ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXIX (2003)

MICHAEL ATIYAH (Oxford)

Matematyka w XX wieku[1]

Kiedy mówimy o końcu wieku i początku następnego, mamy dwie możliwości, obie jednakowo trudne. Jedna polega na dokonaniu przeglądu osiągnięć matematyki w minionych stu latach, druga na przewidywaniu rozwoju matematyki w następnych stu latach. Tu wybieram zadanie trudniejsze. Przewidywać może każdy i nie trzeba nawet znać się zbytnio na rzeczy, by potem ocenić, czy się nie myliliśmy. Ale ujawnić, co się myśli o przeszłości, to jest coś, wobec czego każdy może wyrazić sprzeciw.

Wszystko, co tutaj przedstawię, to będzie mój osobisty pogląd. Nie sposób mieć opinię o wszystkim, tak więc i ja opuszczę znaczne partie tej historii. Częściowo dlatego, że nie jestem ekspertem, a częściowo dlatego, że są już gdzieś opisane. Nic więc nie powiem, na przykład, o wielkich wydarzeniach na obszarach pomiędzy logiką a obliczaniem, a związanych z takimi ludźmi jak Hilbert, Gödel czy Turing. Podobnie niewiele powiem o zastosowaniach matematyki (wyjąwszy podstawy fizyki), są one bowiem nazbyt liczne i wymagają specjalnego podejścia, a każdemu można by poświęcić osobny wykład. Nie miałoby też sensu układanie listy twierdzeń czy choćby listy sławnych matematyków w ostatnich stu latach. Byłoby to nudne. W zamian chcę podjąć kilka tematów, które moim zdaniem przenikają na wskroś całą matematykę i podkreślić to, co się tam zdarzyło.

Niech mi też wolno będzie uczynić na początku ogólną uwagę. Stulecia są terminami umownymi. Nikt z nas w istocie nie wierzy, że wraz ze stuleciem coś się nagle zatrzymuje, a coś zaczyna od nowa. Kiedy więc opisuję matematykę dwudziestego wieku, traktuję daty dość niefrasobliwie. Jeśli coś

[1] OD REDAKCJI. Jest to przekład Wykładu Fieldsa, jaki Autor wygłosił na World Mathematical Year 2000 Symposium, które odbyło się w dniach 7-9 czerwca 2000 r. w Toronto (Kanada). Później wykład ten był publikowany w Bulletin of the London Mathematical Society, Journal of the IMA i innych czasopismach. Oryginalną wersję wykładu przesłał Redakcji Abe Shenitzer za pośrednictwem Zbigniewa Semadeniego, po czym Autor wyraził łaskawą zgodę na przekład i opublikowanie wykładu po polsku w Wiadomościach Matematycznych. Wszystkim im, a zwłaszcza Autorowi, Redakcja składa podziękowanie. Tłum. R. Duda.

zaczęło się po roku 1890 i przeszło do wieku XX, będę taki szczegół terminowy ignorował. Będę się zachowywał jak astronom i operował wielkościami przybliżonymi. W istocie wiele rzeczy zaczęło się w wieku XIX, przyniosło zaś owoce w wieku XX.

Jedną z trudności niniejszego przedsięwzięcia jest to, że bardzo trudno cofnąć się wstecz i zdać sobie sprawę, co znaczyło około roku 1900 być matematykiem. Zbyt wiele matematyki ubiegłego stulecia nasza kultura i my sami przyswoiliśmy. Przecież jeśli dokonujesz w matematyce naprawdę znaczącego odkrycia, zostaniesz całkowicie pominięty! Po prostu zostanie to wchłonięte przez podglebie. Cofając się więc wstecz, musimy spróbować wyobrazić sobie jak wyglądało to w okresie, kiedy ludzie nie myśleli tak jak my.

Od lokalnego do globalnego. Mam zamiar zacząć od wyliczenia pewnych tematów i powiedzenia coś o nich. Pierwszym moim tematem jest, mówiąc nieściśle, to co można by nazwać przejściem od lokalnego do globalnego. W okresie klasycznym ludzie na całym świecie badali zjawiska w małej skali, we współrzędnych lokalnych itd. W tym stuleciu nacisk został przeniesiony na próbę zrozumienia zachowania w dużej, globalnej skali. A ponieważ zachowanie globalne jest trudniejsze do zrozumienia, wiele z tego zostało zrobione tylko jakościowo, wobec czego wielkiego znaczenia nabrały idee topologiczne. Tym, który był pionierem w topologii i jednocześnie przewidywał, że w XX wieku topologia stanie się ważnym składnikiem matematyki, był Poincaré. Nie był to Hilbert, chociaż to on sformułował słynną listę problemów, ale na tej liście topologii właściwie nie ma. Dla Poincarégo było jednak oczywiste, że topologia będzie ważna.

