



## **Analiza wyężenia tarczy żelbetowej z materiałów konstrukcyjnych bardzo wysokich wytrzymałości**

WALDEMAR CICHORSKI, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,  
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2,  
waldemar.cichorski@wat.edu.pl, adam.stolarski@wat.edu.pl

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono analizę wpływu wysokiej wytrzymałości betonu i stali zbrojenio-  
wej na wyężenie prostokątnych tarcz żelbetowych z uwzględnieniem fizycznych nieliniowości mate-  
riałów konstrukcyjnych: betonu i stali zbrojeniowej. Analiza została przeprowadzona na podstawie  
metody zaprezentowanej w pracy [13]. Przedstawiono wyniki rozwiązań numerycznych ze szczególnym  
uwzględnieniem stanu przemieszczenia i naprężenia tarczy w przyrostowym procesie obciążania sta-  
tycznego. Uzyskane wyniki porównano z wynikami doświadczalnymi otrzymanymi dla betonu zwykłego  
[8]. Potwierdzono poprawność przyjętych założeń i modeli odkształcenia betonu i stali oraz efektyw-  
ność metody analizy proponowanej w pracy [13] dla problemów numerycznej symulacji zachowania  
tarcz żelbetowych wykonanych z betonu bardzo wysokiej wytrzymałości.

**Słowa kluczowe:** mechanika konstrukcji, konstrukcje żelbetowe, tarcze, obciążenie statyczne, nieli-  
niowość fizyczna

**DOI:** 10.5604/12345865.1228960

### **1. Wstęp**

Postęp technologiczny w zakresie inżynierii materiałowej umożliwił w ostatnich  
latach wdrożenie do praktyki w budownictwie nowych tworzyw na bazie cementu  
— betonów wysokowartościowych [5]. Pewne specyficzne cechy betonów wyso-  
kowartościowych powodują konieczność podjęcia nie tylko badań doświadczal-  
nych, lecz także teoretycznych badań z zakresu konstytutywnego modelowania

własności materiałowych, modelowania zachowania niezbrojonych i zbrojonych elementów konstrukcyjnych oraz analizy mechanizmów wyężenia i zniszczenia konstrukcji wykonanych z takich betonów. Modelowanie nieliniowego zachowania betonów wysokowartościowych w warunkach pożaru było przedmiotem pracy [2]. W pracy [3] przeprowadzono analizę emisji akustycznej podczas badań niszczących beton o wysokiej wytrzymałości. Własności betonów wysokowartościowych wzmocnionych włóknami stalowymi zostały opisane w pracy [4]. Z kolei badania eksperymentalne i doświadczalne aspektów zachowania wiotkich słupów wykonanych z betonów o wysokiej wytrzymałości stanowiły przedmiot pracy [6]. Modelowanie konstytutywne własności betonów wysokowartościowych i ultrawysokowartościowych stanowiło przedmiot rozważań pracy [9]. Natomiast analiza zniszczenia różnych typów i rozmiarów belek wykonanych z betonów wysokowartościowych została zamieszczona w pracach [6, 10, 11, 12].

Celem pracy jest analiza wpływu wysokiej wytrzymałości betonu i stali zbrojeniowej na wyężenie prostokątnych tarcz żelbetowych z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych: betonu i stali.

Rozwiązanie uzyskano z wykorzystaniem metody analizy niesprężystego zachowania tarczy żelbetowej obciążonej statycznie [13]. Istota tej metody sprowadza się do następujących głównych elementów: modelowania niesprężystych właściwości materiałów, modelowania procesów odkształcania płaskiego ustroju konstrukcyjnego — tarczy żelbetowej oraz algorytmizacji i numerycznego programowania rozwiązania.

Modelowanie własności materiałów konstrukcyjnych przeprowadzono z wykorzystaniem założeń teorii plastycznego płynięcia. Dla stali zbrojeniowej zastosowano model materiału sprężysto-idealnie plastycznego. Dla betonu przyjęto zredukowaną formę niestandardowego modelu dynamicznego odkształcania betonu [14]. Model ten opisuje własności sprężyste betonu, ograniczone własności idealnego płynięcia plastycznego, osłabienie materiałowe oraz zmiany objętości. W modelu pominięto degradację modułu odkształcania. Przyjęty model betonu umożliwia uproszczony opis stanów zarysowania lub zmiażdżenia materiału jako stanów utraty nośności osiągniętych w procesie osłabienia materiałowego. Metodę analizy wyężenia układu konstrukcyjnego opracowano z wykorzystaniem zasad metody elementów skończonych. Dla tarczy żelbetowej, traktowanej jako kompozycja materiałowa składająca się z matrycy betonowej wzmocnionej wiotkimi prętami stalowego zbrojenia, zaproponowano hipotezę współpracy prętów zbrojenia i materiału matrycy. Rozwiązanie układów równań równowagi metody elementów skończonych przeprowadzono na podstawie własnych algorytmów i programów numerycznej analizy płaskiego stanu naprężenia umożliwiających określenie stanów przemieszczenia, odkształcania i naprężenia z uwzględnieniem efektów nieliniowości fizycznej materiałów, w tym zarysowania betonu.

W niniejszej pracy przedstawiono tylko wyniki rozwiązań numerycznych. W celu zbadania wpływu wysokiej wytrzymałości betonu i stali zbrojeniowej na wyężenie prostokątnych tarcz żelbetowych, zaprezentowano wyniki dla tarczy z takim samym układem zbrojenia głównego jak w pracy [8] zawierającej wyniki badań doświadczalnych, z równoczesnym uwzględnieniem zmiany parametrów matrycy betonowej tarczy, tj. wpływu zmiany betonu zwykłego na beton bardzo wysokiej wytrzymałości. Dodatkowo przeanalizowano wpływ zmiany parametrów wytrzymałościowych stali zbrojeniowej, tj. wpływ zmiany stali zwykłej, analogicznie jak w doświadczeniu [8], na stal o podwyższonej wytrzymałości.

Na przykładzie tarczy żelbetowej określono nośność tarczy w procesie przyrostowego obciążania statycznego. Przedstawiono analizę porównawczą uzyskanych wyników z wynikami doświadczalnymi zaczerpniętymi z literatury [8] oraz wcześniejszymi wynikami numerycznymi otrzymanymi dla betonu zwykłego [1].

Porównanie uzyskanych wyników dla betonu zwykłego z wynikami teoretycznymi zaczerpniętymi z literatury zostało zamieszczone w pracy [1].

W ramach pracy wykonano szczegółową analizę stanu naprężenia tarczy żelbetowej. Przedstawiono rozkłady naprężeń w materiale matrycy betonowej w charakterystycznych przekrojach tarczy. Rozkłady naprężeń w stali zbrojeniowej porównano z wynikami zarejestrowanymi dla różnych parametrów wytrzymałościowych stali. Zilustrowano wyężenie tarczy w postaci powierzchniowego rozkładu średnich naprężeń normalnych.

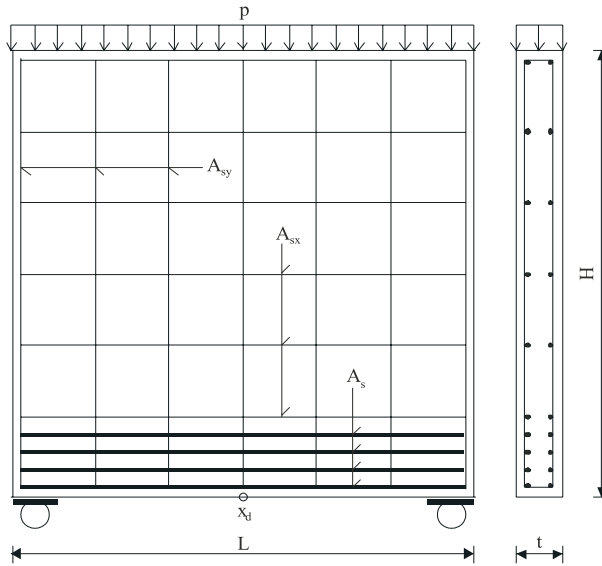
## 2. Przedmiot analizy

Przedmiotem analizy są tarcze wykonane z materiału matrycy betonowej wzmocnionego wiotkimi stalowymi prętami zbrojenia w układzie ortogonalnym, obciążone na górnej powierzchni równomiernie rozłożonym obciążeniem.

Analizie numerycznej poddano prostokątną tarczę żelbetową o ortogonalnym układzie zbrojenia, oznaczoną w pracy F. Leonhardta i R. Walthera [8] jako WT3 (rys. 1). Tarcza ta była przedmiotem analizy numerycznej w pracy [1].

Wymiary tarczy są następujące: długość i wysokość:  $L = B = 160$  cm, grubość:  $t = 10$  cm. Zbrojenie główne tarczy wykonano w postaci czterech warstw pętli zbrojeniowych ze stali o granicy plastyczności  $f_y = 410$  MPa, o średnicy prętów  $\phi 8$ , ułożonych w dolnej części tarczy. Pozostała część tarczy jest zbrojona strzemionami pionowymi i poziomymi ze stali o granicy plastyczności  $f_y = 240$  MPa, o średnicy prętów  $\phi 5$ , w rozstawie co 26 cm. Materiał matrycy betonowej wykonano z betonu o wytrzymałości na ściskanie  $f_c = 30$  MPa oraz wytrzymałości na rozciąganie  $f_t = 3$  MPa.

