych makroekonomicznych za pomocą jednorodnościowych modeli z przełączaniem Markowa omówiono w artykułach Hamiltona (1988, 1989), a następnie sformalizowano i rozwinięto w jego przekrojowym opracowaniu na temat analizy szeregów czasowych (1994). W swoim kolejnym artykule (1996) Hamilton w obszerny sposób przedstawił metodologię testowania specyfikacji oraz estymacji modeli przełącznikowych. Uogólnienie podejścia przełącznikowego na struktury wielowymiarowe, wykorzystujące w szczególności dynamiczne czynniki przedstawili Kim i Nelson (1999) a w praktyce zastosowali je Chauvet i Hamilton (2005).

Autor niniejszego artykułu od ponad 7 lat konsekwentnie rozwija metody analityczne służące do prognozowania kluczowych krajowych zmiennych makroekonomicznych. Opis podejścia czynnikowego można znaleźć w jego pracach z 2007 (Łupiński, 2007) oraz 2009 roku (Łupiński, 2009). Z kolei w 2012 roku został opublikowany artykuł autora (Łupiński, 2012), w którym porównano jakość prognoz krajowego PKB uzyskanych za pomocą podstawowego dynamicznego modelu czynnikowego oraz modelu czynnikowego obejmującego mieszane częstotliwości i obsługę braku danych.

2. Dynamiczny model czynnikowy z mieszanymi częstotliwościami i niezbilansowaną próbą

Jako model referencyjny zostanie przedstawiony model zaproponowany przez Mariano i Murasawę (2003), który następnie rozwinięty został przez Perez-Quirios (2009, 2010). Mariano i Murasawa oraz Perez-Quirios w prosty koncepcyjnie sposób rozszerzyli możliwości standardowego środowiska Stocka i Watsona (1989, 1998) opartego na dynamicznym podejściu czynnikowym opisanym w przestrzeni

stanów, poprzez obsługę mieszanych częstotliwości i niezbilansowanej próby (*ragged edges*). W pierwszej części bieżącej sekcji zostanie przedstawiony szkic bazowego modelu dynamicznych czynników, a następnie zostaną omówione elementy uzupełniające jego strukturę dodane przez wymienionych badaczy.

Przyjmijmy, że dana jest sekwencja (długości T) wektorów obserwacji N makroekonomicznych szeregów czasowych:

$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_T] \quad (1)$$

Wspomniane szeregi opisują bieżącą sytuację gospodarczą danego kraju. Wektor obserwacji tychże szeregów zebrany dla danego okresu t może być postrzegany jako realizacja wielowymiarowego procesu stochastycznego Y , który będzie modelowany w ramach zaproponowanej struktury ekonometrycznej. Przyjmowane jest również dodatkowe założenie, iż siłą wiodącą wspomnianego procesu stochastycznego jest grupa nieobserwowalnych komponentów (czynników) reprezentujących bieżący stan, w którym znajduje się analizowana gospodarka. Wygodnym sposobem zapisu modelu zawierającego nieobserwowalne czynniki jest przestrzeń stanów (*state-space*) składająca się z dwóch bloków równań.

Pomiarowego, określającego relację pomiędzy obserwowanymi zmiennymi i nieobserwowalnymi czynnikami - Przejścia, określającego dynamikę w czasie nieobserwowalnych komponentów:

$$Y_t = H\beta_t + Az_t + e_t \quad (2)$$

$$\beta_t = \mu + F\beta_{t-1} + \nu_t \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} e_t \\ \nu_t \end{pmatrix} \sim N \left(0, \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Q^* \end{pmatrix} \right) \quad (4)$$

gdzie:

H , A , F są macierzami o wymiarach $(n \times r)$, $(n \times k)$ i $(r \times r)$,

e_t i ν_t reprezentują błędy typu i.i.d pochodzące z rozkładu Gaussowskiego z odpowiadającymi im macierzami R i Q .

Przy tak zdefiniowanym modelu celem ekonometryka jest estymacja nieobserwowalnych czynników zgrupowanych w wektorze β_{t-1} dla wszystkich okresów próby ($t = 1, 2, \dots, T$). Estymacja nieobserwowalnych czynników może zostać przeprowadzona pod warunkiem znajomości parametrów strukturalnych modelu (elementów macierzy H , A , F , R , Q). Jako, że parametry te nie są znane etap właściwego obliczania czynników musi zostać poprzedzony estymacją tychże parametrów. Z reguły w tym celu jest stosowana kombinacja filtru almana z Metodą Największej

Wiarygodności (MNW), chociaż w literaturze relatywnie często używane jest również podejście Bayesowskie.

