

**Dariusz Spalek**  
**Politechnika Śląska**  
**Wydział Elektryczny**  
**Instytut Elektrotechniki i Informatyki**

## SKŁADNIK POYNTINGA W OPISIE SIŁ I MOMENTÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH

### POYNTING COMPONENT OF ELECTROMAGNETIC FORCES AND TORQUES

**Streszczenie:** Artykuł prezentuje analityczne obliczenia sił i momentów sił elektromagnetycznych w przykładowych przetwornikach elektromechanicznych których może ujawniać się składnik sił Poyntinga. Składnik ten związany jest z polami: elektrycznym i magnetycznym o bardzo wysokich częstotliwościach. Zaprezentowano wyniki obliczeń sił oraz momentów sił dla hipotetycznych – z praktycznego punktu widzenia – przetworników elektromechanicznych. Zwrócono uwagę, iż teoretycznie nie zachodzi równoważność metod: koenergii i Maxwella w przypadku gdy pojawia się niezerowy składnik sił Poyntinga.

**Abstract:** The paper has dealt with problem of electromagnetic force or torque of calculation. It has been shown the influence of Poynting component on force/torque balance. The Poynting force component depends on both electric and magnetic fields, and it may appear at high frequency fields. The main problem deals with the problem of equivalence of both Maxwell and coenergy methods. These two methods give the same results **only if electromagnetic field impulse force can be neglected**. The Poynting force component **can not be described** by the coenergy method.

**Słowa kluczowe:** składnik sił Poyntinga, siły i momenty sił elektromagnetyczne, zadania testowe  
**Keywords :** Poynting force component, electromagnetic force and torque, benchmarks

#### 1. Wstęp

W celu wyznaczenia składowych sił bądź momentu sił powstających w przetworniku elektromechanicznym wykorzystuje się tensor Maxwella pola oraz funkcję koenergii [1, 2]. Artykuł analizuje jeden ze składników sił działających w polu elektromagnetycznym – tzw. składnik Poyntinga [3, 4].

#### 2. Składnik sił Poyntinga

W szeregu typowych przetwornikach elektromagnetycznych nie ujawnia się składnik związany z efektem pędu pola elektromagnetycznego – jest on pomijany z uwagi na rozważany zakres częstotliwości pól. Składnik Poyntinga ma wartość opisaną wzorem

$$\vec{f}_p = -\frac{\partial(\vec{D} \times \vec{B})}{\partial t}, \quad (1)$$

i nazywany jest również gęstością sił impulsu pola elektromagnetycznego [3, 4, 5]. Ogólnie, bilans gęstości sił działających w polu elektromagnetycznym ma postać [3, 4, 5, 6, 7, 8, 14]

$$\vec{f}_L = -\frac{\partial(\vec{D} \times \vec{B})}{\partial t} - \vec{i}_u \operatorname{div}_u(\vec{\sigma}_u) - \vec{\Delta} - \vec{N} - \vec{Q} - \vec{M}, \quad (2)$$

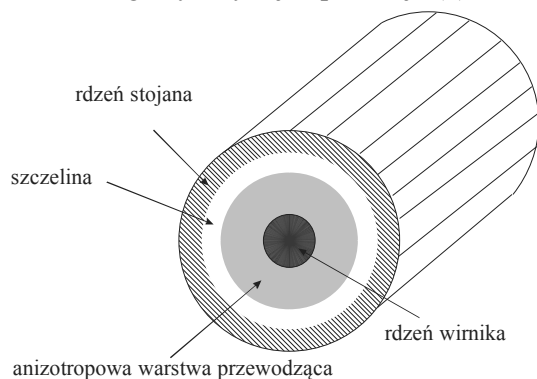
gdzie:  $\vec{\sigma}_u = -E_u \vec{D} - H_u \vec{B} + \vec{i}_u e$  oznacza wektor zbudowany ze składowych tensora Maxwella [9, 10, 11, 12, 13],  $\vec{\Delta}$  – wektor residualny [12, 13, 14],  $\vec{N}$  – gęstość objętościowa składnika niejednorodnościowego sił [6, 7, 8, 9],  $\vec{Q}$  – gęstość objętościowa składnika histerezowego sił [10, 11, 12],  $\vec{M}$  – gęstość objętościowa składnika anizotropowego [9, 12, 13, 14].

