

ZASTOSOWANIE WYBRANEJ METODY TREFFTZA DO ROZWIĄZANIA DWUWYMIAROWEGO ZAGADNIENIA POISSONA Z UWZGLĘDNIENIEM WŁASNOŚCI MATERIAŁOWYCH OŚRODKA

Celem pracy jest analiza teoretyczna oraz numeryczna jednej z wersji nieosobliwych metod Trefftza na przykładzie zagadnienia dwuwymiarowego opisanego równaniem Poissona. Przekształcając klasyczne sformułowanie zagadnienia brzegowego za pomocą metody residuów ważonych do sformułowań wariacyjnych otrzymuje się równanie obszarowo-brzegowe opisujące dane zagadnienie. W pracy rozpatruje się silne sformułowanie wariacyjne. Przyjmując rozwiązanie w postaci szeregu funkcji Trefftza spełniających jednorodną równanie Laplace'a oraz zakładając również funkcje Trefftza jako funkcje wagowe uzyskuje się równanie metody Trefftza w wersji Galerkinia o symbolicznej nazwie O-S;T-T. Artykuł zawiera teoretyczną analizę metody O-S;T-T na przykładzie zagadnienia spełniającego równanie Poissona z uwzględnieniem parametru materiałowego ośrodka.

WSTĘP

Równanie różniczkowe Poissona odgrywa ważną rolę w opisie wielu zjawisk fizycznych. Ma ono niezwykle istotne znaczenie jest w teorii pola, szczególnie elektromagnetycznego, gdzie funkcja wymuszająca opisuje na przykład rozkład ładunku czy gęstości prądu. W celu rozwiązania równania Poissona należy określić obszar działania pola oraz warunki brzegowe. W praktycznych zagadnieniach obszar działania pola znajduje się w środowisku scharakteryzowanym pewnymi właściwościami materiałowymi. Wśród metod rozwiązywania tak określonych problemów ważną rolę odgrywają brzegowe metody numeryczne, które z dużą dokładnością opisują zjawiska fizyczne. Zastępując równanie różniczkowe odpowiednio skonstruowanym równaniem całkowo-brzegowym sprowadza się analizę zagadnienia do rozważań na brzegu. Powoduje to redukcję o jeden wymiar zagadnienia, co wpływa na wzrost efektywności metody w stosunku do metod obszarowych.

Do grupy metod brzegowych należą metody Trefftza, której pierwotna wersja sformułowana została w 1926 r. [10]. W standardowej postaci metody jako funkcje bazowe przyjmuje się funkcje Trefftza (in. T-kompletne, T-funkcje) zwane także w literaturze jako funkcje Trefftza-Herrery [7, 11]. Matematyczne aspekty metody zawierają prace [8, 9, 11]. Obecnie istnieje wiele wersji metody Trefftza zaszerogowanych w umowny sposób do dwóch grup metod: bezpośrednich i pośrednich. W niniejszej pracy analizuje się jedną z nich, wyprowadzoną z silnego sformułowania wariacyjnego, wchodzącą w skład metod pośrednich. Przybliżając rozwiązanie szeregiem T-funkcji oraz przyjmując również te same funkcje jako wagi, generuje się jedną z metod Trefftza w wersji Galerkinia o symbolicznej nazwie O-S;T-T [3]. Metoda O-S;T-T była podstawą badań m. in. w pracach [4], [5], w których porównywano jej efektywność z innymi wersjami metody. Wymienione prace zawierają przykłady implementacji metody do rozwiązywania zagadnień potencjału opisanych równaniem Laplace'a. Natomiast prace [1, 2] zawierają analizę metody O-S;T-T na przykładzie równania Poissona w obszarze podzielonym na podobszary.

Natomiast celem niniejszego artykułu jest teoretyczna oraz numeryczna analiza metody O-S;T-T na przykładzie równania Poissona ze stałym wymuszeniem z uwzględnieniem właściwości materiałowych ośrodka.

1. KLASYCZNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Niech w obszarze Ω ograniczonym brzegiem Γ dane będzie zagadnienie brzegowe sformułowane klasycznie, opisane równaniem Poissona

$$\nabla \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) = f, \quad \text{w } \Omega \quad (1)$$

Środowisko obszaru Ω scharakteryzowane jest parametrem materiałowym μ .

Brzeg obszaru Γ jest podzielony na dwie części w zależności od zadanego na nim warunku brzegowego

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \quad (2)$$

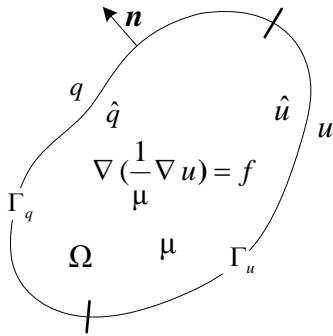
Na części brzegu Γ_u dany jest warunek brzegowymi Dirichleta

$$u = \hat{u}, \quad \text{na } \Gamma_u \quad (3)$$

oraz na brzegu Γ_q warunek brzegowy Neumanna

$$D_{\mathbf{n}}u = q = \hat{q} \quad \text{na } \Gamma_q \quad (4)$$

\hat{u} oraz \hat{q} są znanymi funkcjami, $D_{\mathbf{n}}u$ jest pochodną normalną funkcji u na brzegu, natomiast \mathbf{n} jest wektorem jednostkowym w kierunku normalnym do Γ skierowanym na zewnątrz Ω (Rysunek 1). Rozważany obszar Ω jest obszarem jednorodnym materiałowo i operatorowo.



Rys. 1. Geometria zagadnienia brzegowego

2. WARIACYJNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Korzystając z metody residuów ważonych (WRM) [3] przekształca się zagadnienie sformułowane klasycznie do sformułowań wariacyjnych.

Zastąpienie rozwiązania klasycznego rozwiązaniem przybliżonym \tilde{u} oraz wstawienie go do równań (1), (3) i (4) powoduje wygenerowanie błędu. Kolejno mnożąc równanie (1) przez pewną funkcję wagową W otrzymuje się równanie wazone

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \tilde{u} W = f, \text{ w } \Omega \tag{5}$$

W powyższym równaniu założono stałą wartość parametru μ .

Całkując równanie (5) po obszarze Ω otrzymuje się silne sformułowanie wariacyjne równania (1)

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \nabla^2 \tilde{u} W \, d\Omega = \int_{\Omega} f W \, d\Omega \tag{6}$$

będące bazowym równaniem WRM, która polega na odpowiednim doborze wagi W w celu rozłożenia błędu w obszarze Ω , tak aby cała reszta ważona była równa zero.

Stosując drugi wzór Greena

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \tilde{u} W \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{q} W \, d\Gamma \tag{7}$$

do równania (6) otrzymuje się słabe sformułowanie wariacyjne:

$$- \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla W \, d\Omega + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \tilde{q} W \, d\Gamma = \int_{\Omega} f W \, d\Omega \tag{8}$$

Odwrotne sformułowanie wariacyjne otrzymuje się poprzez zastosowanie wzoru Greena (7) do równania (8)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla^2 W \, d\Omega - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \tilde{u} D_n W \, d\Gamma + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \tilde{q} W \, d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} f W \, d\Omega \end{aligned} \tag{9}$$

Przepisując całki brzegowe z równania (9) z uwzględnieniem warunków brzegowych (3)-(4) oraz warunku (2) otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \tilde{u} D_n W \, d\Gamma \\ & = \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W \, d\Gamma_u + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_q} \tilde{u} D_n W \, d\Gamma_q \end{aligned} \tag{10}$$

oraz

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \tilde{q} W \, d\Gamma = \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_u} \tilde{q} W \, d\Gamma_u + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_q} \hat{q} W \, d\Gamma_q \tag{11}$$

Uwzględniając równania (10) i (11) w (9) otrzymuje się odwrotne sformułowanie wariacyjne z wszczepionymi warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla^2 W \, d\Omega + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_u} \tilde{q} W \, d\Gamma_u \\ & - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_q} \tilde{u} D_n W \, d\Gamma_q \\ & = \int_{\Omega} f W \, d\Omega + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W \, d\Gamma_u - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_q} \hat{q} W \, d\Gamma_q \end{aligned} \tag{12}$$