Zaproponowane przez Mariano i Murasawę (2003) oraz przez Pereza-Quiriosa (2009) rozszerzenia standardowego dynamicznego modelu czynnikowego zapisanego w przestrzeni stanów pozwalają na prowadzenie estymacji, w przypadku gdy dostępne dane mają różne częstotliwości oraz posiadają niezbilansowany koniec próby. Pierwsze z rozszerzeń pozwala na zapisanie relacji pomiędzy danymi o niskiej częstotliwości i wysokiej częstotliwości w oparciu o przybliżenie geometryczną średnią średniej arytmetycznej. Powinno ono być stosowane wyłącznie do danych mających charakter przepływów. W poniższym przykładzie relacją związane są dane kwartalne Y z danymi miesięcznymi X :

$$\begin{aligned}
 Y_t &= 3 \frac{X_t + X_{t-1} + X_{t-2}}{3} \simeq 3(X_t X_{t-1} X_{t-2})^{1/3} \\
 \ln(Y_t) &= \ln(3) + \frac{1}{3} \ln(X)_t + \frac{1}{3} \ln(X_{t-1}) + \frac{1}{3} \ln(X_{t-2}) \\
 \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-3}) &= \frac{1}{3} (\ln X_t - \frac{1}{3} \ln X_{t-3}) + \frac{1}{3} (\ln X_{t-1} - \frac{1}{3} \ln X_{t-4}) + \dots \\
 Y_t^{\Delta q} &= \frac{1}{3} X_t^{\Delta m} + \frac{2}{3} X_{t-1}^{\Delta m} + X_{t-2}^{\Delta m} + \frac{2}{3} X_{t-3}^{\Delta m} + \frac{1}{3} X_{t-4}^{\Delta m}
 \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie: $Y_t^{\Delta q} = Y_t - Y_{t-3}$, $X_t^{\Delta m} = X_t - X_{t-1}$

W przypadku, gdy wszystkie dane są dostępne, powyższa aproksymacja pozwala zapisać model jako (wektor β zostaje rozbity na czynniki wspólne (h) i idiosynkratyczne (i):

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{j,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 (\frac{1}{3} h_t + \frac{2}{3} h_{t-1} + h_{t-2} + \frac{2}{3} h_{t-3} + \frac{1}{3} h_{t-4}) \\ \gamma_j h_t \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} i_{1,t} + \frac{2}{3} i_{1,t-1} + i_{1,t-2} + \frac{2}{3} i_{1,t-3} + \frac{1}{3} i_{1,t-4} \\ i_{j,t} \end{bmatrix} \\
 \Phi(L) h_t &= v_{h,t} \\
 \Theta(L) i_{j,t} &= v_{i,j,t} \\
 \begin{bmatrix} v_{h,t} \\ v_{i,j,t} \end{bmatrix} &\sim N \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 \\ 0 & \Sigma_i \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Drugim z wprowadzonych rozszerzeń jest zagnieżdżony mechanizm obsługi braków obserwacji wewnątrz oraz na końcu próby (niezbilansowany koniec próby). Rozwiązanie przyjęte dla obu wariantów jest analogiczne. Brakujące obserwacje są zastępowane wartościami wylosowanymi z rozkładu Gaussowskiego o parametrach równych estymatorom parametrom obliczonym dla wejściowych szeregów czasowych.

$$\bar{Y}_{k,t} = \begin{cases} Y_{k,t} & \text{jeśli } Y_{k,t} \text{ jest dostępne} \\ w_{k,t} & \text{jeśli } Y_{k,t} \text{ jest niedostępne} \end{cases} \quad (7)$$

gdzie: $w_{j,t} \sim N(\mu, \sigma)$, μ, σ są estymatorami dwóch pierwszych momentów.

Ponadto, obsługa braków danych pociąga za sobą konieczność modyfikacji struktury modelu oraz czyni proces estymacji dwuwariantowym (przykład dla obsługi braków danych pierwszej zmiennej):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{j,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(\frac{1}{3}h_t + \frac{2}{3}h_{t-1} + h_{t-2} + \frac{2}{3}h_{t-3} + \frac{1}{3}h_{t-4}) \\ \gamma_j h_t \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}i_{1,t} + \frac{2}{3}i_{1,t-1} + i_{1,t-2} + \frac{2}{3}i_{1,t-3} + \frac{1}{3}i_{1,t-4} \\ i_{j,t} \end{bmatrix} & \quad \text{jeśli } Y_{1,t} \text{ jest dostępne} \\ \begin{bmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{j,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_j h_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i_{j,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,t} \\ 0 \end{bmatrix} & \quad \text{jeśli } \bar{y}_{1,t} \text{ nie jest dostępne} \\ w_{1,t} &= N(\delta_1, \sigma_1) \\ \dots & \end{aligned} \quad (8)$$

Jak widać z powyższego opisu, rozszerzenia zaproponowane przez Mariano i Murasawę oraz Perez-Quiriosa pozwalają na relatywnie proste rozwiązanie niezwykle często spotykanych w przypadku estymacji modeli makroekonometrycznych problemów dostępności danych z mieszanymi częstotliwościami oraz niezbilansowanej próby.