Biorąc pod uwagę zastosowanie w analizie numerycznej konstrukcji betonów o wysokiej wytrzymałości, w pracy [15] zaproponowano modyfikację modelu odkształcenia betonu. Istotą proponowanej modyfikacji modelu betonu jest zmiana



Rys. 1. Schemat tarczy żelbetowej

interpretacji wielkości odkształceń granicznych  $\varepsilon_{fc}$  dla fazy idealnego płynięcia plastycznego i  $\varepsilon_{uc}$  dla fazy osłabienia materiałowego. W podstawowej wersji modelu odkształcenia graniczne  $\varepsilon_{fc}$  są przyjmowane na podstawie analizy wyników badań doświadczalnych dla jednoosiowego ściskania o wartości 2‰, jako wartości stałe, niezależne od klasy betonu, natomiast dla odkształceń granicznych  $\varepsilon_{uc}$  podano z przedziału  $\varepsilon_{uc} = (6-12)\%$ , przy zaleceniu, że mniejsze wartości  $\varepsilon_{uc}$  mogą być stosowane dla betonów klas wyższych, a większe wartości  $\varepsilon_{uc}$  dla betonów klas niższych i średnich, ale bez dokładnego określenia zależności od klasy betonu. Obecnie w zmodyfikowanym modelu odkształcania betonu przyjmuje się założenie, że wartości odkształceń granicznych  $\varepsilon_{fc}$  i  $\varepsilon_{uc}$  mogą być zmienne i zależne od klasy betonu, zgodnie z następującą funkcją zmienności wytrzymałości betonu określającą tzw. wskaźnik wytrzymałości:

$$r(f_c) = \frac{f_c - f_{c,\min}}{\Delta f_c} \quad (1)$$

gdzie:  $f_c$  — wytrzymałość na ściskanie badanego betonu, z przedziału  $(f_{c,\min}, f_{c,\max})$ ;  
 $(f_{c,\min}, f_{c,\max})$  — ograniczenie przedziału wytrzymałości na ściskanie rozpatrywanej klasy betonu, w zależności  $\Delta f_c = f_{c,\max} - f_{c,\min}$ .

Wprowadzono następujące zależności odkształceń granicznych:

— dla zakresu idealnego płynięcia plastycznego:

$$\varepsilon_{fc} = \varepsilon_{ec} + \varepsilon_{fc,p}, \quad \varepsilon_{fc,p} = \varepsilon_{fc,p,\max} - \Delta \varepsilon_{fc,p} \cdot r(f_c),$$

— dla zakresu osłabienia materiałowego:

$$\varepsilon_{uc} = \varepsilon_{fc} + \varepsilon_{fc,u}, \quad \varepsilon_{fc,u} = \varepsilon_{fc,u,max} - \Delta\varepsilon_{fc,u} \cdot r(f_c),$$

gdzie:  $\varepsilon_{ec} = \frac{f_c}{E_c}$ : maksymalne odkształcenie dla zakresu sprężystego;

$\Delta\varepsilon_{fc,p} = \varepsilon_{fc,p,max} - \varepsilon_{fc,p,min}$ : ograniczenie przedziału odkształceń określających długość półki plastycznej;

$\Delta\varepsilon_{fc,u} = \varepsilon_{fc,u,max} - \varepsilon_{fc,u,min}$ : ograniczenie przedziału odkształceń określających długość fazy osłabienia.

Do wyznaczenia parametrów materiałowych opisujących model konstytutywny betonu przyjęto następujące wartości graniczne odkształceń betonu:

— maksymalne odkształcenia określające długość półki plastycznej

$$\varepsilon_{fc,p,max} = 0,8\%,$$

— minimalne odkształcenia określające długość półki plastycznej

$$\varepsilon_{fc,p,min} = 0,5\%,$$

— maksymalne odkształcenia określające długość fazy osłabienia  $\varepsilon_{fc,u,max} = 10\%$ ,

— minimalne odkształcenia określające długość fazy osłabienia  $\varepsilon_{fc,u,min} = 4\%$

oraz następujące wartości graniczne betonu na ściskanie —  $f_{c,min} = 30$  MPa,  $f_{c,max} = 300$  MPa.

W efekcie do analizy numerycznej przyjęto parametry materiałowe opisujące model konstytutywny betonu, przedstawione w tabeli 1.

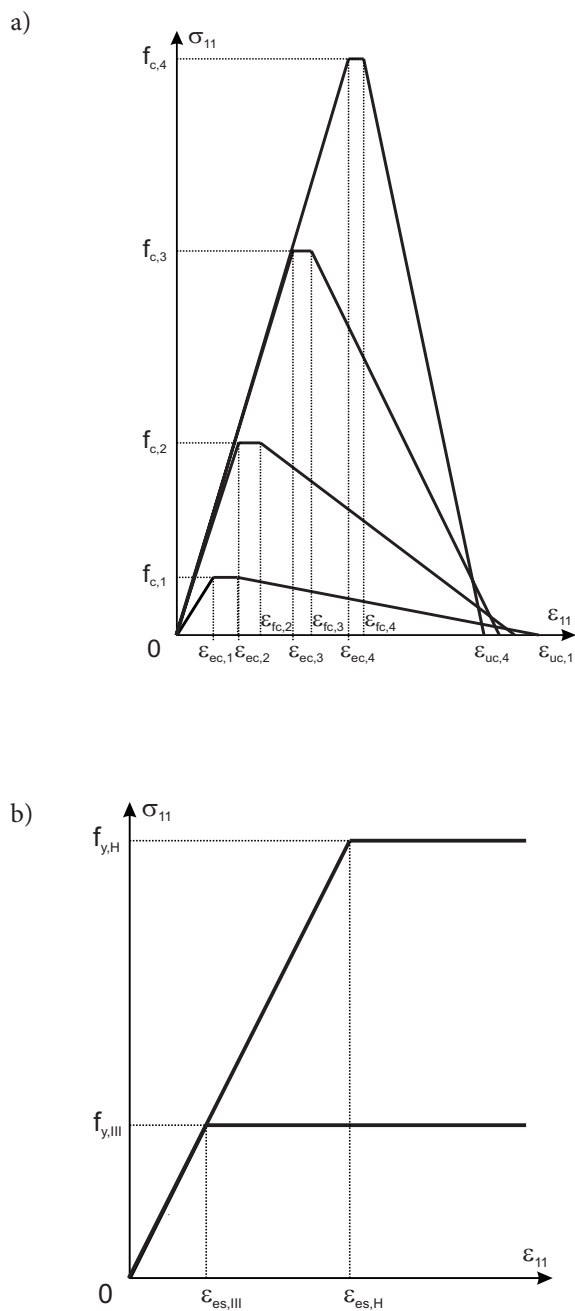
TABELA 1

Graniczne wartości parametrów opisujących model betonu

Klasa betonu	$f_c$ [MPa]	$f_t$ [MPa]	$\varepsilon_{ec}$ [‰]	$\varepsilon_{fc}$ [‰]	$\varepsilon_{uc}$ [‰]	$E_c$ [GPa]
C30	30	3	1,20	2,00	12,00	25,0
C100	100	10	2,08	2,80	11,25	48,0
C200	200	20	3,88	4,49	10,71	51,50
C300	300	30	5,71	6,21	10,21	52,5

Natomiast interpretację graficzną parametrów materiałowych opisujących model konstytutywny betonu przedstawiono na rysunku 2a, w płaszczyźnie naprężeń i odkształceń dla jednoosiowego ściskania.

W przypadku zastosowania stali o podwyższonej wytrzymałości dokonano modyfikacji parametrów wytrzymałościowych stali zbrojenia głównego tarczy, tj. prętów o średnicy prętów  $\phi 8$ . Modyfikacja polegała na zastosowaniu stali klasy A-H o granicy plastyczności  $f_y = 690$  MPa. Dla przyjętych stali zbrojeniowych interpretację graficzną parametrów materiałowych opisujących model



Rys. 2. Interpretacja graficzna parametrów materiałowych opisujących model konstytutywny:  
(a) betonu i (b) stali zbrojeniowej

sprężysto-idealnie-plastyczny przestawiono na rysunku 2b, w płaszczyźnie naprężeń i odkształceń dla jednoosiowego stanu naprężenia.

### 3. Analiza wyników numerycznych

W celu zilustrowania wpływu betonu bardzo wysokiej wytrzymałości na wyężenie prostokątnych tarcz żelbetowych przeprowadzono eksperymenty numeryczne dla tarczy o układzie zbrojenia jak w doświadczeniu [8] oraz ze zmodyfikowanymi parametrami opisującymi model konstytutywny betonu (beton klasy C30, C100, C200, C300).