Silne sformułowanie wariacyjne z wszczepionymi warunkami brzegowymi otrzymuje się poprzez dwukrotne zastosowanie twierdzenia Greena (7) do równania (12). Jego postać jest następująca

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \nabla^2 \tilde{u} W \, d\Omega + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_u} \tilde{u} D_n W \, d\Gamma_u \\ & - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_q} \tilde{q} W \, d\Gamma_q \\ & = \int_{\Omega} f W \, d\Omega + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W \, d\Gamma_u - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_q} \hat{q} W \, d\Gamma_q \end{aligned} \tag{13}$$

lub po przemnożeniu obustronnym przez parametr μ

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla^2 \tilde{u} W \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \tilde{u} D_n W \, d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \tilde{q} W \, d\Gamma_q \\ & = \mu \int_{\Omega} f W \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W \, d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \hat{q} W \, d\Gamma_q \end{aligned} \tag{14}$$

3. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA POISSONA

Zakładając rozwiązanie równania (1) w postaci sumy całki ogólnej równania jednorodnego \tilde{u}_h i całki szczególnej równania niejednorodnego \tilde{u}_p [6]

$$\tilde{u} = \tilde{u}_h + \tilde{u}_p \tag{15}$$

zatem

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \tilde{u}_h = 0 \tag{16}$$

oraz

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \tilde{u}_p = f \tag{17}$$

Dodając stronami równania (16) i (17) otrzymuje się

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) = f \quad (18)$$

W pracy założono rozwiązanie równania Laplace'a w postaci szeregu funkcji Trefftza u_v°

$$\tilde{u}_h = \sum_v a_v u_v^\circ \quad (19)$$

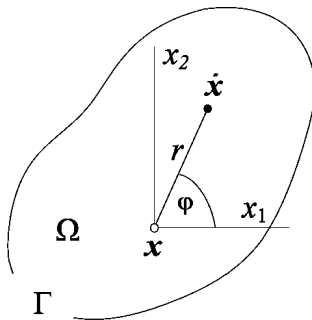
Wobec powyższego

$$\tilde{q}_h = \sum_v a_v q_v^\circ \quad (20)$$

gdzie $q_v^\circ = D_n u_v^\circ$. W pracy analizuje się dwuwymiarowe wewnętrzne zagadnienie brzegowe, dla którego funkcje Trefftza przybierają postać

$$\{1, r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), r^2 \cos(2\varphi), r^2 \sin(2\varphi), \dots\}.$$

gdzie $r = |\mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}|$, \mathbf{x} jest środkiem rozwinięcia w szereg Trefftza, natomiast $\dot{\mathbf{x}}$ jest punktem obszaru (Rysunek 2).



Rys. 2. Geometria zagadnienia brzegowego (do określenia funkcji Trefftza)

Przyjmując T-funkcje jako bazy przechodzi się z zagadnienia obszarowo-brzegowego do zagadnienia brzegowego.

Rozwiązanie szczególne dla stałej funkcji wymuszającej jest znane. Przyjmując, że $f = 2$, rozwiązaniem szczególnym jest

$$\tilde{u}_p = \hat{u}_p = \mu(x^2 + y^2)/2 \quad (21)$$

Wstawiając (15) do silnego sformułowania (14) otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla^2 (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) W \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_u} (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) D_n W \, d\Gamma_u \\ & - \int_{\Gamma_q} D_n (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) W \, d\Gamma_q = \end{aligned} \quad (22)$$

$$= \mu \int_{\Omega} f W \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W \, d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \hat{q} W \, d\Gamma_q$$

Po rozpisaniu całki obszarowej z rozwiązania w równaniu (22) na całki z rozwiązania ogólnego i rozwiązania szczególnego przybiera ono postać