Niech mi wolno będzie wymienić kilka dziedzin, a zobaczycie, co mam na myśli. Rozważmy, na przykład, analizę zespoloną (dawniejszą „teorię funkcji"), będącą w XIX wieku w centrum matematyki i stanowiącą przedmiot pracy takich wielkich postaci jak Weierstrass. Dla nich funkcja była funkcją jednej zmiennej zespolonej, a dla Weierstrassa funkcją był szereg potęgowy, coś, na czym można położyć rękę, zapisać i wyraźnie sobie wyobrazić, jakaś formuła. Funkcje były formułami, były wyraźnie określone. Ale potem prace Abela, Riemanna i ich następców zmieniły ten obraz i funkcje stały się określone nie tyle przez dokładne formuły, co przez swoje własności globalne: przez miejsca osobliwe, obszary określoności, zbiory wartości. I takie własności globalne stały się charakterystycznymi wyróżnikami funkcji, a lokalne ich rozwinięcie było już tylko jednym ze sposobów oglądu.

Coś podobnego stało się z równaniami różniczkowymi. Dawniej rozwiązywanie równania różniczkowego polegało na szukaniu explicite lokalnego rozwiązania, czegoś co można było napisać i wziąć w ręce. W miarę rozwoju rozwiązania stały się implicite. Już nie trzeba ich koniecznie mieć w postaci gładkich formuł. Tym, co rzeczywiście determinowało globalne własności rozwiązań, były ich osobliwości. Jest to bardzo podobne do tego, co zaszło w analizie zespolonej, choć w szczegółach wygląda inaczej.

W geometrii różniczkowej klasyczne postępowanie Gaussa i innych polegało na opisywaniu małych kawałków przestrzeni, małych fragmentów krzywizny i lokalnych równań zadających lokalną geometrię. Kiedy chce się uzyskać ogólny obraz powierzchni zakrzywionych, to przejście do dużej skali jest raczej naturalne a to pociąga topologię. Przy przechodzeniu od małego do dużego najbardziej znaczące stają się własności topologiczne.

Chociaż nie pasuje to ściśle do tego obrazu, teoria liczb doświadczyła czegoś podobnego. Teoretycy liczb rozróżniają to, co nazywają „teorią lokalną", kiedy mówią o pojedynczej liczbie pierwszej, jednej liczbie pierwszej w danej chwili, czy skończonym zbiorze liczb pierwszych, oraz „teorię globalną", kiedy rozważają jednocześnie wszystkie liczby pierwsze. Analogia między liczbami pierwszymi a punktami, między lokalnym a globalnym, a także idee, jakie pojawiły się w topologii, wywarły swój wpływ także na teorię liczb.

Fizyka klasyczna zajmuje się oczywiście zjawiskami lokalnymi, dla których pisze się równania różniczkowe rządzące zachowaniem w małej skali. Ale potem trzeba podjąć badania systemu fizycznego w dużej skali. Cała fizyka zajmuje się w istocie przewidywaniem tego, co się stanie, kiedy się przechodzi od małej skali, gdzie się rozumie to, co się dzieje, do dużej skali i do konkluzji.

Wzrost liczby wymiarów. Drugi mój temat jest inny, nazywam go wzrostem liczby wymiarów. I znów zacznijmy od klasycznej teorii zmiennych zespolonych: klasyczna teoria zmiennej zespolonej była przede wszystkim teorią jednej zmiennej zespolonej, badaną dokładnie, z dużym wyrafinowaniem. Przejście do dwóch lub więcej zmiennych zasadniczo miało miejsce w tym stuleciu i na tym obszarze pojawiły się nowe zjawiska. Nie wszystko jest tak samo jak dla jednej zmiennej. Pojawiły się zjawiska całkowicie nowe i teoria n zmiennych zaczęła dominować, przynosząc jedne z większych sukcesów tego stulecia.