Składnik Poyntinga w równaniu (2) jest składnikiem bilansu sił działających w polu elektromagnetycznym – tak samo jak np. siły Lorentza oraz innych. Wartość składnika jest jednak taka, że w przetwornikach elektromechanicznych jest on pomijalny. Na przykład, dla pól sinusoidalnie zmiennych w czasie, składnik ten jest pomijany dla niskich pulsacji (częstotliwości) takich, że

$$\frac{\omega \varepsilon}{\gamma} \ll 1. \quad (3)$$

Obliczenie przykładowych wartości składnika Poyntinga (1) wskazuje na sytuacje, w których ten składnik jest istotny w bilansie momentów sił przetwornika elektromechanicznego. Jednocześnie w naturalny sposób wskazuje na

sytuacje, kiedy składnik Poyntinga nie ujawnia się. Teoretycznie, można sobie jednak wyobrazić warunki, w których ten składnik będzie niepomijalny. Istnieją również **eksperymenty** [3, 4], które pokazują, że efekty opisane matematycznie zależnością (1) są przyczyną ruchu. Jakkolwiek efekty wpływu pędu pola elektromagnetycznego na działające siły w przetwornikach elektromechanicznych - z uwagi na ich niewielką wartość - pozostają niezauważalne w typowych przetwornikach elektromechanicznych, to stanowią one formalnie składnik bilansu gęstości sił w polu elektromagnetycznym jak pokazuje (2).



Rys. 1. Model silnika indukcyjnego o wirniku cylindrycznym

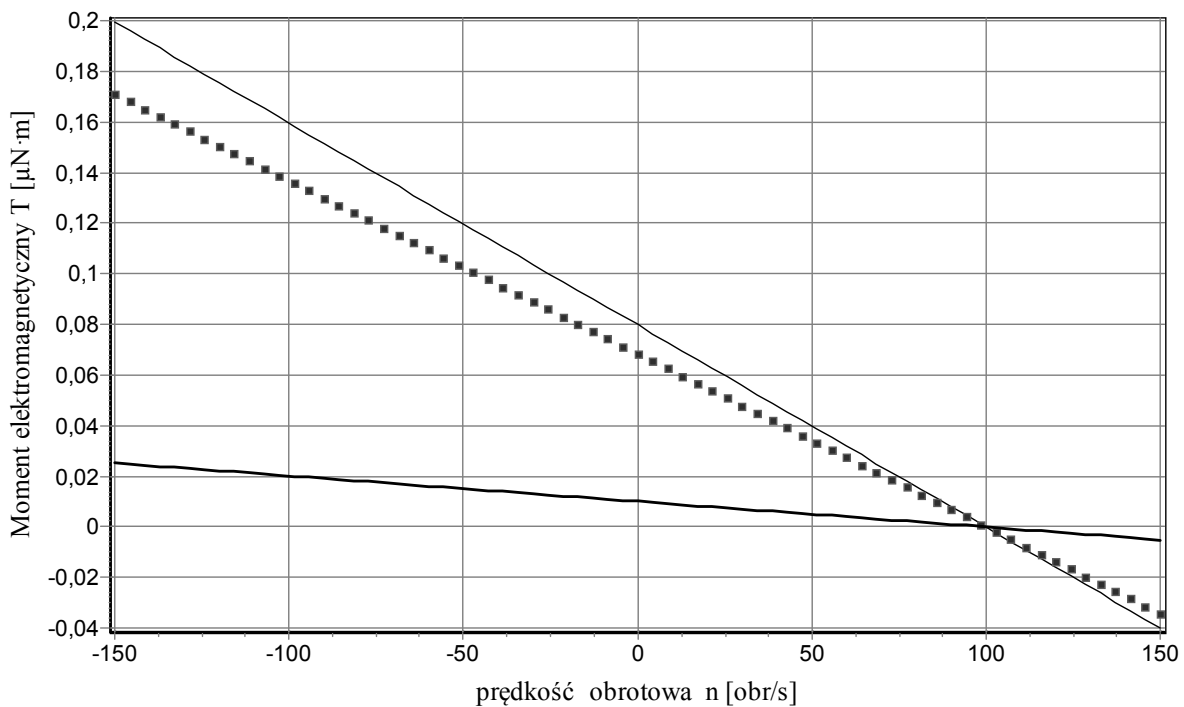
Przykładowo, można rozważać hipotetycznie sytuację, w której składnik Poyntinga będzie istotny w bilansie momentów sił. Np. niech dany będzie silnik indukcyjny z wirnikiem litym, cylindrycznym (rys.1) o parametrach:  $\Theta_1 = 4000$  A,  $R = 0,12$  m,  $g = 0,005$  m,  $a = 0,05$  m,  $\gamma = 30$  S/m,  $p = 1$ ,  $\epsilon_r = 50$ ,  $v_r = v_\varphi = v_0$ ,  $l = 1$  m,  $s = f_1 + j\omega = (5 \cdot 10^9 + j100) \text{ s}^{-1}$ . Odwrotność modułu części rzeczywistej  $\text{Re}\{s\}$  jest stałą czasową  $T = 1/|f_1|$  zanikania lub narastania impulsowego pola elektromagnetycznego [2, 3, 4, 5]. Duża wartość modułu części rzeczywistej  $s$  oznacza, że stała czasowa pola impulsowego jest bardzo mała - tu przykładowo wynosi ona  $T = 2 \cdot 10^{-10}$  s. Pole magnetyczne ma następującą postać czasową