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla^2 \tilde{u}_h W \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^2 \hat{u}_p W \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_u} (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) D_n W \, d\Gamma_u \\ & - \int_{\Gamma_q} D_n (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) W \, d\Gamma_q \end{aligned} \quad (23)$$

$$= \mu \int_{\Omega} f W \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W \, d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \hat{q} W \, d\Gamma_q$$

Na podstawie równań (17) i (21) otrzymuje się

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \hat{u}_p W \, d\Omega = \mu \int_{\Omega} f W \, d\Omega \quad (24)$$

Uwzględnienie powyższego równania oraz (16) w równaniu (23), powoduje jego przekształcenie do postaci

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_u} \tilde{u}_h D_n W \, d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} D_n \tilde{u}_h W \, d\Gamma_q \\ & = \int_{\Gamma_u} (\hat{u} - \hat{u}_p) D_n W \, d\Gamma_u \\ & - \int_{\Gamma_q} (\hat{q} - D_n \hat{u}_p) W \, d\Gamma_q \end{aligned} \quad (25)$$

Ze względu na (19) oraz przyjmując wersję Galerkiną, gdzie

$$W = \{u_\mu^\circ\} \quad (26)$$

otrzymuje się równanie metody O-S;T-T

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_u} \sum_v (a_v u_v^\circ) q_\mu^\circ \, d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} \sum_v (a_v q_v^\circ) u_\mu^\circ \, d\Gamma_q = \\ & = \int_{\Gamma_u} (\hat{u} - \hat{u}_p) q_\mu^\circ \, d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} (\hat{q} - D_n \hat{u}_p) u_\mu^\circ \, d\Gamma_q \end{aligned} \quad (27)$$

Przekształcając powyższe równanie, przybiera ono postać

$$\begin{aligned} & \sum_v a_v \left(\int_{\Gamma_u} u_v^\circ q_\mu^\circ \, d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} q_v^\circ u_\mu^\circ \, d\Gamma_q \right) = \\ & = \int_{\Gamma_u} (\hat{u} - \hat{u}_p) q_\mu^\circ \, d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} (\hat{q} - D_n \hat{u}_p) u_\mu^\circ \, d\Gamma_q \end{aligned} \quad (28)$$

Wzór (28) generuje układ równań algebraicznych, który w zapisie macierzowym przybiera postać

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (29)$$

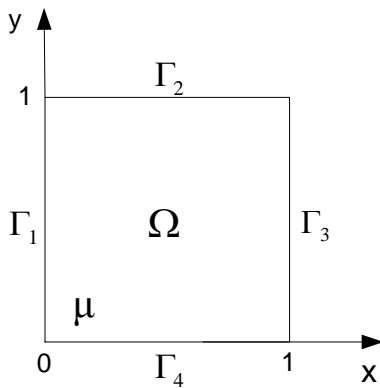
Z równania (29) otrzymuje się wektor nieznanych współczynników $\{a_v\}$, poprzez które wyznacza się rozwiązanie zagadnienia

$$\tilde{u} = \tilde{u}_h + \tilde{u}_p = \sum_v a_v u_v^\circ + \mu(x^2 + y^2)/2 \quad (30)$$

\mathbf{K} oznacza macierz główną układu (29), natomiast \mathbf{b} jest wektorem wartości znanych, obliczonych na podstawie warunków brzegowych \hat{u} and \hat{q} .

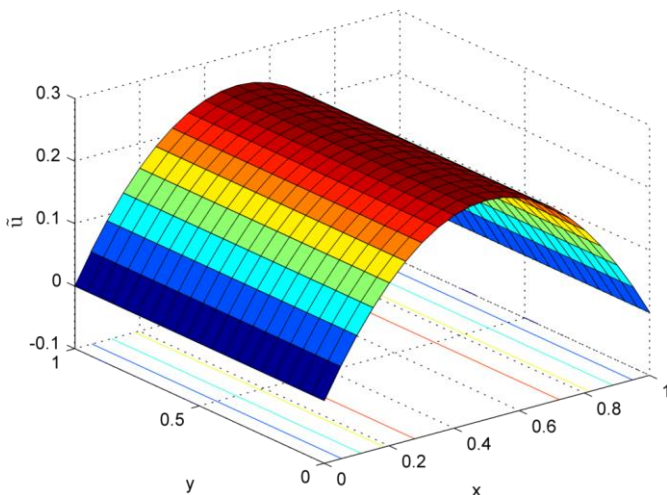
4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Niech będzie dane zagadnienie brzegowe opisane równaniem Poissona w przestrzeni 2D zdefiniowane w obszarze kwadratowym (Rysunek 3), gdzie $x \in (0, 1)$ oraz $y \in (0, 1)$.



