

ANALIZA NUMERYCZNA WYBOCZENIA SŁUPÓW STALOWYCH Z WYBRANYCH PROFILI CIENKOŚCIENNYCH

Streszczenie

W artykule zaprezentowano analizę numeryczną wybooczenia sprężystego słupów o przekrojach cienkościennych otwartych. Jako przykład do obliczeń wybrano słupek mimośrodowo ściskany, którego przekrój poprzeczny jest ceowy półzamknięty i schemat statyczny to pręt obustronnie zamocowany. Zmiennymi parametrami były długości słupa i wymiary jego przekroju poprzecznego (wysokość przekroju H , szerokość półki B , grubość ścianek δ). Obliczenia powtórzono czterdzieści razy dla tak sparametryzowanego słupa. Otrzymano z nich ważne dla projektanta wyniki; przedstawiono je na wykresach. Przeprowadzona analiza numeryczna wyznaczania sił krytycznych w prętach cienkościennych o przekroju ceowym półzamkniętym może być przeniesiona na przekroje cienkościenne o innym kształcie.

WSTĘP

Celem pracy było opracowanie programu numerycznego do obliczeń sił krytycznych słupów metalowych wykonanych z cienkościennych profili giętych i zastosowanie go do wyznaczenia wartości tych sił dla serii słupów o różnych długościach i zróżnicowanych wymiarach przekroju poprzecznego. Asortyment, z którego projektant wybiera kształtowniki metalowe jest dość bogaty; w katalogach technicznych producentów są one szczegółowo wyspecyfikowane. Posługując się technologią gięcia na zimno można dobrać i wykonać inny, niż zamieszczony w katalogu, przekrój i przeprowadzić odpowiednie obliczenia numeryczne.

W niniejszej pracy zaprezentowano i przedyskutowano serię wyników obliczeń sił krytycznych słupów stalowych o przekrojach cienkościennych otwartych. W rozwiązaniach prętów cienkościennych posłużono się teorią Własowa [1, 2]. Do obliczeń wybrano kształtownik ceowy półzamknięty. Seria przeprowadzonych obliczeń obejmowała 10 ceowników półzamkniętych różniących się wzajemnie od siebie grubościami ścianek oraz wymiarami szerokości i wysokości kształtownika w przekroju poprzecznym. Wszystkie przekroje poprzeczne, dla których zostały przeprowadzone obliczenia, są stosowane w konstrukcjach budowlanych i skatalogowane w literaturze technicznej. Przeprowadzone obliczenia numeryczne wartości charakterystyk geometrycznych były zweryfikowane, z dobrą zgodnością, z danymi katalogowymi. Należy tu nadmienić, że w katalogach nie ma wszystkich charakterystyk geometrycznych profili występujących w równaniach stateczności, które należy roz-

wiązać, żeby obliczyć wartość siły krytycznej; trzeba je wyznaczyć oddzielnie.

Wiadomym jest, że programy numeryczne wspomagają proces projektowania (szczególnie wymiarowanie konstrukcji) z powodu możliwości wielokrotnego powtórzenia obliczeń przy zmiennych danych wejściowych. Ten proces umożliwia wybór najkorzystniejszych wymiarów geometrycznych przekroju ze względu na parametr wybrany i interesujący projektanta, np. ze względu na najmniejszy ciężar (konstrukcja lekka).

W niniejszej pracy obliczenia większości potrzebnych charakterystyk geometrycznych wykonano nakładką do programu Robot, a obliczenia sił krytycznych przeprowadzono programem własnym.