3. Wielowymiarowy dynamiczny model czynnikowy z przełączaniem Markowa

Obserwacja makroekonomicznych szeregów czasowych (tak zwane stylizowane fakty) wskazuje na ich odmienną charakterystykę w okresie recesji oraz boomu. Analiza empiryczna pozwala na stwierdzenie, że w poszczególnych fazach cyklu koniunkturalnego procesy stochastyczne rządzące zachowaniem wspomnianych szeregów podlegają zmianie. Modele pojedynczych szeregów czasowych uwzględniające zmienność reżimów zostały opracowane po raz pierwszy przez Hamiltona (1988, 1989). Zgodnie z pomysłem Hamiltona zmiana (przełączanie) reżimów w zależności od fazy cyklu następuje zgodnie ze schematem łańcuchów Markowa.

Uogólniona wersja dynamicznego modelu czynnikowego uwzględniającego przełączanie Markowa, pozwalająca na jednoczesną analizę wielu szeregów czasowych, opracowana została przez Kima i Nelsona (1999). Zgodnie z ich podejściem struktura przełączników Markowa została włączona do dynamicznych modeli czynnikowych reprezentowanych w przestrzeni stanów. Poniżej przedstawiony zostanie model Kima i Nelsona, obejmujący zarówno estymację, jak i prognozowanie nieobserwowalnych czynników na podstawie algorytmu filtrowania (*filtering*) wraz z algorytmem walidacji uzyskanych wyników za pomocą algorytmu wygładzania (*smoothing*).

Punktem wyjścia do analizy czynnikowej wielu szeregów czasowych z przełączaniem Markowa zaproponowanej przez Kima są dwa bloki równań przestrzeni stanów:

$$Y_t = H_{S_t} \beta_t + A_{S_t} z_t + e_t \quad (9)$$

$$\beta_t = \mu_{S_t} + F_{S_t} \beta_{t-1} + G_{S_t} \nu_t \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} e_t \\ \nu_t \end{pmatrix} \sim N \left(0, \begin{pmatrix} R_{S_t} & 0 \\ 0 & Q_{S_t}^* \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

gdzie:

Y_t jak poprzednio jest wektorem N makroekonomicznych szeregów czasowych, β_t jest wektorem J nieobserwowalnych zmiennych będących wiodącymi czynnikami mającymi wpływ cykl koniunkturalny.

Elementy macierzy określających dynamikę zmiennych obserwowalnych i nieobserwowalnych $(H_{S_t}, A_{S_t}, F_{S_t}, G_{S_t}, R_{S_t}, Q_{S_t}^*)$ oraz wektor stałych μ_{S_t} w równaniu przejścia (10) zależą od zmiennej S_t modelowanej za pomocą łańcucha Markowa, który może przyjmować M stanów ($S_t = 1, 2, \dots, M$). Prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy poszczególnymi stanami są zebrane w macierzy:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix} \quad (12)$$

gdzie: $p_{i,j} = Pr[S_t = j | S_{t-1} = i]$.

Konkretna postać macierzy przestrzeni stanów w zdefiniowanym punkcie czasu t zależy od reżimu charakteryzującego stan gospodarki. Dynamika reżimu wpływa na zmiany wielkości elementów tychże macierzy.

Biorąc za przykład pierwszą z wymienionych macierzy H_{S_t} , jej element $(k,1)$ (h_{k,l,S_t}) może być określony jako pochodna hipotetycznych elementów macierzy we wszystkich rozważanych stanach $S_t = 1, 2, \dots, M$:

$$h_{k,l,S_t} = h_{k,l,1}S_{1,t} + h_{k,l,2}S_{2,t} + \dots + h_{k,l,M}S_{M,t} \quad (13)$$

Ze względu na możliwość przyjmowania przez zmienną generowaną przez proces Markowa w okresie t i $t-1$ M różnych stanów, procedura filtrowania Kalmana generuje w każdym kroku zbiór M^2 prognoz zmiennych nieobserwowalnych i powiązanych z nim błędów prognoz. Ponadto ze względu na charakterystykę M -stanowego łańcucha Markowa opartego o zależność na jeden krok wstecz, każdy z kroków procedury filtrowania Kalmana powoduje konieczność rozważenia M nowych przypadków. Zaproponowane przez Kima i Nelsona podejście rozwiązuje problem „przekleństwa wymiaru“ (*plethora of dimension*). Zastosowanie przybliżeń pozwala na zredukowanie M^2 -elementowych macierzy $\beta_{t|t}^{(i,j)}$ i $P_{t|t}^{(i,j)}$ odpowiednio prognoz i błędów prognoz czynników nieobserwowalnych do M -elementowych wektorów $\beta_{t|t}^j$ i $P_{t|t}^j$.