Podobnie, geometrzy różniczkowi w przeszłości studiowali przede wszystkim krzywe i powierzchnie. Obecnie studiuje się geometrię n-wymiarowych rozmaitości i trzeba przez chwilę pomyśleć, by dostrzec, że było to duże przesunięcie. Dawne krzywe i powierzchnie były czymś, co rzeczywiście można było zobaczyć w przestrzeni. Wyższe wymiary były raczej fikcyjne, były to rzeczy, które można ujmować matematycznie, ale raczej nie brać całkiem serio. Idea, że bierze się je poważnie i poważnie je bada, jest w istocie produktem XX wieku. Podobnie nie byłoby wcale dla naszych XIX-wiecznych poprzedników oczywiste myślenie o większej liczbie funkcji, o badaniu nie jednej, lecz wielu funkcji, o funkcjach wektorowych. Tak więc wzrost nastąpił co do liczby zmiennych zarówno niezależnych jak i zależnych.

Algebra liniowa zawsze zajmowała się większą liczbą zmiennych, ale tam wzrost liczby wymiarów okazał się jeszcze bardziej drastyczny. Przeszła ona od wymiarów skończonych do nieskończonych, od przestrzeni liniowej do przestrzeni Hilberta o nieskończenie wielu zmiennych. Była w to włączona, oczywiście, także analiza. Po funkcjach wielu zmiennych nastąpiły funkcje funkcji, czyli funkcjonały. To są funkcje na przestrzeniach funkcji. Wszystkie one mają w istocie nieskończenie wiele zmiennych i to jest to, co nazywamy rachunkiem wariacyjnym. Podobnie działo się z ogólnymi (nie koniecznie liniowymi) funkcjami, starym obszarem, który wszakże nabrał znaczenia w XX wieku. Taki jest mój drugi temat.

Od przemienności do nieprzemienności. Trzecim tematem jest przejście od przemienności do nieprzemienności. Być może jest to jeden z najbardziej charakterystycznych rysów matematyki, zwłaszcza algebry, w XX wieku. Ten nieprzemienny aspekt algebry stał się nadzwyczaj wyraźny, a jego korzenie leżą oczywiście w XIX stuleciu. Różne korzenie. Praca Hamiltona nad kwaternionami była prawdopodobnie największym pojedynczym zaskoczeniem i miała ogromny wpływ, motywowany w istocie ideami mającymi coś wspólnego z fizyką. Była także praca Grassmanna nad algebrami zewnętrznymi, innym systemem algebraicznym, obecnie wchłoniętym przez naszą teorię form różniczkowych. Innymi wybitnymi źródłami była, oczywiście, praca Cayleya nad macierzami w algebrze liniowej, czy praca Galois w teorii grup.

Wszystko to były różne sposoby czy podejścia do wprowadzenia nieprzemiennego mnożenia do algebry, które stało się chlebem powszednim XX-wiecznej maszynerii algebraicznej. Wcale się już nad tym nie zastanawiamy, ale w XIX wieku wszystkie te wspomniane przykłady były, na różny sposób, ogromnymi przełomami. Rzecz jasna, zastosowania tych idei poszły w zadziwiająco różnych kierunkach. Macierze i nieprzemienne mnożenie w fizyce odnalazły się w teorii kwantów. Relacje komutacyjne Heisenberga są najważniejszym przykładem zastosowania nieprzemiennej algebry w fizyce, następnie przeniesionym przez von Neumanna do jego teorii algebr operatorowych.

Dominującym rysem matematyki XX wieku była także teoria grup, ale do tego wrócę później.

Od liniowości do nieliniowości. Następnym moim tematem jest przejście od liniowości do nieliniowości. Duże obszary matematyki klasycznej bądź są fundamentalnie liniowe bądź, jeśli nie dokładnie liniowe, to w przybliżeniu liniowe, badane jakimś rodzajem rozwinięć perturbacyjnych. Zjawiska istotnie nieliniowe są o wiele trudniejsze i poważnie zaczęto się nimi zajmować dopiero w tym wieku.