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(st) = \vec{H}_0 \exp(f_1 t) \exp(j\omega t). \quad (4)$$

Pole to jest polem o amplitudzie impulsowo rosnącej (malejącej)

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(st) = \vec{H}_0 \exp(\pm t/T) \exp(j\omega t), \quad (5)$$

gdzie  $T = 1/|f_1|$ ,  $\omega = 2\pi f$ .

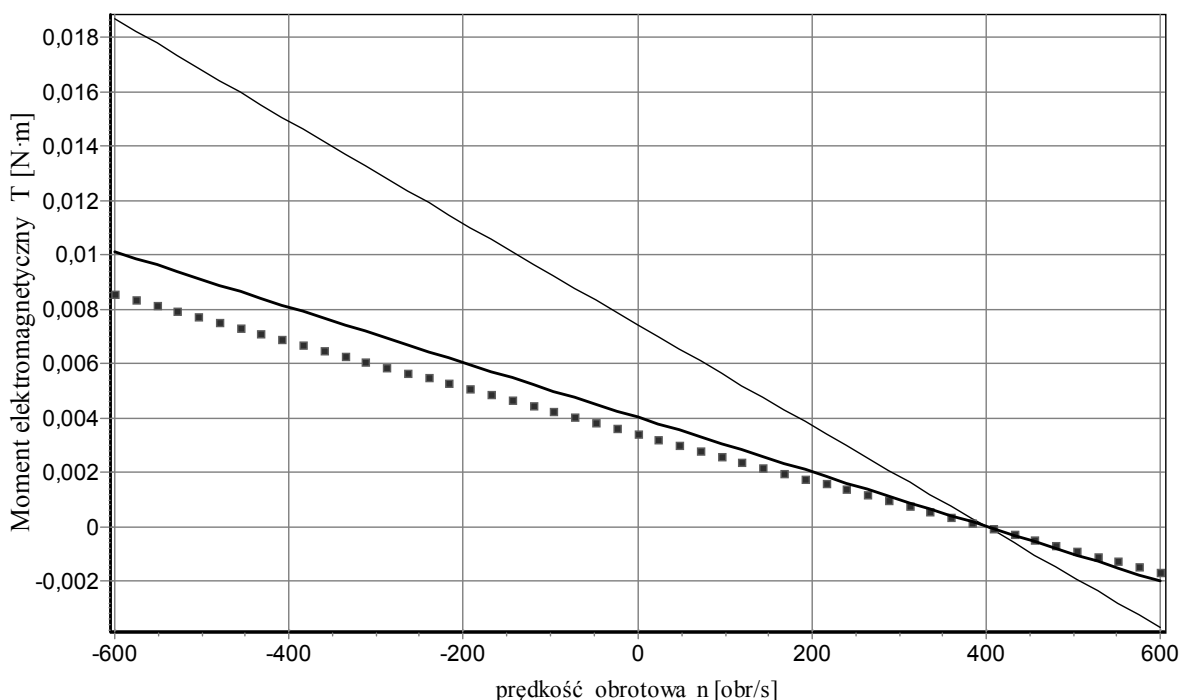


Rys. 2. Charakterystyka mechaniczna dla hipotetycznego silnika z wirnikiem cylindrycznym, w którym ujawnia się składnik momentu Poyntinga/impulsowy (linia gruba), składnik Lorentza (punkty), moment sił wyznaczony metodą Maxwella (linia cienka)

Wykres na rys. 2 pokazuje, że przy wystąpieniu impulsowego pola magnetycznego (5) szybko narastającego (o odpowiednio małej stałej czasowej) należy uwzględnić składnik Poyntinga (składnik spowodowany pojawieniem się impulsu pola elektromagnetycznego). Pojawienie się składnika impulsowego w bilansie momentów sił warunkują jednak tylko bardzo szybko zmienne pola elektromagnetyczne.

Teoretyczne składnik Poyntinga momentu sił może się również ujawnić przy niezmiernie

dużych wartościach przenikalności dielektrycznej (większych niż dla typowych ferroelektryków  $\epsilon_r \sim 10^3$ ). Przykładowo, dla silnika indukcyjnego z wirnikiem sferycznym izotropowym przy:  $\Theta_1 = 4000$  A,  $R = 0,1$  m,  $a = 0,05$  m,  $g = 0,005$  m,  $\gamma = 30$  S/m,  $p = 1$ ,  $s = (400 + j1000) \text{ s}^{-1}$ ,  $v_r = v_\varphi = v_0$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_2 = 135^\circ$  i przenikalności dielektrycznej wirnika  $\epsilon_r = 2 \cdot 10^9$  (wartość hipotetyczna!) udział składnika Poyntinga w całkowitym momencie przedstawiono graficznie na rys.3.



Rys. 3. Charakterystyka mechaniczna dla hipotetycznego silnika z wirnikiem sferycznym, w którym ujawnia się składnik Poyntinga (linia gruba), składnik Lorentza (punkty), całkowity moment sił wyznaczony metodą Maxwella (linia cienka)

### 3. Wnioski

Przedstawione dwa przykłady potwierdzają, że składnik Poyntinga nie ma praktycznie udziału w praktycznie szeroko wykorzystywanych współcześnie przetwornikach elektromechanicznych.

Składnik Poyntinga może być istotny w bilansie sił bądź momentów sił tylko w bardzo szczególnych przypadkach - hipotetycznych z praktycznego punktu widzenia współczesnych możliwości technologicznych !. Zaprezentowanie takich szczególnych przypadków, w których może ujawniać się

składnik sił Poyntinga, w naturalny sposób pokazuje bardzo szeroką klasę przetworników elektromechanicznych, w których nie ujawnia się ten składnik sił bądź momentów sił [14, 15, 16, 17, 18].

Należy jednak podkreślić - z teoretycznego punktu widzenia - że **metoda koenergii stosowana do wyznaczenia sił lub momentów sił nie zawsze prowadzi do wartości całkowitej siły**