Początkowo, analogicznie jak w pracy [15], oszacowano nośność analizowanej tarczy przy zróżnicowanej klasie zastosowanego betonu, przy zastosowaniu stali zbrojeniowej zwykłej klasy A-III o granicy plastyczności  $f_y = 240$  MPa, analogicznie jak w doświadczeniu [8]. W tym celu do obserwacji zmian przemieszczenia przyjęto punkt  $x_d$  na dolnej krawędzi w przekroju środkowym tarczy (rys. 1), w zależności od zmieniającej się intensywności równomiernie rozłożonego obciążenia na górnej powierzchni tarczy.

Na rysunku 3 zaprezentowano wykresy zależności przemieszczenia pionowego  $v_d$  punktu  $x_d$  w funkcji obciążenia  $P = p \times L$ . Do porównania wyników wykorzystano opracowania zawierające:

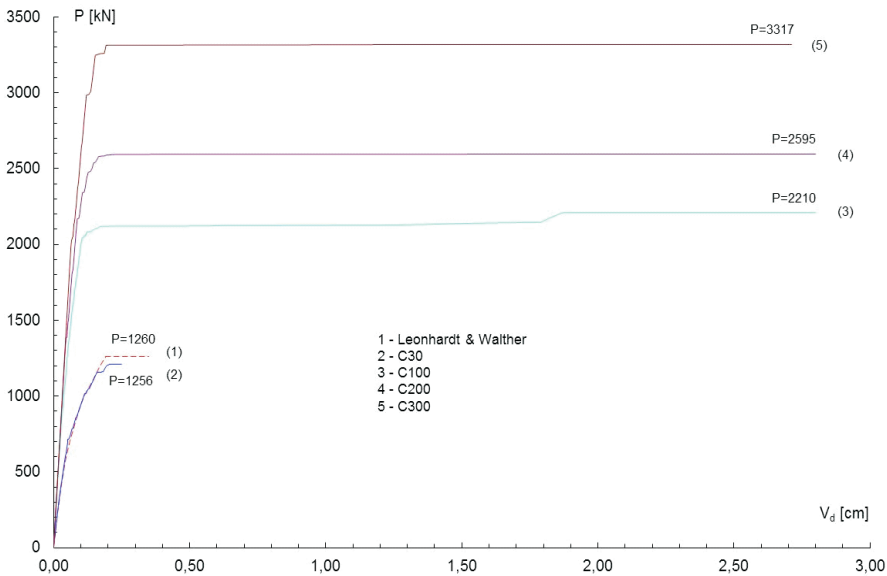
- 1 — wyniki doświadczenia F. Leonhardta, R. Walthera [8],
- 2 — rozwiązania wg proponowanej metody dla betonu zwykłego [1],
- 3, 4, 5 — rozwiązania wg proponowanej metody dla betonów o bardzo wysokiej wytrzymałości [15].

W doświadczeniu [8] zarejestrowano poziom statycznej nośności tarczy przy obciążeniu  $P = 1260$  kN, tj. w chwili zniszczenia tarczy. Na podstawie proponowanej metody numerycznej [1] dla betonu zwykłego C30 zarejestrowano „nieskończenie” duże przyrosty przemieszczeń punktu  $x_d$  będące objawem zniszczenia tarczy przy obciążeniu  $P = 1256$  kN odpowiadającym statycznej nośności tarczy.

Natomiast dla betonów o bardzo wysokiej wytrzymałości zarejestrowano zróżnicowane zachowania w zależności od klasy betonu [15]. I tak, nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń punktu  $x_d$ , będące objawem zniszczenia tarczy, zarejestrowano:

- dla betonu C100 przy obciążeniu  $P = 2210$  kN,
- dla betonu C200 przy obciążeniu  $P = 2595$  kN,
- dla betonu C300 przy obciążeniu  $P = 3317$  kN.

Na podstawie analizy otrzymanych wyników [15] stwierdzono, że uwzględnienie własności betonu o bardzo wysokiej wytrzymałości, o 3-, 6- i 10-krotnie większej wytrzymałości betonu w stosunku do przyjętej w doświadczeniu [8],



Rys. 3. Zależność obciążenie — przemieszczenie w punkcie środkowym na dolnej krawędzi tarczy dla stali zbrojeniowej klasy A-III

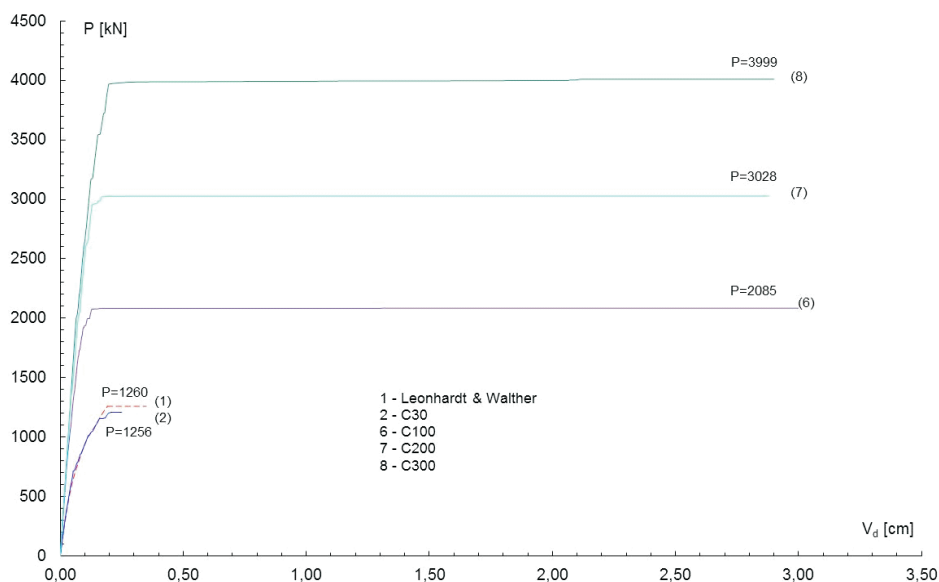
i rozwiązaniu numerycznym [1] spowodowało znaczne zwiększenie sztywności konstrukcji oraz odpowiednio 1,8-, 2,1- i 2,6-krotny wzrost poziomu statycznej nośności tarczy względem wyniku doświadczalnego [8] i numerycznego [1]. Analiza uzyskanych rezultatów dla poszczególnych wytrzymałości betonów na podstawie zależności  $P - v_d$  zamieszczona w [15] wskazuje nieproporcjonalny przyrost nośności tarczy w porównaniu z przyrostem wytrzymałości betonu. Nieproporcjonalny wzrost nośności tarczy w porównaniu do znacznego zwiększenia wytrzymałości betonu sygnalizuje wpływ zmiany mechanizmu wyęźnienia i zarysowania tarczy żelbetowej przy ustalonym stopniu zbrojenia i wytrzymałości stali zbrojeniowej.

W celu ustalenia przyczyn takiego nieproporcjonalnego przyrostu nośności tarczy należy przeanalizować wpływ zmiany parametrów wytrzymałościowych stali zbrojeniowej zbrojenia głównego na nośność tarczy. Stal zwykła klasy A-III o granicy plastyczności  $f_y = 240$  MPa została zastąpiona stalą o podwyższonej wytrzymałości klasy A-H o granicy plastyczności  $f_y = 690$  MPa.

Na rysunku 4 zaprezentowano wykresy zależności przemieszczenia pionowego punktu  $x_d$  w funkcji obciążenia  $P = p \times L$ . W przypadku zastosowania stali o podwyższonej wytrzymałości, nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń punktu  $x_d$ , będące objawem zniszczenia tarczy, zarejestrowano:

- dla betonu C100 przy obciążeniu  $P = 2085$  kN,
- dla betonu C200 przy obciążeniu  $P = 3028$  kN,
- dla betonu C300 przy obciążeniu  $P = 3999$  kN.