Filtr Kalmana kombinowany jest z rozszerzoną wersją filtra Hamiltona w celu obliczenia warunkowej funkcji gęstości y_t względem ψ_{t-1} oraz prawdopodobieństw przebywania gospodarki w okresie t w jednym ze stanów przy wykorzystaniu zbioru informacyjnego dostępnego w tym okresie ($\mathcal{B}_t[\mathcal{Y}^t = \mathcal{Y}|\psi_t^t]$). W pierwszym etapie procedury Hamiltona obliczane są prawdopodobieństwa migracji ze stanu i do stanu j dla zbioru danych określonego w okresie $t-1$. Obliczone prawdopodobieństwa używane są wraz z łączną funkcją gęstości y_t, S_t, S_{t-1} uzyskiwaną na podstawie parametrów otrzymanych na wyjściu filtra Kalmana do określenia w kolejnym etapie warunkowej funkcji gęstości y_t . W ostatnim etapie obliczane jest prawdopodobieństwa obowiązywania w okresie t poszczególnych reżimów.

Podsumowując przedstawioną powyżej zaproponowaną pierwotnie przez Kima i Nelsona procedurę uzyskiwania estymacji nieobserwowalnych komponentów i prawdopodobieństw obowiązywania reżimów w dynamicznym modelu czynnikowym z przełączaniem Markowa można stwierdzić, że składa się ona z trzech podstawowych bloków:

- zmodyfikowanego filtra Kalmana;
- rozszerzonego filtra Hamiltona;
- procedury redukcji wymiaru uzyskanych estymatorów nieobserwowalnych komponentów i ich średniokwadratowych błędów prognozy.

W swojej pracy Kim i Nelson zaproponował również algorytm wygładzania (*smoothing*) nieobserwowalnych czynników oraz prawdopodobieństw znajdowania

się gospodarki w jednym ze stanów. W porównaniu z opisaną wcześniej procedurą filtrowania wygładzanie pozwala na estymację czynników i prawdopodobieństw z wykorzystaniem całego zbioru informacyjnego dostępnego w próbie (obserwacji o indeksach $t=1,2,\dots,T$). Wygładzanie odbywa się w czterech krokach, na podstawie wektorów zmiennych $\beta_{t|t-1}^{(i,j)}, P_{t|t-1}^{(i,j)}, \beta_{t|t}^{(i,j)}, P_{t|t}^{(i,j)}, Pr[S_t = j|\psi_t]$ oraz $Pr[S_t = j|\psi_{t-1}]$ obliczonych i zapisanych w poszczególnych krokach procesu filtrowania. Procedura, podobnie jak w przypadku filtrowania, realizowana jest iteracyjnie na wektorach obserwacji, począwszy od $T-1$ kończąc na obserwacji z indeksem 1.

4. Dane wykorzystane do estymacji modelu

Estymacja modelu dynamicznych czynników z mieszanymi częstotliwościami i obsługą braków danych (MFDG-DFM) i modelu czynnikowego z przełączaniem Markowa (MS-DFM) oraz prognozowanie polskiego PKB zrealizowana została na podstawie grupy zmiennych używanych wcześniej przez autora (Łupiński, 2012) do porównania jakości modelu MFDG-DFM oraz standardowego modelu czynnikowego opracowanego przez Stocka i Watsona (1989). Wśród wybranych wówczas danych znalazły się:

- krajowy pkb w cenach stałych;
- indeks produkcji przemysłowej;
- indeks obrotów handlu detalicznego;
- import;
- eksport.

Polski PKB zbierany jest z częstotliwością kwartalną, cztery pozostałe zmienne posiadają częstotliwość miesięczną. Dobór powyższych wskaźników został uzasadniony zarówno ich własnościami statystycznymi (za pomocą korelacji krzyżowej oraz koherencji zbadana została siła zależności pomiędzy grupą 20 kandydujących zmiennych wejściowych), jak i ich istotnością w opisie zjawisk gospodarczych. Indeks produkcji przemysłowej oraz wskaźnik importu pozwala na obserwowanie procesu tworzenia krajowego PKB, wskaźnik eksportu daje podstawę do śledzenia procesów dystrybucji produktu krajowego, natomiast indeks obrotów handlu detalicznego reprezentuje stronę popytową polskiej gospodarki. Podstawowe informacje na temat zmiennych użytych do estymacji zaprezentowano w tabeli 1.

Tab. 1. Zmienne makroekonomiczne użyte do estymacji modeli MFDG-DFM oraz DFM-MIDAS.