$$F_C \neq F_{\text{Maxwell}}, \quad (6a)$$

lub momentu sił

$$T_{eC} \neq T_{e,\text{Maxwell}}. \quad (6b)$$

Różnicę pomiędzy oboma wartościami opisuje **składnik Poyntinga** dla sił

$$F_C + F_p = F_{\text{Maxwell}}, \quad (7a)$$

oraz momentów sił

$$T_{eC} + T_{ep} = T_{e,\text{Maxwell}}. \quad (7b)$$

#### 4. Literatura

- [1]. Binns K.J., Lawrenson P.J., Trowbridge C.W.: *The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields*. John Wiley & Sons, 1992.
- [2]. Benhama A., Williamson A.C., Reece A.B.J.: *Virtual work approach the computation of magnetic force distribution from finite element field solutions*, IEE Proceedings Electric Power Applications, 2000, 147, (6), pp. 437-442.
- [3]. Benda O.: *Mechanical effects of electromagnetic waves on material medium*, Proceedings on MEI, Moscow 1970, pp.21-42 (in Russian).
- [4]. Kogan V. G.: Forces upon vortices in anisotropic superconductors, Physical Review Letters, 64 (18), 2192-2194, 1990.
- [5]. Rawa H.: Elektryczność i magnetyzm w technice. PWN, Warszawa 1994.
- [6]. Spalek D.: *Electromagnetic torque components in synchronous salient-pole machine*. COMPEL International Journal for Computation and Mathematics in Electrical & Electronics Engineering MCB University Press, 1997, Vol. 16, Issue 3, pp.129-143.
- [7]. Spalek D.: *Electromagnetic torque in anisotropic electromechanical converter*. Archives of Electrical Engineering 1998, Vol. XLVII No 1, pp. 39-56.
- [8]. Spalek D.: *Fast analytical model of induction motor for approaching rotor eccentricity*. COMPEL International Journal for Computation Mathematics in Electrical & Electronics Engineering, MCB University Press 1999, UK, Vol. 18, Issue 4, pp. 570-586.
- [9]. Spalek D.: *Anisotropy component of electromagnetic torque in electrical machines*, Archives of Electrical Engineering, No. 1, p. 109-126, 1999.
- [10]. Spalek D.: *Analytical electromagnetic field and forces calculation for linear, cylindrical and spherical electromechanical converters*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences 2004, Vol. 52, No.3, pp. 239-250.
- [11]. Spalek D.: *Electromagnetic field forces and torques*, Archives of Electrical Engineering, PAN, Vol. LIV No 3, pp. 297-319, 2005.
- [12]. Spalek D.: *Synchronous motors linear, cylindrical and spherical with permanent magnets or excited*. Bulletin of the Polish Academy

of Sciences, Technical Sciences 2007, Vol.55, No. 3, pp.299-311.

[13]. Spalek D.: *Theorem about electromagnetic force surface representation in anisotropic region*. Journal of Technical Physics 2007, Vol. XLVIII No. 3-4, pp. 135-145.

[14]. Spalek D.: *Analityczne modele przetworników elektromechanicznych o symetrii liniowej, cylindrycznej i sferycznej* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej (ISBN 978-83-7335-590-3), 2009.

[15]. Spalek D.: *Spherical induction motor with anisotropic rotor - analytical solutions for electromagnetic field distribution, electromagnetic torques and power losses*, International Compumag Society. #Testing Electromagnetic Analysis Methods (T.E.A.M.) 2007, problem no. 34, www.compumag.co.uk/team.html.

[16]. Spalek D.: *Spherical induction motor with anisotropic rotor - analytical solutions for electromagnetic field distribution, electromagnetic torque and power losses*, International Compumag Society. #Testing Electromagnetic Analysis Methods (T.E.A.M.) 2009, problem no. 34, www.compumag.co.uk/team.html (wersja rozszerzona).

[17]. Spalek D.: *Synchronous torque of induction motor with solid and magnetically anisotropic rotor*. Zeszyty Problemowe nr 84 BOBRME Komel, s. 167-171, 2009.

[18]. Spalek D.: *Two theorems about electromagnetic force in activated anisotropic regions*. Zeszyty Problemowe nr 84 BOBRME Komel, s. 172-178, 2009.

#### Autor

prof. dr hab. inż. Dariusz SPAŁEK  
Politechnika Śląska  
Wydział Elektryczny  
Instytut Elektrotechniki i Informatyki  
44-100 Gliwice ul. Akademicka 10  
email: Dariusz.Spalek@polsl.pl

#### Recenzent

Prof. dr hab. inż. Tadeusz Sobczyk