Historia zaczyna się od geometrii: geometria euklidesowa, geometria płaszczyzny i przestrzeni, linii prostych – wszystko to jest liniowe. Ale następnie przez różne rodzaje geometrii nieeuklidesowych dochodzi się do bardziej ogólnej geometrii Riemanna, gdzie rzeczy są już fundamentalnie nieliniowe. W równaniach różniczkowych poważne badania zjawisk nieliniowych ujawniło ogromny zakres nowych zjawisk, których nie widać przy podejściu klasycznym. Przytoczę tutaj tylko dwa, solitony i chaos, dwa bardzo odmienne aspekty teorii równań różniczkowych, które w tym stuleciu nabrały ogromnego znaczenia i stały się popularne. Przedstawiają alternatywne skrajności. Solitony przedstawiają nieoczekiwanie porządne zachowanie nieliniowych równań różniczkowych, zaś chaos przedstawia nieoczekiwanie nieporządne ich zachowanie. Każde się pojawia w innych sytuacjach, oba są interesujące i ważne, ale są to zjawiska fundamentalnie nieliniowe. I znów można prześledzić wczesną historię pracy nad solitonami do ostatniej części XIX stulecia, było to jednak tylko lekkie dotknięcie problemu.

W fizyce, oczywiście, równania Maxwella, podstawowe równania elektromagnetyzmu, są liniowymi równaniami cząstkowymi. Ich odpowiedniki, słynne równania Yanga-Millsa, nie są liniowe, choć takie powinny rządzić siłami uczestniczącymi w strukturze materii. Równania te nie są liniowe, ponieważ równania Yanga-Millsa są w istocie macierzowymi wersjami równań Maxwella, a ta okoliczność, że macierze nie są przemienne, powoduje pojawienie się w tych równaniach wyrazu nieliniowego. Tutaj widzimy interesujący związek między liniowością a nieliniowością. Nieprzemienność powoduje szczególnego rodzaju nieliniowość i jest to szczególnie interesujące i ważne.

Geometria *versus* algebra. Dotychczas wybierałem tematy ogólne, teraz natomiast chcę pomówić o towarzyszącej nam cały czas dychotomii w matematyce, oscylującej tam i z powrotem, co da mi także okazję do uczynienia paru filozoficznych spekulacji czy uwag. Mam na myśli dychotomię pomiędzy geometrią a algebrą. Geometria i algebra są dwoma formalnymi filarami matematyki, obie bardzo stare. Geometria zaczyna się od Greków, a nawet wcześniej, algebra od Arabów i Hindusów, obie mają więc dla matematyki podstawowe znaczenie, ale ich związki są niełatwe.

Zacznę od historii. Geometria euklidesowa była pierwszym przykładem teorii matematycznej i była to teoria ściśle geometryczna aż do wprowadzenia przez Kartezjusza współrzędnych algebraicznych na tym, co nazywamy płaszczyzną kartezjańską. Była to próba zredukowania myślenia geometrycznego do manipulacji algebraicznych. Był to oczywiście wielki przełom, wielki atak na geometrię ze strony algebraików. Jeśli porównać pracę Newtona i Leibniza w analizie, to należą one do różnych tradycji: Newton był fundamentalnie geometrą, a Leibniz był fundamentalnie algebraikiem i były po temu głębokie, dobre powody. Dla Newtona geometria czy rozwijany przezeń *calculus* były matematyczną próbą opisania praw przyrody. Zajmował się fizyką w szerokim sensie tego słowa, a fizyka miała swoje oparcie w geometrii. Jeśli chce się wiedzieć, jak się rzeczy mają, myśli się w terminach świata fizyki, w terminach obrazów geometrycznych. Kiedy rozwijał *calculus*, chciał go mieć w postaci tak bliskiej, jak to tylko możliwe, stojącemu za nim fizycznemu kontekstowi. Leibniz natomiast miał wizję, ambitny cel sformalizowania całej matematyki, przekształcenia jej w wielką algebraiczną maszynę. Było to całkowicie przeciwne podejściu Newtona. Jak wiadomo, w wielkiej kontrowersji pomiędzy Newtonem a Leibnizem zwyciężyła notacja Leibniza. Pochodne piszemy tak jak on. Duch Newtona jest obecny, ale przez długi okres czasu był pogrzebany.

Przy końcu XIX stulecia, sto lat temu, dwoma wielkimi postaciami byli, wspominani już przeze mnie, Poincaré i Hilbert. Każdy z nich jest uczniem, odpowiednio, Newtona lub Leibniza. Myśl Poincarégo była bardziej w duchu geometrii i topologii, których idee były dlań narzędziem fundamentalnym. Hilbert był bardziej formalistą; on chciał aksjomatyzować, formalizować, dawać ścisłe i formalne wysłowienia. Wyraźnie należą do różnych tradycji, chociaż żaden wielki matematyk nie może być łatwo zaklasyfikowany.