Rys. 3. Geometria zagadnienia brzegowego

Na brzegu Γ_1 i Γ_3 zadany jest zerowy warunek Dirichleta, natomiast na brzegu Γ_2 oraz Γ_4 zerowy warunek Neumanna. Funkcja wymuszająca jest stała i równa jedności, czyli $f(x) = 1$. Współczynnik materiałowy $\mu = 2$. Całkowanie numeryczne wykonano przy użyciu 8 - węzłowej kwadratury Gaussa. Środek rozwinięcia w szereg Trefftza znajduje się w punkcie $r_0 = (0.5, 0.5)$. Na Rysunku 4 przedstawiono otrzymane rozwiązanie omawianego zagadnienia wykonane w programie Matlab.



Rys. 4. Rozwiązanie \tilde{u} dla $\alpha_v = 4$

Otrzymane wartości rozwiązania odniesiono do wyników uzyskanych za pomocą wbudowanego narzędzia w pakiet Matlab jakim jest Partial Differential Equation Toolbox (PDE Toolbox).

Dla przyjętych powyżej założeń otrzymano wartości liczbowe błędów $E_{RMS} = 2.6299e-04$ oraz $E_{max} = 7.2311e-04$, gdzie pierwszy z nich – pierwiastek błędu średniokwadratowego dany jest wzorem

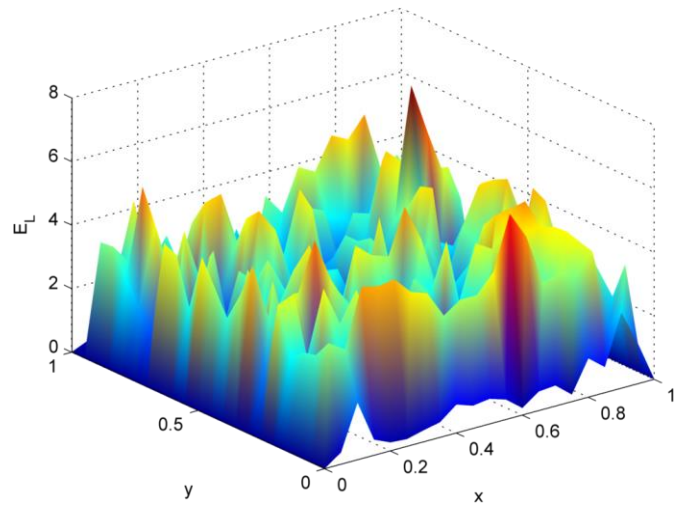
$$E_{RMS} = \left((1/n_i) \sum_i (\tilde{u}_i - u_i)^2 \right)^{1/2} \quad (31)$$

n_i oznacza ilość punktów pola, w których wyznaczono \tilde{u} . Natomiast drugi z nich - błąd maksymalny E_{max} definiuje się jako

$$E_{max} = \max |u_i - \tilde{u}_i| \quad (32)$$

Na Rysunku 5 przedstawiono jakościową miarę błędu E_L , będącą różnicą pomiędzy rozwiązaniem ścisłym a przybliżonym

