

Andrzej Białas
BOBRME KOMEL, Katowice

WYZNACZENIE ROZKŁADU TEMPERATUR STANU USTALONEGO W MODELU 2D PRZY UŻYCIU PROGRAMU EXCEL

SOLVING STEADY STATE TEMPERATURE FIELD IN TWO-DIMENSIONAL MODEL USE OF EXCEL

Streszczenie: W artykule przedstawiono rozwiązanie dwuwymiarowego ustalonego pola temperatur przy użyciu programu Excel. Program ten został podzielony na poszczególne arkusze: DW (w którym przedstawione są warunki brzegowe, przewodność cieplna, współczynnik wnikania ciepła, oraz podział modelu na komórki bilansowe Δx , Δy); PP, LP, GP, DP (obliczana jest przewodność cieplna między sąsiednimi komórkami); QW (zawierające dane o wydajności źródeł ciepła w poszczególnych komórkach); TO (obliczona jest temperatura w poszczególnych komórkach analizowanego modelu). W ostatnim arkuszu przedstawiony został wykres rozkładu pola temperatur analizowanego modelu.

Abstract: The two-dimensional steady state heat conduction solution with use of Excel is presented in the paper. The seven sheet are done in Excel: DW (boundary conditions, convection coefficient and thermal conductivity are added to the divided for rectangle elements Δx , Δy model); PP, LP, GP, DP (thermal conductivity between neighbouring cells is solved); QW (heat capacity in the individual cells); TO (temperature iterative solution is carried out). On the last sheet the thermal distribution graph of the simplified plate with two fins is shown.

Słowa kluczowe: maszyny elektryczne, ustalony rozkład temperatur
Keywords: electrical machines, steady state temperature

1. Wstęp

Przewodzenie ciepła jest procesem wymiany ciepła między ciałami o różnej temperaturze pozostającymi ze sobą w bezpośrednim kontakcie. Polega on na przekazywaniu energii kinetycznej bezładnego ruchu cząsteczek w wyniku ich zderzeń. Proces prowadzi do wyrównania temperatury między ciałami. Można wyróżnić trzy podstawowe mechanizmy transportu ciepła:

Przewodzenie - w gazach jest związane z ruchem molekuł i przekazywaniem energii z miejsc o wyższej temperaturze do miejsc o niższej temperaturze. W ciałach stałych wiąże się z drganiami atomów i z przepływem swobodnych elektronów.

Konwekcja – występuje w płynach (gazy lub ciecze), gdy omywają one powierzchnie o innej temperaturze niż płyn. Ruch płynu może być wymuszony lub swobodny.

Promieniowanie – przekazanie energii poprzez fale elektromagnetyczne emitowane przez powierzchnię i odbijane przez powierzchnię.

Poniżej zapisano równanie nieustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych zwane równaniem Fouriera-Kirchhoffa, pozwalające na wyznaczenie pola temperatur w ciele:

$$\vec{\nabla} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + q_V = c_P \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} + c_P \cdot \rho \cdot \vec{\nabla} T \cdot \vec{W}$$

gdzie:

T – temperatura [K],

ρ – gęstość $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$,

λ – współ. przewodzenia ciepła $\left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$,

q_V - źródło ciepła [J],

$\vec{\nabla}$ – wektor Nabla lub operator Hamiltona,

c_P – ciepło właściwe $\left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$.

Dla ciała nieruchomego oraz stanu ustalonego, gdy temperatura nie zależy od czasu, zjawisko opisuje równanie Poissona:

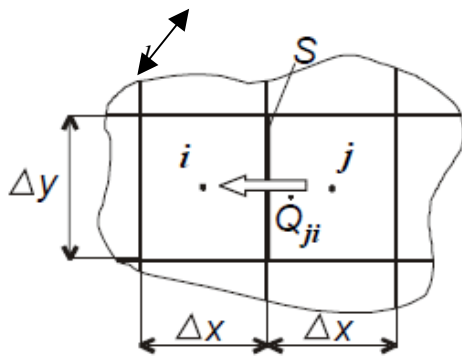
$$\nabla^2 T + \frac{q_V}{\lambda} = 0,$$