1. WYBOCZENIE SPRĘŻYSTE SŁUPÓW O PRZEKROJU CIENKOŚCIENNYM

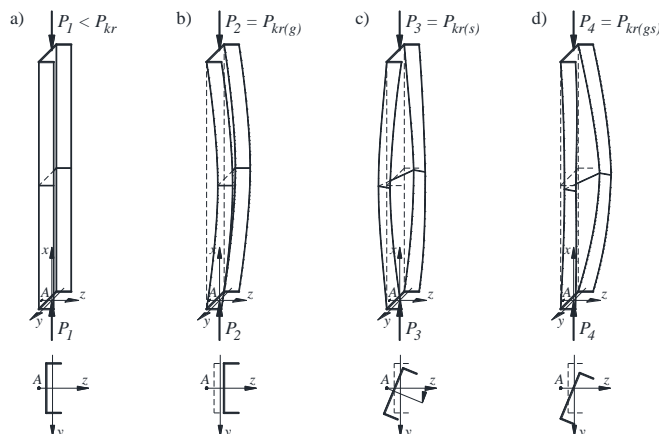
Wybooczenie sprężyste prętów cienkościennych o przekroju otwartym zapisuje się w ogólnym przypadku układem trzech znanych równań różniczkowych na podstawie teorii II rzędu [1]:

$$\begin{aligned} EJ_z v'' &= M_z^H \\ EJ_y w'' &= -M_y^H \\ EJ_\omega \theta''' - GK^0 \theta' &= -M_x^H \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

v - przemieszczenie wzdłuż osi y ,

w - przemieszczenie wzdłuż osi z ,



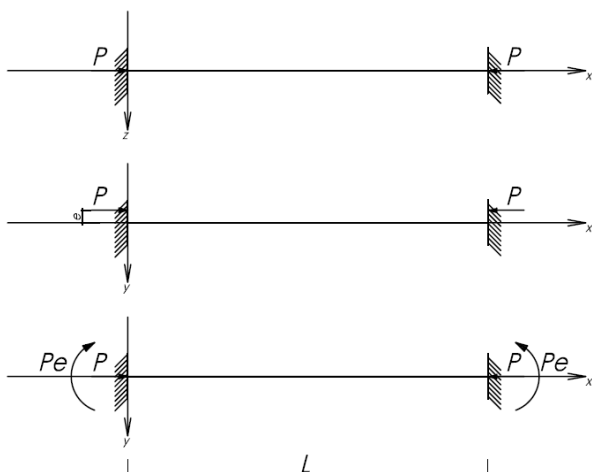
Rys. 1. Postacie wybooczenia pręta cienkościennego: a) postać prostoliniowa równowagi, b) wybooczenie giętne, c) wybooczenie skrętne, d) wybooczenie giętno-skrętne [3].

θ - kąt skręcenia przekroju poprzecznego wokół środka skręcania, M_z^{II} , M_y^{II} , M_x^{II} - momenty zginające i moment skręcający według teorii II rzędu.

W wyniku rozwiązania układu równań przy konkretnych warunkach brzegowych i warunkach obciążenia otrzymuje się siły krytyczne globalnego wybożenia skrętnego, giętnego i giętno-skrętnego. Najmniejsza, czyli decydująca, wartość siły krytycznej P_{kr} związana jest z odpowiadającą jej postacią wybożenia. Na rysunku 1 zilustrowano trzy możliwe kształty, odpowiadające różnym typom wybożenia pręta ściskanego o ugięciach i skręceniach swobodnie ograniczonych na obu końcach przy założeniu, że nie występuje wybożenie lokalne (zapewniona jest nieodkształcalność konturu przekroju poprzecznego w swojej płaszczyźnie). Na rysunku 1a pręt jest w stanie prostoliniowej równowagi, na rysunku 1b zilustrowano wybożenie giętne, na rys. 1c zilustrowano wybożenie skrętne, czyli obrót przekrojów poprzecznych wokół bieguna głównego A oraz na rysunku 1d wybożenie giętno-skrętne, czyli jednoczesny obrót przekroju poprzecznego i jego przemieszczenie.