Zmienna	Częstotliwość	Źródło
PKB	Kwartalna	GUS
Indeks produkcji przemysłowej	Miesięczna	GUS
Indeks obrotów handlu detalicznego	Miesięczna	GUS
Import	Miesięczna	GUS
Eksport	Miesięczna	GUS

Źródło: opracowanie własne.

Do właściwej estymacji obu konkurencyjnych modeli użyto danych z lat 1997-2006, natomiast nowcasty i prognozy PKB uzyskano na podstawie danych z okresu 2007-2010. Zastosowanie wzmiankowanych szeregów czasowych do estymacji obu modeli wymagało ich wstępnej transformacji. Wszystkie zmienne poddano procedurze usunięcia efektów sezonowych oraz dni roboczych za pomocą metody TRAMO/SEATS dostępnej w udostępnianym na licencji *open source* pakiecie Demetra+. Dane pozbawione obu rodzajów efektów zostały skontrolowane na obecność pierwiastka jednostkowego. Podobnie jak we wcześniejszym badaniu autora (Łupiński, 2012) w przypadku wszystkich pięciu zmiennych na podstawie testu ADF (*Augmented Dickey-Fuller*) stwierdzono brak stacjonarności. Ostatecznie do estymacji modeli wykorzystano więc pierwsze różnice logarytmów zmiennych wejściowych.

Z punktu widzenia finalnego zastosowania estymowanych modeli (nowcasty i prognozowanie w pseudo czasie rzeczywistym krajowego PKB, *pseudo real-time nowcasts and forecasts*) niezbędne było odpowiednie przygotowanie zbioru danych pozwalające na odzwierciedlenie napływu w czasie poszczególnych obserwacji uzupełniających koniec próby. W celu symulacji przyrostów próby w latach 2007-2010 wykorzystano polski Kalendarz Udostępniania Danych (*Data Release Calendar*) udostępniany na stronie internetowej hurtowni danych EBC (*EBC Statistical Data Warehouse*, <http://sdw.ecb.int>). Budowa „rosnącego” panelu danych na potrzeby nowcastów i prognoz zmiennych wejściowych użytych modeli była jednym z najbardziej wymagających czasowo elementów wykonanego przez autora badania.

5. Estymacja referencyjnych modeli

Wykorzystując opisaną w poprzednim punkcie grupę zmiennych makroekonomicznych dokonano estymacji obu porównywanych ze sobą modeli: referencyjnej struktury Mariano-Murasawy oraz modelu czynnikowego z przełączaniem Markowa. W obu przypadkach parametry modelu obliczono wykorzystując metodę największej wiarygodności (MNV) połączoną z filtrem Kalmana (oraz z mechanizmem wygładzania dla modelu z przełącznikami Markowa). Identyfikacja odpowiedniej struktury modeli (właściwej ilości opóźnień w równaniach determinujących dynamikę zmiennych obserwowalnych i nieobserwowalnych czynników) zrealizowana została na podstawie kryteriów informacyjnych Akaike i Bayesa (odpowiednio AIC i BIC). Do prognozowania PKB wybrane zostały modele z minimalną wartością kryteriów informacyjnych.

Zastosowana w praktyce struktura modelu MFDG-DFM przedstawiała się następująco:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{j,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(\frac{1}{3}h_t + \frac{2}{3}h_{t-1} + h_{t-2} + \frac{2}{3}h_{t-3} + \frac{1}{3}h_{t-4}) \\ \gamma_j h_t \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{3}i_{1,t} + \frac{2}{3}i_{1,t-1} + i_{1,t-2} + \frac{2}{3}i_{1,t-3} + \frac{1}{3}i_{1,t-4} \\ i_{j,t} \end{bmatrix} \text{ jeśli } Y_{1,t} \text{ jest dostępne} \\
 \begin{bmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{j,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_j h_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i_{j,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,t} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ jeśli } \tilde{y}_{1,t} \text{ nie jest dostępne} \\
 w_{1,t} &= N(\delta_1, \sigma_1) \\
 \Theta(L)i_{j,t} &= v_{i,j,t} \\
 \begin{bmatrix} v_{h,t} \\ v_{i,j,t} \end{bmatrix} &\sim N\left(0, \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 \\ 0 & \Sigma_i \end{bmatrix}\right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie: $j=2,3,4,5$.

Zmienna $Y_{1,t}$ zarezerwowana została dla kwartalnego PKB, zmienne $Y_{2,t}, Y_{3,t}$ przypisano indeksowi produkcji przemysłowej oraz indeksowi obrotów handlu detalicznego, z kolei zmienne $Y_{4,t}, Y_{5,t}$ odpowiadały importowi i eksportowi.