Natomiast, dodatkowo przy braku wewnętrznych źródeł ciepła zapis upraszcza się do równania Laplace'a:

$$\nabla^2 T = 0$$

2. Opis metody obliczeniowej

Do rozwiązania ustalonego pola temperatur wykorzystana została metoda bilansów elementarnych. W metodzie tej dokonuje się dyskretyzacji modelu na tzw. komórki bilansowe. Dla każdej komórki wewnętrznej rozważanego obszaru można zapisać równanie bilansu energii uwzględniając możliwość wydzielania się ciepła na skutek działania źródła ciepła wewnątrz tej komórki oraz dopływy strumieni ciepła przez przewodzenie od komórek sąsiednich. Na rysunku 1 przedstawiono komórkę „i” oraz komórkę „j”, z której dopływa strumień ciepła.



Rys. 1. Schemat do obliczeń przepływu ciepła pomiędzy sąsiednimi komórkami bilansowymi

Z prawa Fouriera możemy obliczyć strumień ciepła jaki dopływa z komórki „j” do komórki „i” korzystając ze wzoru:

$$\dot{Q}_{ji} = \frac{T_j - T_i}{R_{js} - R_{si}} = k_{ji} (T_j - T_i) \quad (1)$$

gdzie:

T_j, T_i – temperatury w komórce „j”, „i”,

$R_{js} = \frac{\Delta x}{2\lambda_j \Delta y \cdot l}$ - opór przewodzenia ciepła

od węzła „j” do powierzchni „S” brzegu komórki „j-i”,

$R_{si} = \frac{\Delta x}{2\lambda_i \Delta y \cdot l}$ - opór przewodzenia ciepła

od powierzchni „S” brzegu komórki „j-i” do węzła „i”,

k_{ji} – przewodność cieplna między węzłami „j”, „i”.

$$k_{ji} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{2\lambda_j \Delta y \cdot l} + \frac{\Delta x}{2\lambda_i \Delta y \cdot l}} \quad (2)$$

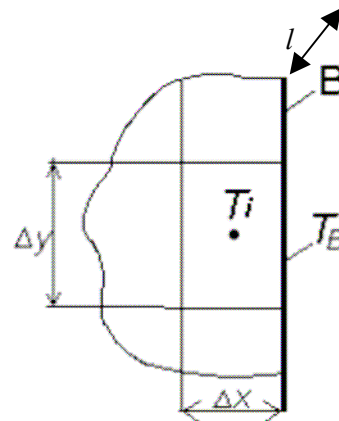
Dla każdej komórki brzegowej należy uwzględnić dopływ ciepła od sąsiedniej komórki oraz dopływ ciepła od powierzchni brzegowej opisany na podstawie odpowiednich warunków brzegowych.

I warunek brzegowy dla przypadku, gdy znana jest temperatura T_B na brzegu, wówczas strumień ciepła wyraża się równaniem:

$$\dot{Q}_{Bi} = \frac{T_B - T_i}{R_{Bi}} = \frac{T_B - T_i}{\frac{\Delta x}{2\lambda_i \Delta y \cdot l}} = k_{Bi} (T_B - T_i) \quad (3)$$

gdzie:

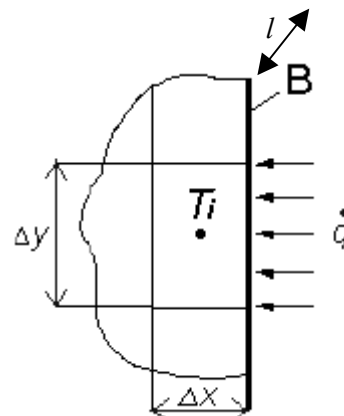
$$k_{Bi} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{l}{2\lambda_i}} \quad (4)$$