2. OBLICZENIA NUMERYCZNE SIŁ KRYTYCZNYCH WYBOŻENIA SPRĘŻYSTEGO SŁUPÓW O WYBRANYM KSZTAŁCIE PRZEKROJU POPRZECZNEGO

Przykładowe obliczenia sił krytycznych przeprowadzono dla słupa mimośrodowo ściskanego, obustronnie zamocowanego, którego schemat statyczny pokazano na rysunku 2 i przekrój poprzeczny na rysunku 3. Badaniom numerycznym poddano serię kilkudziesięciu prętów stalowych o profilu ceowym półzamkniętym. Analizie podlegała wartość siły krytycznej wybożenia sprężystego przy obciążeniu statycznym. Pręty miały różne długości L i zróżnicowane wymiary ceowników półzamkniętych. Modele dobierano tak, aby można było na podstawie wyników obliczeń ocenić wpływ zmian: grubości pręta $\delta=g$, wysokości środnika H i szerokości półki B w przekroju poprzecznym na wartości siły krytycznej przy kilku długościach pręta L . Siła ściskająca słup P była przyłożona na mimośrodku, tj. w punkcie S , co pokazano na rysunku 3. Do obliczeń przyjęto kształtowniki konstrukcyjne ze stali zimnowalcowanej na podstawie katalogu używanego przez projektantów [4]. W tabeli 1 zestawiono wymiary ceowników półzamkniętych.



Rys. 2. Schemat statyczny pręta mimośrodowo ściskanego.

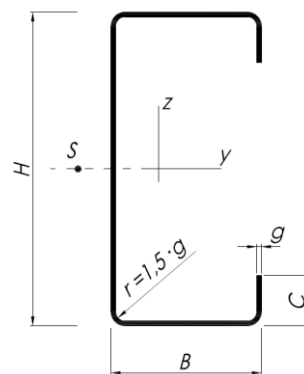
$$\begin{cases} EJ_z(-\alpha^4 C_1 \cos \alpha x) + P(\alpha^2 C_1 \cos \alpha x) = 0 \\ EJ_y(-\alpha^4 C_2 \cos \alpha x) + P(\alpha^2 C_2 \cos \alpha x) - Py_A \cdot (\alpha^2 C_3 \cos \alpha x) = 0 \\ EJ_\omega(-\alpha^4 C_3 \cos \alpha x) - (GK^0 - Pr^2) \cdot (\alpha^2 C_3 \cos \alpha x) - Py_A \cdot (\alpha^2 C_2 \cos \alpha x) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Dla podanego schematu, układ równań różniczkowych pręta wybożonego przybiera postać:

$$\begin{cases} EJ_z v^{IV} + P v^{II} = 0 \\ EJ_y w^{IV} + P w^{II} - P y_A \cdot \theta'' = 0 \\ EJ_\omega \theta^{IV} - (GK^0 - Pr^2) \cdot \theta'' - P y_A \cdot w'' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

gdzie:

$J_y, J_z, J_\omega, K^0, r^2$ - charakterystyki geometryczne przekroju cienkościennego,
 E, G - stałe materiałowe.



Rys. 3. Przekrój poprzeczny pręta mimośrodkowo ściskanego.

Tab. 1. Zestawienie wymiarów ceowników półzamkniętych poddanych analizie; wartości mierzone po obrysie zewnętrznym

Nr profilu	H [mm]	B [mm]	r [mm]	C [mm]	$\delta=g$ [mm]
1	100	48	2.25	16	1.50
2	100	48	3.00	16	2.00
3	100	48	3.75	16	2.50
4	100	48	4.50	16	3.00
5	200	60	3.00	20	2.00
6	280	60	3.00	20	2.00
7	300	60	3.00	20	2.00
8	400	60	3.00	20	2.00
9	280	48	3.00	20	2.00
10	280	75	3.00	20	2.00

Funkcje własne dla pręta obustronnie zamocowanego są następujące:

$$\begin{aligned} v &= C_1(1 - \cos \alpha x) \\ w &= C_2(1 - \cos \alpha x) \\ \theta &= C_3(1 - \cos \alpha x) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $\alpha = \frac{2\pi}{L}$

Po podstawieniu do układu równań funkcji własnych oraz ich pochodnych, otrzymujemy [wzór (4)]:

Z pierwszego równania wynika, że albo $C_1=0$ i wówczas wbrew założeniu nie ma wybożenia giętnego w płaszczyźnie $y-x$, albo $C_1 \neq 0$, wówczas mamy $P_{kr} = P_z = EJ_z \alpha^2$. Przyrównując do zera wyznacznik układu równań drugiego i trzeciego i obliczając pierwiastki tego równania otrzymujemy siłę krytyczną wybożenia giętno-skrętnego. O wybożeniu decyduje P_{min} .