Na podstawie kryteriów informacyjnych AIC i BIC określono, że błędy idiosynkratyczne zmiennych makroekonomicznych oraz dynamika nieobserwowalnego czynnika powinny być modelowane za pomocą procesów typu AR(1). Wyniki estymacji modelu MFDG-DFM zrealizowane za pomocą metody największej wiarygodności przedstawiono w tabeli 2.

Tab. 2. Parametry modelu MFDG-DFM wyestymowane za pomocą MNW

Parametr	Wartość	Błąd standardowy
γ_1	0.62	0.11
γ_2	0.24	0.08
γ_3	0.36	0.09
γ_4	0.67	0.10
γ_5	0.74	0.08
ϕ	-0.33	0.07
ϑ_1	-0.89	0.09
ϑ_2	-0.21	0.06
ϑ_3	-0.35	0.09
ϑ_4	-0.56	0.12
ϑ_5	-0.42	0.10
σ_1	0.73	0.14
σ_2	0.83	0.12
σ_3	0.69	0.09
σ_4	0.39	0.13
σ_5	0.40	0.08
Wartość funkcji wiarygodności: 351.85		
AIC: -3.37, BIC: -3.32		

Źródło: obliczenia własne.

Drugą strukturą analityczną użytą do konstrukcji nowcastów i prognoz krajowego PKB były modele czynnikowe uwzględniające przełączanie reżimów zgodnie ze schematem Markowa. Formalna struktura modelu może zostać przedstawiona jako:

$$\begin{aligned}
 \Delta y_{j,t} &= \gamma_j \Delta h_t^{MS} + i_j; j = 1, 2, 3, 4, 5; \\
 \Phi(L)(\Delta h_t^{MS} - \mu_{S_t}) &= v_{h,t} \\
 \mu_{S_t} &= \mu_0 + \mu_1 S_t; \mu_1 > 0 \\
 \Theta(L)i_{j,t} &= v_{i,j,t}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} v_{h,t} \\ v_{i,j,t} \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 \\ 0 & \Sigma_i \end{bmatrix} \right)$$

przy czym S_t jest procesem Markowa przyjmującym dwa stany ($S_t = \{0, 1\}$), przełączanie pomiędzy stanami następuje z prawdopodobieństwami $Pr[S_t = 1, S_{t-1} = 1] = p$, $Pr[S_t = 0, S_{t-1} = 0] = q$ Estymacja modelu realizowana jest tak jak poprzednio za pomocą metody największej wiarygodności.

Wyniki estymacji powyższego modelu zestawiono w tabeli 3.

Tab. 3. Parametry modelu MS-DFM wyestymowane za pomocą MNW

Parametr	Wartość	Błąd standardowy
ρ	0.88	0.06
q	0.91	0.08
μ_1	-0.53	0.11
μ_2	0.35	0.04
γ_1	0.51	0.07
γ_2	0.26	0.06
γ_3	0.28	0.03
γ_4	0.71	0.09
γ_5	0.66	0.10
ϕ	-0.29	0.05
ϑ_1	-0.71	0.15
ϑ_2	-0.31	0.09
ϑ_3	-0.42	0.07
ϑ_4	-0.49	0.13
ϑ_5	-0.37	0.09
σ_1	0.91	0.18
σ_2	0.74	0.12
σ_3	0.61	0.17
σ_4	0.39	0.11
σ_5	0.42	0.06
Wartość funkcji wiarygodności: 314.15		
AIC: -4.89, BIC: -4.76		

Źródło: obliczenia własne.

W ramach procedury estymacji modeli MFDG-DFM i MS-DFM obliczono wspólne nieobserwowalne czynniki (odpowiednio h_t i h_t^{MS}). Po przetransformowaniu wraz z szeregiem czasowym PKB do postaci rocznych wzrostów (analogiczny kwartał roku poprzedniego równy 100), zmienne te zostały użyte do obliczenia nowocastów i prognozowania polskiego produktu krajowego brutto na maksymalnie 4 okresy do przodu ($h=0,1,2,3,4$) zgodnie z formułą:

$$y_{t+h} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^l \beta_j \cdot x_{t-j} \quad (16)$$

W powyższym równaniu y jest prognozowaną zmienną (PKB), a x egzogeniczną zmienną wspomagającą prognozowanie (w tym przypadku odpowiednio nieobserwowalnym wspólnym komponentem h_t lub h_t^{MS}), k jest rzędem opóźnień procesu

prognozowanej zmiennej, natomiast 1 rzędem opóźnień procesu zmiennych pomocniczych.

Nowcasty ($h = 0$) oraz prognozy referencyjnej zmiennej uzyskane za pośrednictwem obu użytych metod zostały porównane za pomocą standardowych miar: średniokwadratowego błędu prognozy (*root mean square error*, RMSE), średniego bezwzględnego błędu prognozy (*mean absolute error*, MAE) oraz średniego błędu prognozy (*mean error*, ME).