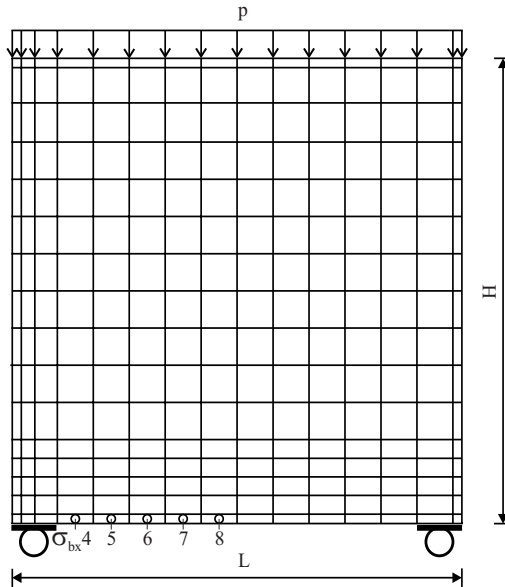


Rys. 4. Zależność obciążenie — przemieszczenie w punkcie środkowym na dolnej krawędzi tarczy dla stali zbrojeniowej klasy A–H

W efekcie zarejestrowano zróżnicowany poziom nośności przy zastosowaniu tej samej klasy betonu, ale innej stali zbrojeniowej. W przypadku tarczy wykonanej z betonu klasy C100 zaobserwowano spadek nośności tarczy z  $P = 2210$  kN do poziomu obciążenia  $P = 2085$  kN, co stanowi 94% nośności tarczy przy zastosowaniu stali zbrojeniowej zwykłej, tj. klasy A–III. W przypadku zastosowania betonu klasy C200 i C300 zaobserwowano nieznaczny wzrost nośności tarczy, odpowiednio:

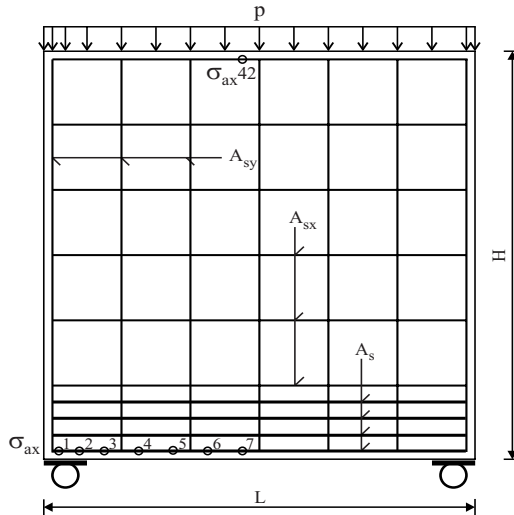
- dla betonu C200 z poziomu  $P = 2595$  kN do poziomu obciążenia  $P = 3028$  kN, co stanowi 117% nośności tarczy przy zastosowaniu stali zbrojeniowej zwykłej, tj. klasy A–III;
- dla betonu C300 z poziomu  $P = 3317$  kN do poziomu obciążenia  $P = 3999$  kN, co stanowi 121% nośności tarczy przy zastosowaniu stali zbrojeniowej zwykłej, tj. klasy A–III.

W dalszej części pracy przeprowadzono szczegółową analizę stanu naprężenia wraz z analizą mechanizmu zniszczenia tarczy żelbetowej dla poszczególnych wytrzymałości betonu z zastosowaniem tylko zbrojenia o wysokiej wytrzymałości klasy A–H. W tym celu dokonano analizy rozkładów naprężeń w materiale matrycy betonowej i stali zbrojeniowej w charakterystycznych przekrojach tarczy żelbetowej. Do analizy przyjęto rozkład naprężeń normalnych w matrycy betonowej w punktach obliczeniowych ( $\sigma_{b \times 4} - \sigma_{b \times 8}$ ) w dolnej warstwie oznaczonych na rysunku 5 oraz rozkład naprężeń normalnych w stali zbrojeniowej w punktach obliczeniowych ( $\sigma_{A \times 1} - \sigma_{A \times 7}$ ) w dolnej warstwie oznaczonych na rysunku 6.



Rys. 5. Oznaczenie punktów obserwacji zmian naprężeń w wybranych punktach obliczeniowych matrycy betonowej

Następnie zobrazowano wyężenie tarczy w postaci powierzchniowego rozkładu średnich naprężeń normalnych i przeanalizowano rozwój stref niesprężystego zachowania betonu w procesie obciążania górnej krawędzi tarczy.



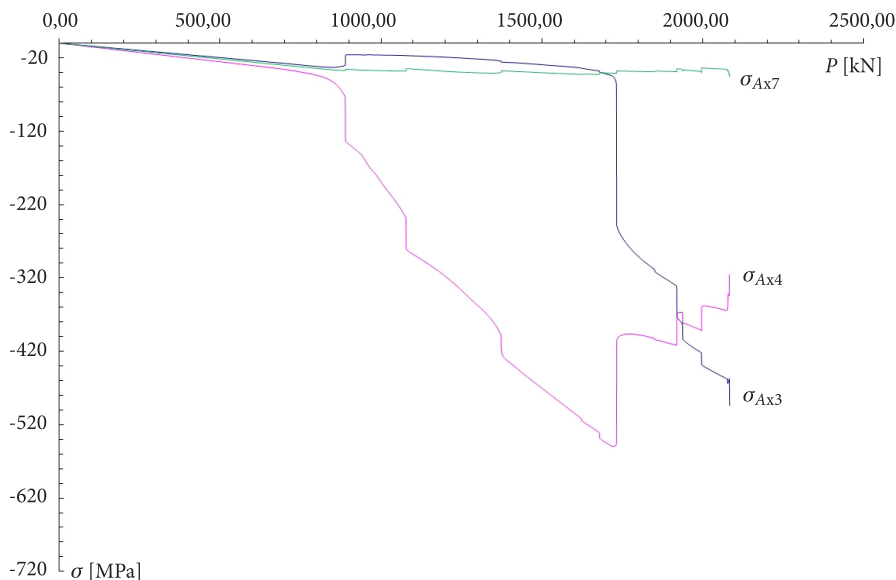
Rys. 6. Oznaczenie punktów obserwacji zmian naprężeń w wybranych punktach obliczeniowych stali zbrojeniowej

### 3.1. Tarcza żelbetowa z betonu C100

Poniżej przedstawiono wyniki numeryczne dotyczące tarczy wykonanej z betonu o wytrzymałości na ściskanie 100 MPa oznaczonej jako C100 i zbrojonej stalą o podwyższonej wytrzymałości klasy A-H o granicy plastyczności  $f_y = 690$  MPa.

Na podstawie analizy zależności przemieszczenia pionowego punktu  $x_d$  od sumarycznego obciążenia  $P$  (rys. 4) zarejestrowano nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń punktu  $x_d$  będące objawem zniszczenia tarczy — dla obciążenia  $P = 2085$  kN.

Potwierdzeniem faktu, że obciążenie  $P = 2085$  kN stanowi nośność analizowanej tarczy, jest analiza zmienności naprężeń w betonie i stali na dolnej krawędzi tarczy w zależności od poziomu obciążenia, tj. siły  $P$  jako sumarycznego obciążenia usytuowanego na górnej krawędzi analizowanej tarczy.

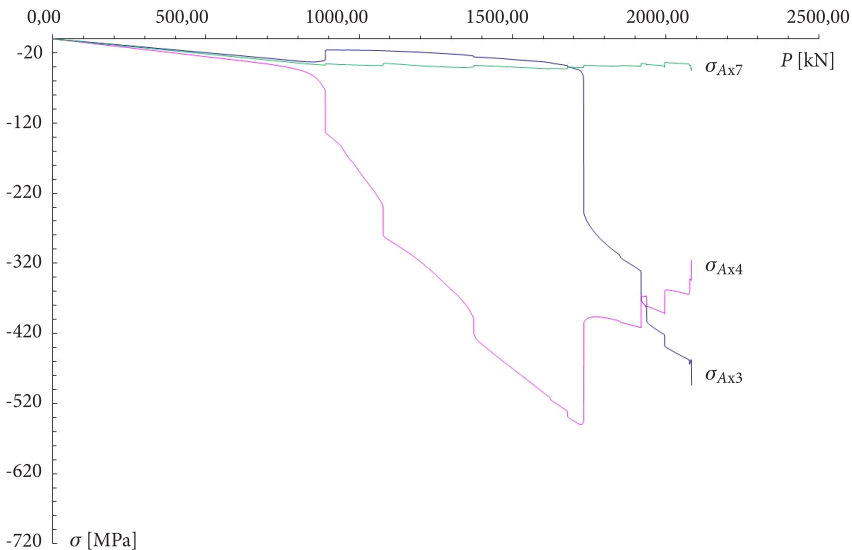


Rys. 7. Zależność naprężenia w zbrojeniu głównym od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  dla betonu C100 i stali klasy A-H

Na rysunku 7 przedstawiono zmienności naprężeń w stali na dolnej krawędzi tarczy w zależności od poziomu sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$ . Do poziomu obciążenia  $P = 900$  kN można zaobserwować sprężystą pracę stali zbrojeniowej w dolnej części tarczy, charakteryzującą się w przybliżeniu liniowym przyrostem naprężeń. Przy dalszym wzroście obciążenia widoczny jest gwałtowny wzrost naprężeń w stali w obszarze bezpośrednio poza krawędzią podpory (ozn.  $\sigma_{Ax4}$ ) do poziomu około 560 MPa. Następnie widoczny jest proces lokalnego odciążenia stali w tym

obszarze z równoczesnym gwałtownym wzrostem naprężeń w stali do poziomu około 240 MPa w sąsiednim obszarze, tj. stali zlokalizowanej bezpośrednio nad krawędzią podpory (ozn.  $\sigma_{Ax3}$ ). Przy dalszym wzroście obciążenia obserwuje się dalszy wzrost naprężeń (wytężenia) stali nad krawędzią podpory (ozn.  $\sigma_{Ax3}$ ) z równoczesnym powolnym procesem odciążenia (zmniejszania się naprężeń) w tej stali w sąsiednim przekroju, tj. poza krawędzią podpory (ozn.  $\sigma_{Ax4}$ ). Opisany proces wskazuje na redystrybucję naprężeń w zbrojeniu głównym z obszaru poza podporą do obszaru w bezpośrednim sąsiedztwie nad podporą. Wytężenie stali w przekroju przęsłowym, w całym procesie obciążania, jest na stosunkowo niskim poziomie, co świadczy o niskim wytężeniu stali w przekroju przęsłowym. W efekcie zachowanie stali wskazuje na lokalizację mechanizmu zniszczenia tarczy w obszarze bezpośrednio nad krawędzią podpory.