$$E_L = |u_i - \tilde{u}_i| \quad (33)$$



Rys. 5. Błąd E_L

PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiona została teoretyczna analiza metody O-S;T-T. Rozważania przeprowadzono dla zagadnienia opisanego równaniem różniczkowym Poissona. Zakładając stałe wymuszenie oraz uwzględniając właściwości materiałowe środowiska wyprowadzono równanie całkowo-brzegowe dla zagadnienia z warunkami brzegowymi Dirichleta oraz Neumanna. W ten sposób otrzymano metodę zaimplementowaną na bazie kodu metody O-S;T-T dla równania Laplace'a. Za rozwiązanie zagadnienia Poissona przyjęto sumę całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego. Założono również stałą wartość współczynnika materiałowego. Dla takich założeń wartość współczynnika materiałowego uwzględniana jest tylko w rozwiązaniu szczególnym. Na bazie wyprowadzonego równania całkowo-brzegowego zaimplementowano metodę O-S;T-T w języku Matlab, którą przetestowano na przykładzie prostego zagadnienia brzegowego z warunkiem brzegowym Dirichleta na całym brzegu. Metodę O-S;T-T wykorzystano również do rozwiązania zagadnienia Poissona na obszarze kwadratowym z warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumanna. Zagadnienie to opisano w ostatniej części artykułu. Otrzymane rozwiązanie porównano z rozwiązaniem uzyskanym przy pomocy narzędzia Matlab – PDE Toolbox.

BIBLIOGRAFIA

1. Borkowska D., *Analiza teoretyczna oraz numeryczna Wybranej hybrydowej nieosobliwej metody Trefftza na przykładzie dwuwymiarowego zagadnienia Poissona, Cz. 1*, Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, 12, 743-746, 2017.
2. Borkowska D., *Analiza teoretyczna oraz numeryczna Wybranej hybrydowej nieosobliwej metody Trefftza na przykładzie dwuwymiarowego zagadnienia Poissona, Cz. 2*, Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, 12, 747-752, 2017.
3. Brański A., *Metody numeryczne rozwiązywania zagadnień brzegowych. Klasyfikacja i przegląd*, Oficyna wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2013.

4. Brański A., Borkowska D., *Effectiveness of nonsingular solutions of the boundary problems based on Trefftz methods*, Eng Anal Bound Elem, 59, 97–104, 2015.
5. Brański A., Borkowska D., Galerkin versions of nonsingular Trefftz methods derived from variational formulations for 2D Laplace problem, Acta Physica Polonica A, 128, 50-55, 2015.
6. Brebbia C.A., Dominguez J., *Boundary Elements - An Introductory Course. Second Edition*, WIT Press, Southampton, 1992.
7. Herrera I., *Boundary methods: an algebraic theory*, Boston, Pitman Publishing, 1984.
8. Herrera I., *Trefftz method: a general theory*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 16, 561-580, 2000.
9. Kupradze V. D., *On the approximate solution of problems in mathematical physics*, Russian Mathematical Surveys, 22, 58-108, 1967
10. Trefftz E., *Ein Gegenstück zum Ritzchen Verfahren*, Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech., pp. 131–137, 1926.
11. Zieliński A. P., *On trial functions applied in the generalized Trefftz method*, Advances in Engineering Software, 24, 1-3, 147-155, 1995.

Application of Trefftz method for the solution of two-dimensional Poisson's problem taking into account material properties

The aim of this paper is theoretical and numerical analysis of one of the nonsingular Trefftz method. Two-dimensional boundary value problem governed by Poisson's equation is taken as the example. Domain boundary equation is obtained by transformation of classical formulation of the boundary problem with the use of weighted residual method. In this paper the original variation formulation is considered. The solution of the problem is assumed as the superposition of Trefftz functions, which satisfy Laplace's equation. Taking the same functions as the weighting functions one obtains equations of the Galerkin version of the Trefftz method with symbolic name O-S;T-T. The paper contains the theoretical analysis of the O-S;T-T method which is confirmed with numerical example. .

Autorzy:

mgr inż. **Dorota Borkowska** – Politechnika Rzeszowska, Wydział Zarządzania, Zakład Informatyki w Zarządzaniu,
E-mail: db@prz.edu.pl

JEL: C25 DOI: 10.24136/atest.2018.094

Data zgłoszenia: 2018.05.22 Data akceptacji: 2018.06.15