Rys. 2. Warunek brzegowy I rodzaju

II warunek brzegowy dla przypadku, gdy znana jest gęstość strumienia ciepła \dot{q} na brzegu, dla którego strumień ciepła to:

$$\dot{Q}_{Bi} = \dot{q} \Delta y \cdot l \quad (5)$$



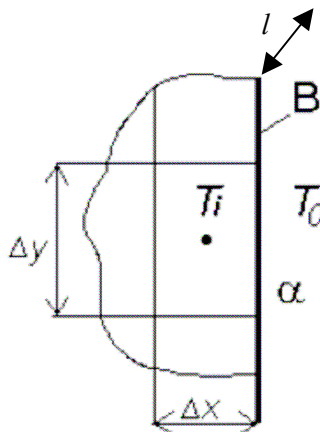
Rys. 3. Warunek brzegowy II rodzaju

III warunek brzegowy dla przypadku, gdy występuje konwekcyjna wymiana ciepła z płynem o temperaturze T_o przy współczynniku wnika- nia ciepła α , wówczas strumień ciepła wyraża się równaniem:

$$\dot{Q}_{Bi} = \frac{T_o - T_i}{R_{OB} - R_{Bi}} = k_{oi}(T_o - T_i) \quad (6)$$

gdzie:

$$k_{Bi} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha \Delta y \cdot l} + \frac{\Delta x}{2\lambda_i \Delta y \cdot l}} \quad (7)$$



Rys. 4. Warunek brzegowy III rodzaju

Ponieważ w artykule przedstawione jest zagad- nienie dwuwymiarowe, więc przyjęto długość $l=1$.

3. Wyznaczenie pola temperatur modelu 2D za pomocą programu Excel

W części tej przedstawiony został sposób wy- znaczenia pola temperatur dla stanu ustalonego prostej płyty z dwoma żebrami przy użyciu programu Excel.

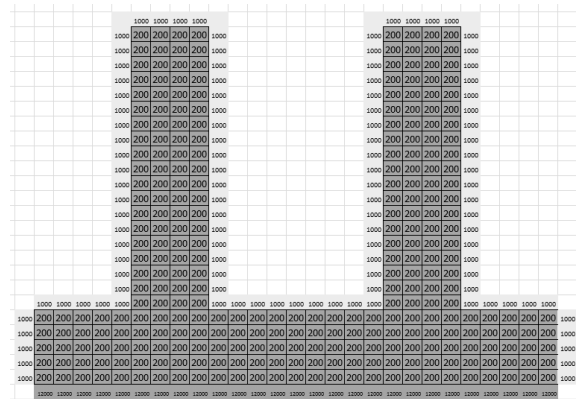
Tabela 1. Dane wejściowe

	Przewodność cieplna [W/m*K]
Stop aluminium	200
	Współczynnik przenikania
	ciepła [W/m ² *K]
otoczenia	1000
od dołu	12000
	Komórki bilansowe [m]
Δx	0,001
Δy	0,001
	Temperatura [°C]
otoczenia	20
od dołu	50

Dane wejściowe zostały dobrane tak, aby przedstawić w sposób widoczny rozkład pola temperatur. W tabeli nr 1 przedstawione dane wejściowe.

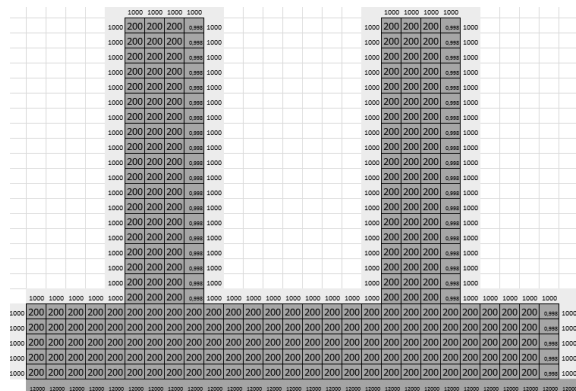
Przy obliczeniu pola temperatur w programie Excel zostało wykonanych siedem arkuszy kalkulacyjnych, wzajemnie zależnych od siebie oraz ósmy arkusz, w którym przedstawiony jest wykres powierzchniowy rozplywu pola temper- atur. Poniżej opisano poszczególne arkusze:

- DW – zawierające dane wejściowe takie jak: przewodność cieplną danego materiału, współczynnik przenikania ciepła oraz dys- kretyzacji modelu na tzw. komórki bilan- sowe o wymiarach Δx , Δy (rys.5).