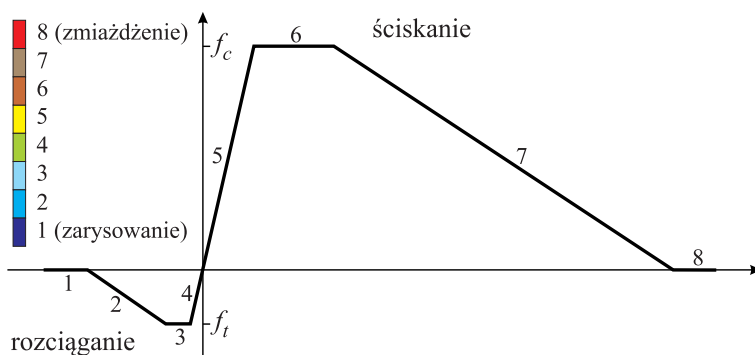
Analogiczne zachowanie wykazuje matryca betonowa. Początkowy proces uplastycznienia, a następnie zarysowania można zaobserwować bezpośrednio poza krawędzią podpory w dolnej części tarczy (ozn.  $\sigma_{bx5}$ ) już przy poziomie obciążenia  $P = 890$  kN (rys. 8). Przy dalszym wzroście obciążenia uplastycznieniu, a następnie przy poziomie obciążenia  $P = 1730$  kN zarysowaniu uległ beton w sąsiednim obszarze, tj. bliżej podpory (ozn.  $\sigma_{bx4}$ ). Beton w strefie przęsłowej (ozn.  $\sigma_{bx6}$ ,  $\sigma_{bx8}$ ) prawie w całym zakresie obciążeń pracował w zakresie sprężystym — dopiero tuż przed zniszczeniem tarczy uległ lokalnemu zarysowaniu.



Rys. 8. Zależność naprężenia od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  w wybranych punktach matrycy betonowej na dolnej krawędzi tarczy dla betonu C100 i stali klasy A-H

Jakościowy rozwój stref maksymalnego wyężenia tarczy, jak również mechanizm jej zniszczenia można przeanalizować na podstawie ilustracji dotyczących graficznego zobrazowania rozwoju stref niesprężystego zachowania się betonu w procesie obciążenia. Z uwagi na symetrię konstrukcji prezentowane wyniki dotyczą lewej połowy analizowanej tarczy. Jako miarę wyężenia przyjętego do zobrazowania przyjęto średnie naprężenia normalne  $\sigma_0$  w zależności od poziomu sumarycznego obciążenia. Obserwacji poddano zmiany w czasie konfiguracji obszarów tarczy znajdujących się w różnych stanach wyężenia, zgodnie z przyjętym modelem odkształcania betonu. Na rysunku 9 przedstawiono schematycznie oznaczenie stanów naprężenia  $\sigma_0$  z graficznym przyporządkowaniem oznaczeń poszczególnym fazom pracy betonu:

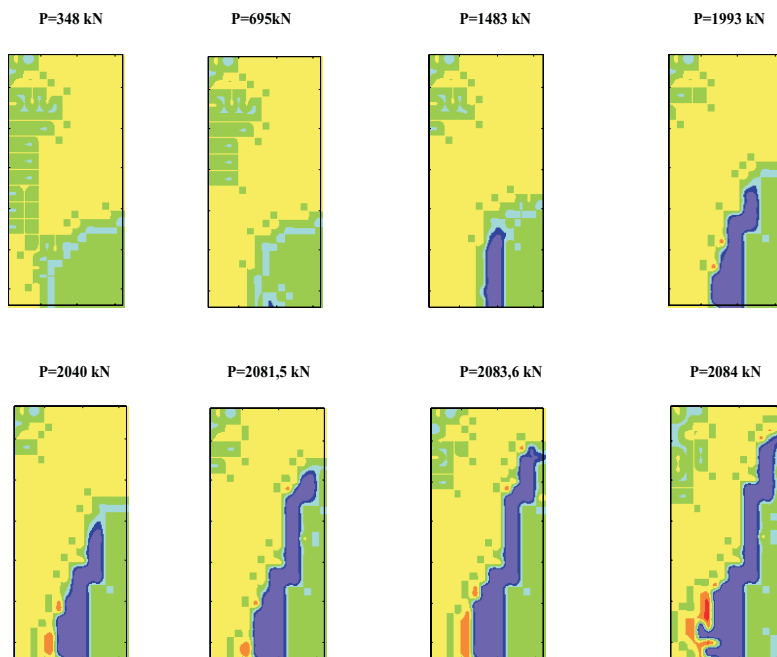
- faza sprężysta, odpowiednio:
  - przy rozciąganiu — faza 4 i przy ściskaniu — faza 5,
- faza idealnego płynięcia, odpowiednio:
  - przy rozciąganiu — faza 3 i przy ściskaniu — faza 6,
- faza osłabienia materiałowego, odpowiednio:
  - przy rozciąganiu — faza 2 i przy ściskaniu — faza 7,
- faza zniszczenia betonu, odpowiednio:
  - przy rozciąganiu (zarysowanie) — faza 1 i przy ściskaniu (zmiażdżenie) — faza 8.



Rys. 9. Schemat oznaczenia stanów naprężenia

Na rysunku 10 prezentowana jest zmienność stref niesprężystego zachowania betonu w zależności od sumarycznego obciążenia. Dla obciążenia  $P = 348$  kN widać pojawienie się pierwszych procesów plastycznych w betonie w strefie przypodporowej. W tej strefie beton początkowo uległ uplastycznieniu w procesie rozciągania, tj. znalazł się w fazie idealnego płynięcia, a następnie przeszedł w fazę osłabienia materiałowego. Beton w pozostałej części tarczy pracuje w zakresie sprężystym zarówno na ściskanie, jak i na rozciąganie. Dalszy proces obciążenia spowodował,

że beton w pobliżu strefy przypodporowej, przy poziomie obciążenia  $P = 695$  kN, uległ zarysowaniu.



Rys. 10. Zmienność konfiguracji stref niesprężystego zachowania betonu w zależności od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  dla betonu C100 klasy A-H

Jednocześnie w dalszym sąsiedztwie obszaru przypodporowego obserwuje się kolejne fazy pracy betonu na rozciąganie: pracę w zakresie sprężystym przechodzącą aż do wystąpienia fazy osłabienia materiałowego włącznie. Przy dalszym wzroście obciążenia  $P = 1483$  kN stopniowy rozwój obszaru zarysowanego betonu następuje w strefie bezpośrednio poza krawędzią podpory początkowo ku górze, a następnie ukośnie w kierunku przęsła —  $P = 1993$  kN. Dodatkowo można zaobserwować rozwój obszaru zarysowanego betonu w kierunku krawędzi podpory. Równocześnie można zobaczyć początkowe lokalne uplastycznienie betonu na ściskanie w tej strefie ( $P = 1993$  kN). Dalszy wzrost obciążenia spowodował rozwój strefy uplastycznionego betonu przy ściskaniu bezpośrednio nad podporą —  $P = 2040$  kN. Przy wzroście obciążenia do poziomu  $P = 2081,5$  kN widoczny jest proces lokalnego odciążenia betonu w obszarze nad podporą z równoczesnym powstaniem obszarów uplastycznionego betonu przy ściskaniu w przekroju przęsłowym w górnej części tarczy. Przy dalszym wzroście obciążenia ( $P = 2083,6$  kN) widoczny jest dalszy proces rozwoju obszaru uplastycznionego betonu przy ściskaniu w obszarze bezpośrednio nad podporą z równoczesnym pojawieniem się kolejnego obszaru uplastycznionego

betonu przy ściskaniu w przekroju przęsłowym w górnej części tarczy. Tuż przed zniszczeniem tarczy ( $P = 2084$  kN) można zaobserwować proces miażdżenia betonu w obszarze bezpośrednio nad podporą, który doprowadził do zniszczenia tarczy.