Przed wyznaczeniem sił krytycznych obliczono, o oddzielnym

opracowaniu [5], charakterystyki geometryczne profili cienkościennych zestawionych w tabeli 1 oraz obliczono takie wartości długości prętów L , dla których wyboczenie jest sprężyste (niesprężyste wyboczenie prętów nie będzie w niniejszej pracy rozważane). Po przeprowadzeniu tych obliczeń utworzono trzy grupy modeli słupów:

Grupa 1 – modele o przekrojach poprzecznych 1, 2, 3, 4 (tabela 1) i długościach 3,5; 4,0; 4,5 m;

Grupa 2 – modele o przekrojach poprzecznych 5, 6, 7, 8 (tabela 1) i długościach 4,5; 5,0; 5,5; 6,0 m;

Grupa 3 – modele o przekrojach poprzecznych 6, 9, 10 (tabela 1) i długościach 5,0; 5,5; 6,0; 6,5 m.

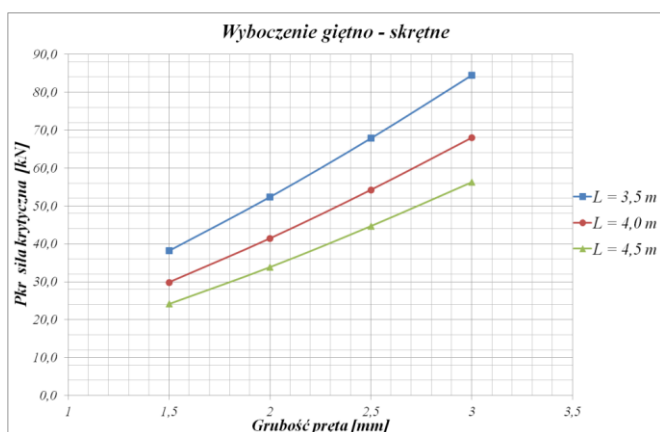
Następnie przystąpiono do rozwiązywania układu równań (4) dla modeli słupów jak wyżej. W tej serii słupów różnicowane są następujące wymiary geometryczne przekrojów poprzecznych:

Grupa 1 – grubość ścianek δ jest zmienna, a wysokość przekroju H i długości pólki B i C stałe,

Grupa 2 – wysokość przekroju H jest zmienna, a grubość ścianek δ i długości pólki B i C stałe,

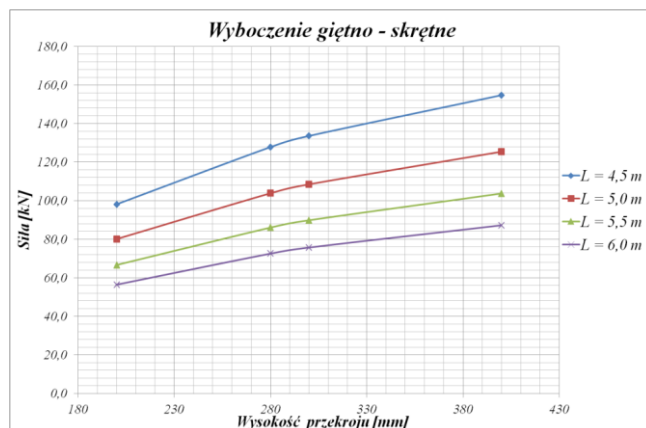
Grupa 3 – długość pólki B jest zmienna, a grubość ścianek δ i wymiary H, C stałe.

Analizowanie sił krytycznych modeli słupów grupy 2 jest istotne nie tylko z punktu widzenia wzmocnienia nośności pręta (gdy grubość δ wzrasta), lecz też istotne z punktu widzenia osłabienia nośności pręta (gdy grubość δ maleje), która następuje, gdy ulega on korozji równomiernej [6]. Analizowanie sił krytycznych modeli grup 2 i 3 jest ważne nie tylko przy projektowaniu konstrukcji lecz też potrzebne np. przy jej modernizacji w trakcie remontu.