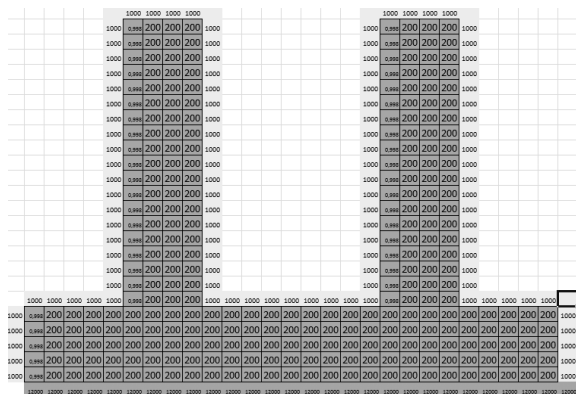
Rys. 5. Widok analizowanego modelu z uwzględnieniem danych wejściowych

- PP – który zawiera przewodność cieplną pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiednią znajdującą się z prawej strony (rys.6).



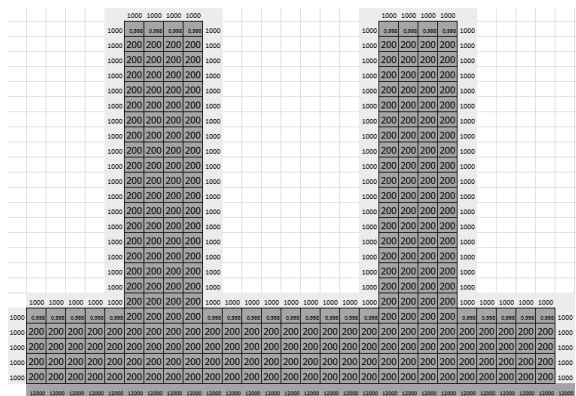
Rys. 6. Przewodność cieplna arkusza PP

- LP – który zawiera przewodność cieplną pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiednią znajdującą się z lewej strony (rys.7).



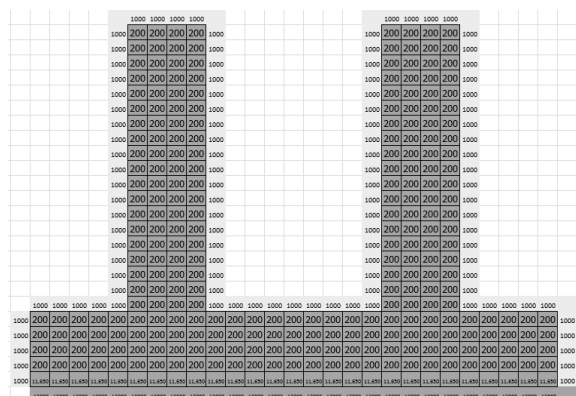
Rys. 7. Przewodność cieplna arkusza LP

- GP – który zawiera przewodność cieplną pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiadną znajdującą się od góry (rys.8).



Rys. 8. Przewodność cieplna arkusza GP

- DP – który zawiera przewodność cieplną pomiędzy daną komórką, a komórką sąsiadną znajdującą się od dołu (rys.9).