### 3.2. Tarcza żelbetowa z betonu C200

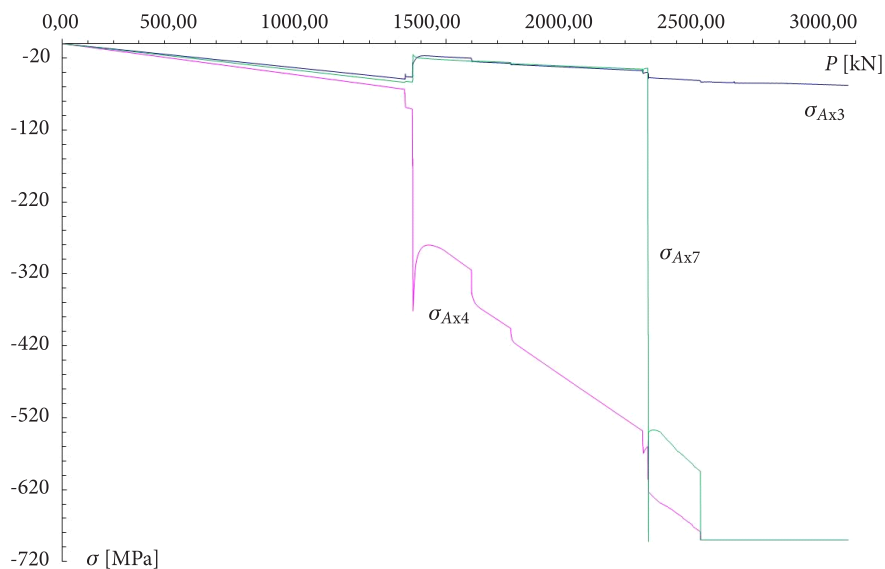
Poniżej przedstawiono wyniki numeryczne dotyczące tarczy wykonanej z betonu o wytrzymałości na ściskanie 200 MPa oznaczonej jako C200 i zbrojenia stałą o podwyższonej wytrzymałości klasy A–H o granicy plastyczności  $f_y = 690$  MPa.

Na podstawie analizy zależności przemieszczenia pionowego punktu  $x_d$  od sumarycznego obciążenia  $P$  (rys. 4) zarejestrowano nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń punktu  $x_d$  będące objawem zniszczenia tarczy dla obciążenia  $P = 3028$  kN.

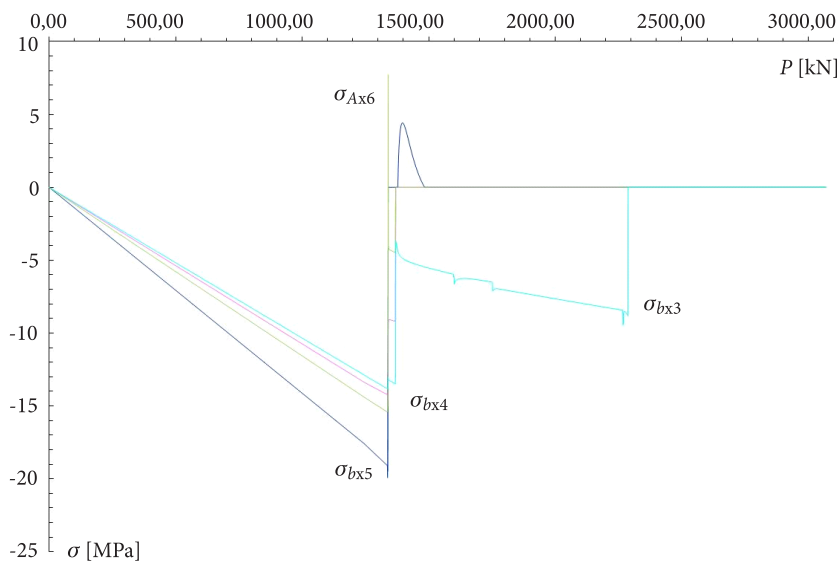
Potwierdzeniem faktu, że obciążenie  $P = 3028$  kN stanowi nośność analizowanej tarczy, jest analiza zmienności naprężeń w betonie i stali na dolnej i górnej krawędzi tarczy w zależności od poziomu obciążenia, tj. siły  $P$  jako sumarycznego obciążenia usytuowanego na górnej krawędzi analizowanej tarczy.

Na rysunku 11 przedstawiono zmienności naprężeń w stali na dolnej krawędzi tarczy w zależności od poziomu sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$ . Do poziomu obciążenia  $P = 1300$  kN można zaobserwować sprężystą pracę stali zbrojeniowej w dolnej części tarczy, charakteryzującą się w przybliżeniu liniowym przyrostem naprężeń, analogicznie jak dla tarczy wykonanej z betonu C100. Przy dalszym wzroście obciążenia widoczny jest analogiczny gwałtowny wzrost naprężeń w stali w obszarze bezpośrednio poza krawędzią podpory (ozn.  $\sigma_{A \times 4}$ ) do poziomu około 400 MPa. Następnie widoczny jest proces lokalnego odciążenia stali w tym obszarze i dalszy systematyczny wzrost poziomu naprężeń wraz ze wzrostem sumarycznego obciążenia — przy poziomie obciążenia  $P = 2490$  kN stal w tym obszarze uległa uplastycznieniu. W przypadku obszaru przęsłowego (ozn.  $\sigma_{A \times 7}$ ) można zaobserwować gwałtowny skok naprężeń przy obciążeniu  $P = 2290$  kN, chwilowe lokalne odciążenie, a następnie uplastycznienie stali. Obserwowane wyężenie stali wskazuje, że po przekroczeniu obciążenia  $P = 2290$  kN nastąpiła redystrybucja naprężeń w zbrojeniu głównym z obszaru przypodporowego w kierunku przekroju przęsłowego. Wyężenie stali w przekroju nad krawędzią podpory (ozn.  $\sigma_{A \times 3}$ ) w całym procesie obciążania jest na stosunkowo niskim poziomie, co świadczy o niskim wyężeniu stali, odmiennie niż w tarczy wykonanej z betonu C100 — w efekcie zachowanie stali wskazuje na lokalizację mechanizmu zniszczenia tarczy w obszarze przęsłowym.

Analogiczne zachowanie wykazuje matryca betonowa. Początkowy proces uplastycznienia, a następnie zarysowania można zaobserwować bezpośrednio poza krawędzią podpory w dolnej części tarczy (ozn.  $\sigma_{b \times 5}$ ) już przy poziomie obciążenia  $P = 1340$  kN (rys. 12). Równocześnie można zaobserwować w tym momencie odciążenie betonu w strefie przęsłowej (ozn.  $\sigma_{b \times 8}$ ), a następnie powolny wzrost naprężeń w betonie w obszarze przęsłowym.



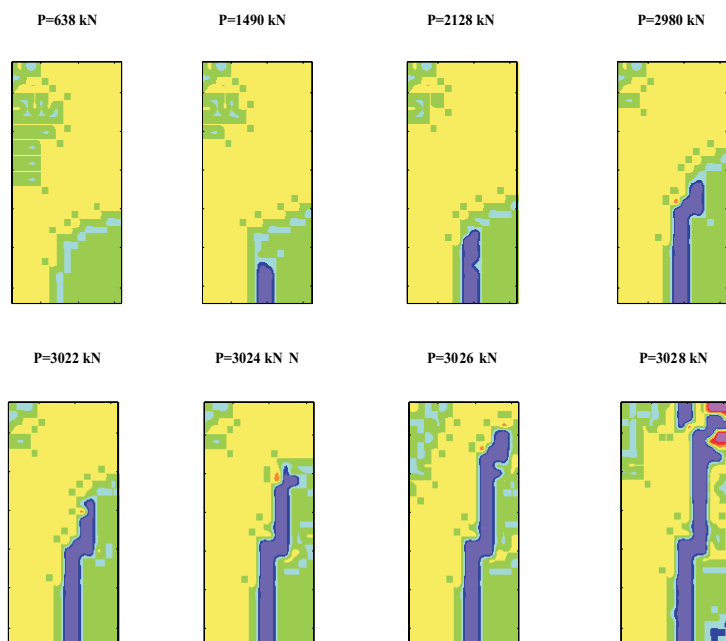
Rys. 11. Zależność naprężenia w zbrojeniu głównym od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  dla betonu C200 i stali klasy A-H



Rys. 12. Zależność naprężenia od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  w wybranych punktach matrycy betonowej na dolnej krawędzi tarczy dla betonu C200 i stali klasy A-H



Na rysunku 13 prezentowana jest zmienność stref niesprężystego zachowania betonu w zależności od sumarycznego obciążenia. Dla obciążenia  $P = 638$  kN obserwuje się pojawienie pierwszych procesów plastycznych w betonie w strefie przypodporowej. Przy poziomie obciążenia  $P = 1490$  kN beton w tej strefie początkowo uległ uplastycznieniu w procesie rozciągania, tj. znalazł się w fazie idealnego płynięcia, a następnie przeszedł w fazę osłabienia materiałowego i później uległ zarysowaniu. Beton w pozostałej części tarczy pracuje w zakresie sprężystym zarówno na ściskanie, jak i na rozciąganie. Przy dalszym wzroście obciążenia można obserwować stopniowy rozwój zarysowania betonu w strefie przypodporowej na kierunku pionowym. Przy obciążeniu  $P = 2980$  kN następuje rozwój zarysowanego betonu na kierunku ukośnym, tj. w kierunku przęsła. Równocześnie można zaobserwować początkowe lokalne uplastycznienie betonu na ściskanie w tej strefie. Przy dalszym wzroście obciążenia do poziomu  $P = 3022$  kN obserwuje się dalszy rozwój zarysowanego betonu na kierunku ukośnym w kierunku górnej krawędzi tarczy. Przy obciążeniu na poziomie  $P = 3026$  kN widoczny jest dalszy proces rozwoju obszaru uplastycznionego betonu przy ściskaniu w przekroju przęsłowym w sąsiedztwie górnej krawędzi tarczy. Tuż przed zniszczeniem tarczy ( $P = 3028$  kN) można zaobserwować proces miażdżenia betonu w strefie przęsłowej na górnej krawędzi tarczy.