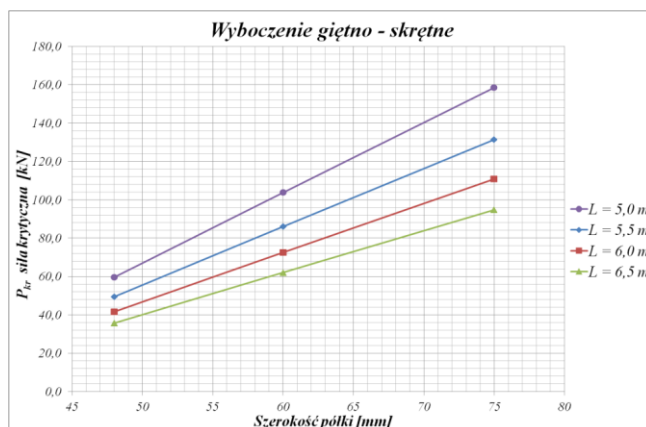


Rys. 4. Wykresy zależności siła krytyczna P_{kr} - grubość ścianek δ przekroju poprzecznego; grupa słupów 1.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń sporządzono odpowiednio wykresy zależności: siła krytyczna – grubość ścianek δ , siła krytyczna – wysokość przekroju H , siła krytyczna – szerokość pólki B , co przedstawiono na rysunkach 4, 5, 6. Rozważane słupy są ze stali konstrukcyjnej o module Younga $E=210000$ N/mm² i granicy proporcjonalności $R_H=235$ MPa.

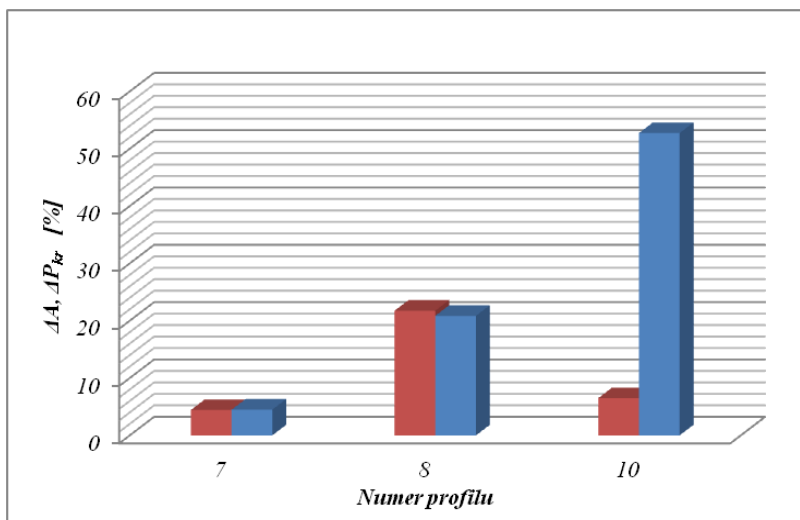


Rys. 5. Wykresy zależności siła krytyczna P_{kr} – wysokość H przekroju poprzecznego; grupa słupów 2.



Rys. 6. Wykresy zależności siła krytyczna P_{kr} – szerokość B pólki przekroju poprzecznego; grupa słupów 3.

Grupy słupów 1, 2 i 3 uległy wyboczeniu giętno-skrętnemu. Wykresy pokazane na rysunkach 4 ÷ 6 są rosnące (zwiększenie wymiarów δ, H, B wpływa pozytywnie na nośność pręta) i są one



Rys. 7. Wykresy dwóch zależności: przyrost siły krytycznej ΔP_{kr} – numer profilu (kolor niebieski) i przyrost pola przekroju poprzecznego ΔA – numer profilu (kolor czerwony).

odpowiednio liniowe lub prawie liniowe. Na podstawie rysunku 4 odnotowano, że wraz ze wzrostem długości pręta maleje wpływ zmiany grubości blachy δ na wartość siły krytycznej. Na podstawie rysunku 5 stwierdzono, że ze wzrostem długości pręta maleje wpływ zmiany wysokości H na wartość siły krytycznej. Z rysunku 6 wynika, że wzrost długości pręta redukuje wpływ zmiany szerokości półki na wartość siły krytycznej.