6. Porównanie prognoz polskiego PKB uzyskanych za pomocą alternatywnych modeli

W przedostatniej części artykułu zostanie przedstawiona ewaluacja jakości nowcastów oraz prognoz polskiego PKB uzyskanych za pomocą ćwiczenia wykonanego w pseudo czasie rzeczywistym. Jak zostało to opisane wcześniej, ćwiczenie to zostało wykonane za pomocą kroczącego okna o długości maksymalnie 4 kwartałów z zakresu czasowego obejmującego lata 2007-2010, czyli okresu ogólnoswiatowego kryzysu gospodarczego oraz finansowego, mającego swój początek na przełomie lat 2007/2008. Jakość uzyskanych wyników porównano za pomocą trzech kryteriów: RMSE, MAE i ME. W tabeli 4 przedstawiono porównanie jakości nowcastów ($h=0$) uzyskanych za pomocą obu modeli, MFDG-DFM oraz MS-DFM.

Tab. 4. Porównanie jakości nowcastów uzyskanych za pomocą alternatywnych modeli

Model	RMSE	MAE	ME
MFDG-DFM	0.43	0.31	0.11
MS-DFM	0.44	0.33	0.10

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku obu opisanych modeli jakość uzyskanych nowcastów jest bardzo zbliżona. Stosując kryterium błędu średniokwadratowego oraz średniego błędu absolutnego mniejszym błędem obciążone są „prognozy“ terażniejszości uzyskane za pomocą dynamicznego modelu czynnikowego, jednak zgodnie z kryterium błędu średniego większą trafnością charakteryzują się nowcasty otrzymane za pomocą modelu zawierającego przełączanie Markowa.

W drugim etapie badania dwóch zaprezentowanych modeli porównano jakość prognoz uzyskiwanych w 4 horyzontach, począwszy od 1 kwartału kończąc na

4 kwartałach do przodu ($h=1,2,3,4$). Dla każdego z horyzontów obliczono osobne statystyki i zastawiono je w tabeli 5.

Tab. 5. Porównanie jakości h-okresowych prognoz uzyskanych za pomocą alternatywnych modeli

Model	RMSE	MAE	ME
h=1			
MFDG-DFM	0.91	0.72	0.11
MS-DFM	0.94	0.77	0.13
h=2			
MFDG-DFM	1.02	0.83	0.15
MS-DFM	1.07	0.91	0.19
h=3			
MFDG-DFM	1.59	1.28	0.52
MS-DFM	1.70	1.39	0.59
h=4			
MFDG-DFM	2.25	1.91	0.94
MS-DFM	2.38	2.03	1.08

Źródło: obliczenia własne.

Dynamiczne modele czynnikowe z mieszanymi częstotliwościami i obsługą braków danych pozwalają na systematyczne uzyskiwanie bardziej trafnych prognoz niż modele czynnikowe uwzględniające przełączanie Markowa. Należy jednak zwrócić uwagę, że odnotowany zysk ze stosowania metody MFDG-DFM oscylował w poszczególnych horyzontach czasowych w granicach 5%. „Wyższość” metody MFDG-DFM wynika więc niemal wyłącznie z powtarzalności przewagi uzyskiwanej dla poszczególnych horyzontów czasowych w ramach wszystkich używanych kryteriów trafności prognoz. W przeciwnym przypadku trudno byłoby udowodnić statystyczną istotność modelu MFDG-DFM.

Podsumowanie

Zasadniczym celem artykułu było porównanie podstaw matematycznych oraz jakości nowcastów i prognoz PKB Polski uzyskanych za pomocą dwóch alternatywnych podejść: dynamicznych modeli czynnikowych z mieszanymi częstotliwościami i obsługą braków danych (MFDG-DFM) oraz modeli czynnikowych uwzględniających przełączanie Markowa (MFDG-DFM). Część teoretyczną pracy poświęcono matematycznemu *backgroundowi* obu metod, szczególnie nacisk położono na omówienie schematu estymacji obu modeli. Następnie, na podstawie próby obejmującej swoim

zakresem lata 2007-2010 przeprowadzono ewaluację trafności nowcastów i prognoz polskiego PKB z wykorzystaniem kroczącej próby uwzględniającej historię napływu obserwacji na końcach szeregów czasowych zmiennych używanych w badaniu (ćwiczenie pseudo czasu rzeczywistego).