Rys. 13. Zmienność konfiguracji stref niesprężystego zachowania betonu w zależności od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  dla betonu C200 klasy A-H

Przeprowadzona analiza zachowania matrycy betonowej potwierdza wcześniejszą ocenę i opis zachowania stali zbrojeniowej. Przekroczenie poziomu nośności tarczy spowodowało, że konstrukcja uległa zniszczeniu poprzez zmiążdżenie betonu w strefie przęsłowej na górnej krawędzi tarczy przy równoczesnym uplastycznieniu stali zbrojeniowej w tej strefie. Stal zbrojeniowa w przekroju przęsłowym w dolnej części tarczy uległa uplastycznieniu, a tym samym zniszczeniu charakterystycznemu dla mechanizmu belkowego.

### 3.3. Tarcza żelbetowa z betonu C300

Poniżej przedstawiono wyniki numeryczne dotyczące tarczy wykonanej z betonu o wytrzymałości na ściskanie 300 MPa, oznaczonej jako C300 i zbrojonej stalą o podwyższonej wytrzymałości klasy A–H o granicy plastyczności  $f_y = 690$  MPa.

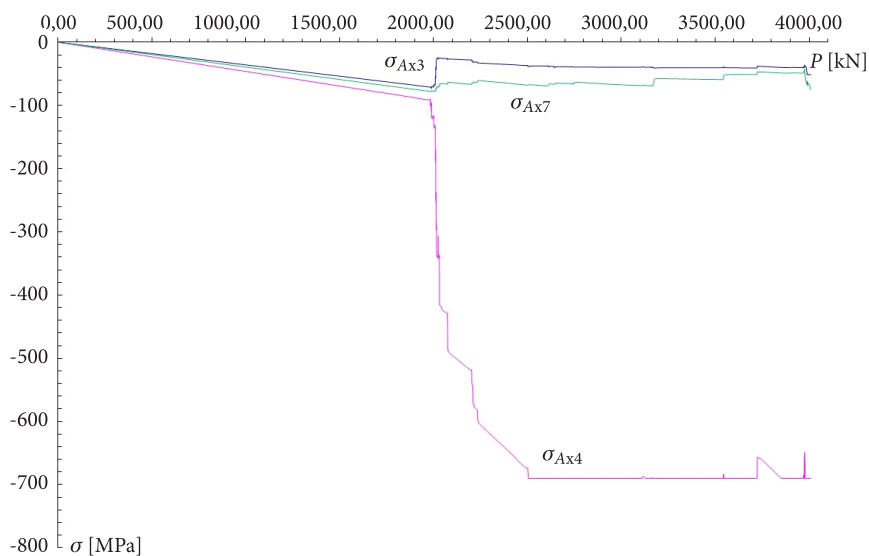
Na podstawie analizy zależności przemieszczenia pionowego punktu  $x_d$  od sumarycznego obciążenia  $P$  (rys. 4) zarejestrowano nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń punktu  $x_d$  będące objawem zniszczenia tarczy, dla obciążenia  $P = 3999$  kN.

Potwierdzeniem faktu, że obciążenie  $P = 3999$  kN stanowi nośność analizowanej tarczy, jest analogiczny jak dla tarczy z betonu C100 i C200 przebieg zmienności naprężeń w betonie i stali na dolnej krawędzi tarczy w zależności od poziomu obciążenia, tj. siły  $P$  jako sumarycznego obciążenia usytuowanego na górnej krawędzi analizowanej tarczy.

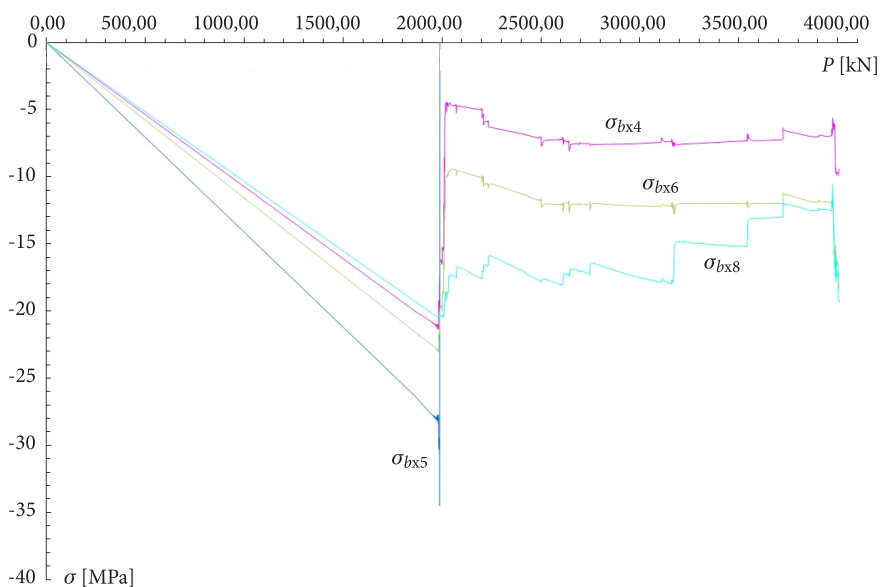
Na rysunku 14 przedstawiono zmienności naprężeń w stali na dolnej krawędzi tarczy w zależności od poziomu sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$ . Do poziomu obciążenia około  $P = 1980$  kN można zaobserwować sprężystą pracę stali zbrojeniowej w dolnej części tarczy. Po przekroczeniu poziomu tego obciążenia obserwuje się skokowy wzrost naprężeń stali bezpośrednio poza krawędzią podpory (ozn.  $\sigma_{A \times 4}$ ) analogiczną jak dla betonu C100 i C200. Przy poziomie obciążenia  $P = 2505$  kN widoczny jest początek procesu uplastycznienia się stali. Wytyżenie stali w przekroju przęsłowym (ozn.  $\sigma_{A \times 7}$ ), w całym procesie obciążania, jest na stosunkowo niskim poziomie, co świadczy o niskim wytyżeniu stali w przekroju przęsłowym.

Analogiczne zachowanie wykazuje matryca betonowa. Początkowy proces uplastycznienia przy rozciąganiu, a następnie zarysowania można zaobserwować bezpośrednio poza krawędzią podpory w dolnej części tarczy (ozn.  $\sigma_{b \times 5}$ ) przy poziomie obciążenia  $P = 1990$  kN (rys. 15). Beton w strefie przęsłowej (ozn.  $\sigma_{b \times 6}$ ,  $\sigma_{b \times 8}$ ) prawie w całym zakresie obciążeń pracował w zakresie sprężystym.

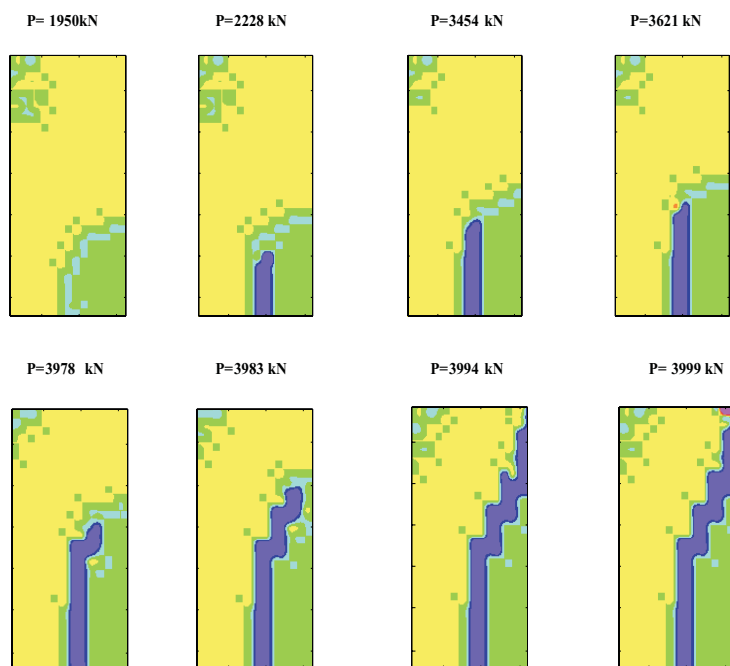
Jakościowy rozwój stref maksymalnego wytyżenia tarczy, jak również mechanizm jej zniszczenia można przeanalizować na podstawie ilustracji dotyczących graficznego zobrazowania rozwoju stref niesprężystego zachowania się betonu w procesie obciążenia (rys. 16). Dla obciążenia  $P = 1950$  kN obserwuje się pojawienie pierwszych procesów plastycznych w betonie w strefie przypodporowej. W tej



Rys. 14. Zależność napężenia w zbrojeniu głównym od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  dla betonu C300 i stali klasy A-H



Rys. 15. Zależność napężenia od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  w wybranych punktach matrycy betonowej na dolnej krawędzi tarczy dla betonu C300 i stali klasy A-H



Rys. 16. Zmienność konfiguracji stref niesprężystego zachowania betonu w zależności od sumarycznego obciążenia zewnętrznego  $P$  dla betonu C300 klasy A–H

strefie beton początkowo uległ uplastycznieniu w procesie rozciągania, tj. znalazł się w fazie idealnego płynięcia, a następnie przeszedł w fazę osłabienia materiałowego, analogicznie jak dla tarczy wykonanej z betonu C100 i C200. Beton w pozostałej części tarczy pracuje w zakresie sprężystym zarówno na ściskanie, jak i na rozciąganie.