Mając na uwadze wymagania stawiane nowoprojektowanym konstrukcjom, którym jest optymalne wykorzystanie materiału konstrukcyjnego, przeprowadzono analizę efektywności zwiększenia poszczególnych wymiarów przekroju poprzecznego pręta. Przyjęto do analizy cztery następujące profile: nr 6 – ceownik o wymiarach bazowych, nr 7, nr 8, nr 10 o długościach 5,0 m. Wyniki zamieszczono na rysunku 7.

PODSUMOWANIE

Na podstawie przeprowadzonej analizy numerycznej wyboczenia prętów o systematycznie zmiennych długościach oraz o systematycznie zmiennych wymiarach kształtownika „C” w przekroju poprzecznym można stwierdzić, że analiza taka bardzo usprawnia proces projektowania. Siły krytyczne i postaci wyboczenia wyznaczono z układu równań stateczności, który obowiązuje w zakresie odkształceń sprężystych; otrzymano długości prętów wyboczenia sprężystego od 3,5 m do 6,5 m. W konstrukcjach inżynierskich występują pręty o długości do 5,0 m, zatem przy ich większych długościach analiza taka jest tylko teoretyczna. Nie obowiązuje ona też dla prętów krótszych, które ulegają wyboczeniu z zakresu odkształceń sprężysto – plastycznych.

Przeprowadzona analiza numeryczna wyznaczania sił krytycznych i postaci wyboczenia prętów cienkościennych o przekroju „C” może być przeniesiona na przekroje cienkościenne o dowolnym kształcie, np. na kształtowniki „T”, „Z”, „H”.

BIBLIOGRAFIA

1. Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W., *Wytrzymałość materiałów*. Tom 2, Arkady, Warszawa 1985.
2. Obrębski J.B., *Cienkościenne sprężyste pręty proste*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999.
3. Glinicka A., Imielowski S., Ajdukiewicz C., *O sposobie dydaktycznym ułatwiającym rozumienie zjawiska wyboczenia prętów prostych*. Logistyka 4/2014, s. 3411 – 3416.
4. Katalog Blachy Pruszyński, Sp. z o.o. – *Kształtowniki typu Z, C, Σ : wskaźniki wytrzymałościowe dla profilu C*, 2012.
5. Urbaniak A., *Analiza wyboczenia cienkościennych prętów stalowych o przekroju otwartym*. Praca dyplomowa inżynierska. Wydział Inżynierii Lądowej PW, 2015.
6. Glinicka A., Imielowski S., Ajdukiewicz C., *Influence of uniformly distributed corrosion on the compressive capacity of selected thin – walled metal columns*. Procedia Engineering 111 (2015), s.262 – 268.

THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE BUCKLING OF STEEL-COLUMNS FROM CHOSEN THIN-WALLED PROFILES

Abstract

In the article authors presented the numerical analysis of the elastic buckling of columns about thin-walled sections open. As an example to calculations one chose the column off-centre compressed whose cross-section is "C" and the static diagram is the bar bilaterally fixed. Variable parameters were lengths of the column and measurements of his cross-section (the height of the section H, the width of the shelf B, the thickness of sides δ). Calculations were repeated forty times for the column whose measurements were changed. One received from them important for the designer results; one presented it on diagrams. Carried out numerical analysis of designating of critical forces in thin-walled bars about the section "C" can be carried on thin-walled sections about other shape.

Autorzy:

dr hab. inż. **Aniela Glinicka**, prof. nzw. PW – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, ul. Armii Ludowej 16

inż. **Anna Urbaniak** – Politechnika Warszawska, Wydz. Inżynierii Lądowej