W przypadku „prognozowania” teraźniejszości oba podejścia dawały podstawę do formułowania porównywalnych prognoz (z lekkim wskazaniem na czynnikowy model MFDG-DFM). Dla sformułowanych prognoz bardziej trafne wyniki udało się uzyskać w przypadku modelu MFDG-DFM, choć jego przewagę nad konkurentem trudno uznać za znaczącą. W perspektywie jednego roku sformułowane za pomocą tej metody prognozy były jedynie o około 6% bardziej trafne (według kryterium RMSE) niż prognozy modelu wykorzystującego przełączanie Markowa.

Odpowiedź na pytanie o przyczynę opisanego stanu rzeczy nie jest jednoznaczna. Jak wskazały poprzednie badania autora, przewaga modeli MFDG-DFM wynika z możliwości uwzględniania w jego strukturze napływu najbardziej aktualnych danych z częstotliwościami wyższymi od częstotliwości prognozowanej zmiennej. Z drugiej strony modele MS-DFM pozwalają na uwzględnienie zmiany reżimu rządzącego polskim PKB, którą to zmianę można było niewątpliwie zaobserwować na przełomie 2008 i 2009 roku. Mając na uwadze wcześniejsze badania autora oraz brak jednoznacznej przewagi któregoś z modeli w aktualnym porównaniu, niezbędne jest prowadzenie dalszych prac analitycznych mających na celu monitoring alternatywnych podejść pozwalających na optymalne modelowanie kluczowych polskich zmiennych makroekonomicznych.

Literatura

1. Arouba S. B., Diebold F. X., Scotti C. (2009), *Real-Time Measurement of Business Conditions*, Journal of Business and Economic Statistics 27 (4)
2. Camacho M., Perez-Quiros G. (2009), *Ñ-STING: España Short Term INDicator of Growth*, Banco de Espana Working Papers nr 0912, Banco de España
3. Chauvet M., Hamilton J. D. (2005), *Dating Business Cycle Turning Points*, w: Milas C., Rothman P., van Dijk D. (eds.), *Nonlinear Analysis of Business Cycles*, Elsevier Science Ltd, Amsterdam, North Holland
4. Forni M., et al. (2001), *Coincident and Leading Indicators for the Euro Area*, Economic Journal, Royal Economic Society 111(471)
5. Geweke J. (1977) *The dynamic factor analysis of economic time-series models*, w: Aigner D., Goldberger A. (eds.), *Latent Variables in Socio-Economic Models*, North-Holland, Nowy Jork

6. Hamilton J. D. (1988), *Rational-Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime: An Investigation of the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Economic Dynamics and Control 12
7. Hamilton J. D. (1989), *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*, Econometrica 57
8. Hamilton J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, Nowy Jork
9. Hamilton J. D. (1996), *Specification Testing in Markov-Switching Time-Series Models*, Journal of Econometrics 70
10. Kim Ch. J., Nelson Ch. (1999), *State-Space Models with Regime Switching*, MIT Press, Cambridge
11. Łupiński M. (2007), *Konstrukcja wskaźnika wyprzedzającego aktywności ekonomicznej w Polsce*, praca doktorska, Uniwersytet Warszawski, Warszawa
12. Łupiński M. (2009), *Four years after expansion. are Czech Republic, Hungary and Poland closer to core or periphery of EMU?*, Ekonomia 22
13. Łupiński M. (2012), *Short-term forecasting and composite indicators construction with help of dynamic factor models handling mixed frequencies data with ragged edges*, Przegląd Statystyczny 59 (1)
14. Mariano R. S., Murasawa Y. (2003), *A New Coincident Index of Business Cycles Based on Monthly and Quarterly Series*, Journal of Applied Econometrics 18 (4)
15. Stock J. H., Watson M. W. (1989), *New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators*, NBER Chapters, NBER Macroeconomics Annual 4
16. Stock J. H., Watson, M. W. (1998), *Business Cycle Fluctuations in U.S. Macroeconomic Time Series*, NBER Working Papers 6528, NBER

Comparison of quality of Polish GDP forecasts prepared with dynamic factor models and factor models with Markov switching

Abstract

The article is a continuation of author's previous publications' series (2007, 2009, 2012) devoted to optimal methods of Polish macro variables forecasting with special attention to Gross Domestic Product. In this survey quality of nowcasts and forecasts was prepared with Mariano and Murasawa (2003) dynamic factor model with mixed frequencies and missing data handling (MFDG-DFM) was compared with quality of nowcasts/forecasts computed

with multivariate Markov switching model proposed by Kim and Nelson (1999) and operationalized by Hamilton and Chauvet (2005). The article presents mathematical background of both models and describes in detail combined Kalman filter and maximum likelihood method used to estimate nonlinear Markov switching model. Achieved results show modest advantage of Mariano and Murasawa MFDG-DFM model Polish GDP forecasts, however in the case of nowcasts both models provide almost equal quality output.

Keywords

dynamic factor models, Markov switching models, forecasting Polish GDP