Dalszy proces obciążania powodował, że beton w pobliżu strefy przypodporowej uległ zarysowaniu —  $P = 2228$  kN. Przy dalszym wzroście obciążenia można zaobserwować stopniowy rozwój obszaru zarysowanego betonu w strefie bezpośrednio poza krawędzią podpory, analogicznie jak dla tarczy wykonanej z betonu C100 i C200, tj. w kierunku pionowym. Równocześnie, przy obciążeniu  $P = 3621$  kN, można zaobserwować początkowe lokalne uplastycznienie betonu na ściskanie w części środkowej tarczy bezpośrednio nad obszarem zarysowanego betonu. Przy dalszym wzroście obciążenia do poziomu  $P = 3978$  kN obserwuje się dalszy rozwój zarysowanego betonu na kierunku ukośnym w kierunku górnej krawędzi tarczy, przy równoczesnym lokalnym odciążeniu betonu pracującego na ściskanie w tej strefie. Dalszy wzrost obciążenia do poziomu  $P = 3983$  kN powoduje dalszy rozwój zarysowanego betonu na kierunku ukośnym w kierunku górnej krawędzi tarczy. Przy obciążeniu na poziomie  $P = 3994$  kN widoczny jest dalszy proces rozwoju obszaru zarysowanego betonu do obszaru w bezpośrednim sąsiedztwie górnej krawędzi. Tuż przed zniszczeniem tarczy ( $P = 3999$  kN) można zaobserwować gwałtowny

proces uplastycznienia betonu przy ściskaniu, a w konsekwencji miażdżenia betonu w strefie przęśłowej na górnej krawędzi tarczy.

Przeprowadzona analiza zachowania matrycy betonowej potwierdza ocenę i opis zachowania stali zbrojeniowej. Przekroczenie poziomu nośności tarczy spowodowało, że konstrukcja uległa zniszczeniu poprzez zmiżdżenie betonu w strefie przęśłowej na górnej krawędzi tarczy przy równoczesnym uplastycznieniu stali zbrojeniowej w tej strefie.

#### 4. Zakończenie

W pracy przedstawiono analizę stanu wyężenia żelbetowej tarczy obciążonej statycznie z uwzględnieniem betonu bardzo wysokiej wytrzymałości i stali o podwyższonej wytrzymałości. Wyznaczono nośność elementu tarczy żelbetowej w przyrostowym procesie obciążania statycznego. Przeprowadzono analizę wyężenia tarczy żelbetowej w funkcji dwóch wybranych parametrów: wytrzymałości betonu oraz wytrzymałości stali. Przedstawiono analizę porównawczą uzyskanych wyników z wynikami doświadczalnymi zaczerpniętymi z literatury oraz wynikami numerycznymi uzyskanymi dla betonu zwykłego. W ramach przeprowadzonej analizy stwierdzono nieproporcjonalnie mały przyrost nośności tarczy w porównaniu z przyrostem wytrzymałości betonu. Zwiększenie wytrzymałości stali zbrojeniowej nie prowadzi do znaczącego zwiększenia nośności tarczy, jednak ma wpływ na mechanizm wyężenia i zniszczenia tarczy żelbetowej w postaci zróżnicowanego przebiegu koncentracji i zmian obszarów zarysowania i zmiżdżenia w matrycy betonowej oraz obszarów uplastycznionego zbrojenia tarczy żelbetowej. Prezentowane wyniki potwierdzają konieczność prowadzenia badań wpływu parametrów modelu konstytutywnego betonu o ultrawysokiej wytrzymałości na mechanizm wyężenia elementów żelbetowych.

Praca powstała w wyniku zadań badawczych zrealizowanych w ramach pracy badawczej statutowej nr 934, prowadzonej w Wydziale Inżynierii Łądowej i Geodezji Wojskowej Akademii Technicznej.

Artykuł wpłynął do redakcji 13.07.2016 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 4.10.2016 r.

#### LITERATURA

- [1] CICHORSKI W., STOLARSKI A., *Analizy stanu przemieszczenia niesprężystej tarczy żelbetowej obciążonej statycznie*, Biuletyn WAT, 50, 5, 2001, 5-20.
- [2] GAWIN D., MAJORAMA C.E., PESAVENTO F., SCHREFLER B.A., *Non-linear modelling of behaviour of High Performance Concrete structures during fire*, 3rd International Conference on Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Concrete Structures, Wrocław – Świeradów Zdrój, Poland, June 16-19, 1999, 69-74.

- [3] HOŁA J., KAPELKO A., PSZONKA A., *Acoustic emission recorded during failure loading of high-strength concrete*, 3rd International Conference on Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Concrete Structures, Wrocław – Świeradów Zdrój, Poland, June 16-19 1999, 95-98.
- [4] HUDOBA I., MUŠKOVÁ L., *Specific Properties of the High Strength/High Performance Concrete Reinforced by Steel Strip Fibre Reinforcement*, 3rd International Conference on Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Concrete Structures, Wrocław – Świeradów Zdrój, Poland, June 16-19, 1999, 99-101.
- [5] JASICZAK J., WDOWSKA A., RUDNICKI T., *Betony ultrawysokowartościowe*, Stowarzyszenie Producentów Cementu, Kraków, 2008.
- [6] KAMIŃSKA M.E., MISZCZAK J., *Experimental and analytical aspects of HSC confinement in tied slender columns*, 3rd International Conference on Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Concrete Structures, Wrocław – Świeradów Zdrój, Poland, June 16-19, 1999, 109-114.
- [7] KAMIŃSKA M.E., *High-strength Concrete and steel interaction in RC members*, Cement and Concrete Composites, 24, 2002, 281-295.
- [8] LEONHARDT F., WALTHER R., *Wandartige träger*, Report, Deutscher Ausschub für Stahlbeton, 229, Berlin, Germany, 1966.
- [9] MAJORAMA C.E., SALOMONI V.A., SCHREFLER B.A., *A constitutive relationship for high performance and ultra high performance concrete*, The Euro-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures, Badgastein, Austria, 31 March–3 April 1998, 1, 203-208.
- [10] OŽBOLT J., MEŠTROVIĆ D., LI Y.J., ELIGHAUSEN R., *Compression Failure of Beams Made of Different Concrete Types and Sizes*, Journal of Structural Engineering, 126, 2, 2000, 200-209.
- [11] RASHID M.A., MANSUR M.A., *Reinforced high-strength concrete beams in flexure*, ACI „Structural Journal” 2005, vol. 102, No. 3, 462-471.
- [12] SMARZEWSKI P., *Analizy wytrzymałości belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości*, Modelowanie Inżynierskie, t. 14, nr 45, rok 2012 (Zeszyt Naukowy Katedry Mechaniki Stosowanej Wydziału Mechanicznego Politechniki Śląskiej), 139-144.
- [13] STOLARSKI A., CICHORSKI W., *Modelowanie statycznego i dynamicznego zachowania tarcz żelbetowych*, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Studia z Zakresu Inżynierii, 51, Warszawa, 2002.
- [14] STOLARSKI A., *Model dynamicznego odkształcania betonu*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 37, 3-4, 1991, 405-447.
- [15] STOLARSKI A., CICHORSKI W., *Oszacowanie nośności tarczy żelbetowej z uwzględnieniem betonu bardzo wysokiej wytrzymałości*, Biuletyn WAT, 51, 2, 2002, 49-67.
- [16] JASICZAK J., WDOWSKA A., RUDNICKI T., *Betony ultrawysokowartościowe*, Stowarzyszenie Producentów Cementu, Kraków, 2008.

W. CICHORSKI, A. STOLARSKI

### Effort analysis of the reinforced concrete deep beam of very high strength structural materials

**Abstract.** The paper presents an analysis of the influence of high-strength concrete and reinforcing steel on the effort of the rectangular reinforced concrete deep beams taking into account physical nonlinearity of structural materials: concrete and reinforcing steel. The analysis was carried out on the basis of the method presented in [1]. The results of numerical solutions with particular emphasis on the displacement and stress states of a deep beam in the incremental static loading process, were presented. The obtained results were compared with experimental ones for normal concrete [3].

---

The correctness of the assumptions and models of deformation of concrete and steel as well as efficiency of the method of analysis, proposed in [1] for the numerical simulation of the behaviour of reinforced concrete deep beam made of high-strength concrete, was confirmed.

**Keywords:** mechanics of structures, reinforced concrete structures, deep beams, static load, physical nonlinearity

**DOI:** 10.5604/12345865.1228960