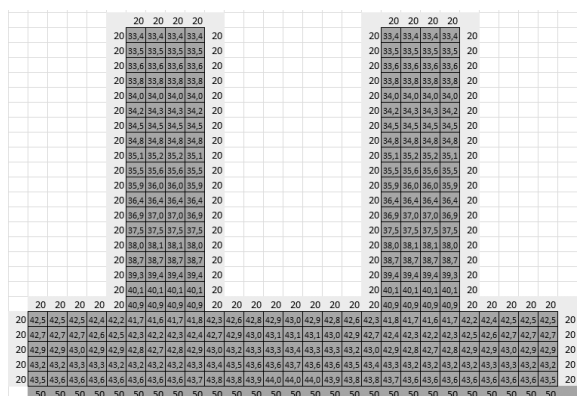


Rys. 9. Przewodność cieplna arkusza DP

W przypadku arkuszy PP, LP, GP, DP przy obliczaniu przewodności cieplnej należy uwzględnić odpowiednie warunki brzegowe.

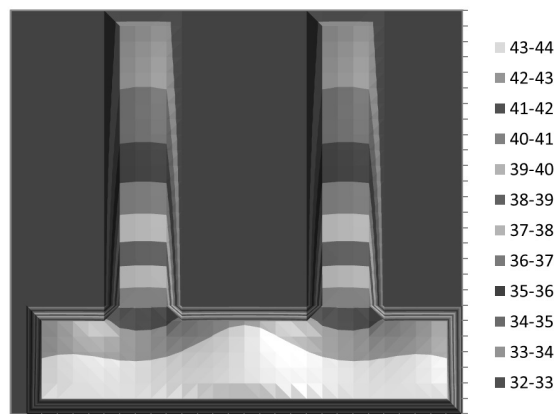
Dla analizowanego modelu uwzględniono warunek brzegowy III rodzaju i przy obliczaniu przewodności cieplnej wykorzystano wzory (2,7).

- QW – zawierające dane o wydajności źródeł ciepła w poszczególnych komórkach. W tym przypadku ilość ciepła doprowadzanego i odprowadzanego z analizowanego modelu musi być równa zero, co mówi o poprawności rozwiązania.
- TO – obliczone zostały temperatury w poszczególnych komórkach analizowanego modelu (rys.10).



Rys. 10. Rozkład temperatur w poszczególnych komórkach

Na rysunku 11 przedstawiono wykres rozkładu pola temperatur analizowanego modelu.



Rys. 11. Wykres powierzchniowy rozkładu pola temperatur

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono opis rozwiązania dwuwymiarowego ustalonego pola temperatur prostej płyty z dwoma żebrami przy użyciu arkusza kalkulacyjnego Excel. Analizowany model został zdyskretyzowany poprzez dokonanie

podziału różnicowego obszaru na komórki bilansowe o bokach Δx , Δy , w środku której znajduje się punkt węzłowy reprezentujący miejsce obliczanej temperatury. Utworzone zostały arkusze kalkulacyjne, gdzie opisano zależności przewodności cieplnej między każdą komórką, a komórką sąsiadującą, znajdującą się z prawej i lewej strony oraz z góry i z dołu. Zależności te zostały opisane odpowiednio w arkuszach o nazwie; PP, LP, GP, DP. Ostatecznie wyniki rozkładu pola temperatur przedstawiono w arkuszu TO oraz na wykresie, przy czym dla uzyskania takich obliczeń konieczne jest włączenie obliczeń iteracyjnych.

Gdy znana jest np. przewodność cieplna, współczynniki wnikania ciepła oraz rodzaj warunków brzegowych badanego modelu, to wówczas przedstawiony sposób obliczeń pozwala na wyznaczenie pól temperatur w analizowanym modelu bez konieczności użycia drogich programów MES, używając programu Excel ogólnie dostępnego.

Literatura

- [1]. Wiśniewski S, Wiśniewski T. S: „*Wymiana ciepła*”, WNT, 2000
- [2]. Sucheta A, Sikora K: „*Rozwiązywanie dwuwymiarowych ustalonych zagadnień przewodzenia ciepła przy pomocy arkusza kalkulacyjnego*” XII Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy AGH-Kraków 2004.

Autor

mgr inż. Andrzej Białas
Branżowy Ośrodek Badawczo-Rozwojowy
Maszyn Elektrycznych KOMEL
40-203 Katowice, al. Roździeńskiego 188
e-mail: a.bialas@komel.katowice.pl