Kiedy przygotowywałem to wystąpienie, pomyślałem sobie, że powinienem przytoczyć niektóre dalsze nazwiska z naszego obecnego pokolenia, które stanowiłyby kontynuację tych tradycji. Jest bardzo trudno mówić o ludziach żyjących: kogo wpisać na tę listę? Następnie sobie pomyślałem, kto nie miałby nic przeciwko umieszczeniu po którejś ze stron takiej sławnej listy? I wybrałem dwa nazwiska: dziedzicem tradycji Newtona-Poincarégo jest Arnold, natomiast, jak sądzę, najsłynniejszym uczniem Hilberta jest Bourbaki. Arnold wcale nie ukrywa faktu, że jego spojrzenie na mechanikę, a w istocie na fizykę, jest fundamentalnie geometryczne i cofa się do Newtona; wszystko pomiędzy, za wyjątkiem paru ludzi takich jak Riemann, który był trochę z boku, było pomyłką. Bourbaki usiłował przeprowadzić program Hilberta aksjomatyzacji i formalizacji matematyki, co w dużym stopniu mu się udało. Każdy z tych punktów widzenia ma swoje zalety, ale jest między nimi napięcie.

Spróbuję przedstawić swój własny pogląd na różnicę między geometrią a algebrą. Oczywiście geometria jest o przestrzeni, co do tego nie ma wątpliwości. Kiedy patrzę na audytorium w tej sali, widzę sporo. W sekundzie czy mikrosekundzie mogę zebrać spory zakres informacji, co oczywiście nie jest przypadkowe. Nasze mózgi zostały tak skonstruowane, że zajmują się przede wszystkim widzeniem. Widzenie, jak to wiem od przyjaciół neurofizjologów, zatrudnia jakieś 80 do 90 procent kory mózgowej. W mózgu jest jakieś 17 ośrodków wyspecjalizowanych w różnych elementach procesu widzenia; niektóre dotyczą widzenia w poziomie, inne w pionie, jeszcze inne koloru, perspektywy, niektóre wreszcie znaczenia i interpretacji. Rozumienie świata i nadawanie mu sensu jest bardzo ważną częścią naszej ewolucji. Przeto intuicja przestrzenna czy przestrzenne spostrzeganie jest nadzwyczaj potężnym narzędziem i dlatego geometria jest w istocie tak potężną częścią matematyki – nie tylko dla rzeczy, które są oczywiście geometryczne, ale nawet dla tych, które takimi nie są. Usiłujemy im nadać postać geometryczną, bo to pozwala nam posługiwać się naszą intuicją. Nasza intuicja jest naszym najpotężniejszym narzędziem. Staje się to całkowicie jasne, kiedy próbujemy objaśnić jakiś kawałek matematyki studentowi czy koledze. Najpierw jest długie i trudne tłumaczenie, aż w końcu student rozumie. I co wtedy mówi? Student mówi: „widzę!". Widzenie jest synonimem rozumienia i słowa „percepcja" używamy w obu tych znaczeniach, przynajmniej w języku angielskim. Byłoby rzeczą ciekawą porównanie z innymi językami. Myślę, że jest to sprawą bardzo fundamentalną, że ludzki umysł w swojej ewolucji osiągnął tę nadzwyczajną zdolność absorbowania obszernej informacji dzięki momentalnej akcji wzrokowej. A matematyka to podejmuje i udoskonala.

Algebra natomiast (ale słuchacz może nie podzielać tego stanowiska) zasadniczo dotyczy czasu. Jakikolwiek rodzaj algebry weźmiemy, wykonuje się w nim ciąg operacji jedna po drugiej i to „jedna po drugiej" oznacza, że musimy mieć czas. W statycznym wszechświecie nie można sobie wyobrazić algebry, ale geometria jest zasadniczo statyczna. Mogę tu siedzieć i patrzeć i nic się może nie zmieniać, a mimo to mogę widzieć. Algebra wszakże ma do czynienia z czasem, ponieważ jej operacje trzeba wykonywać kolejno, a kiedy mówię „algebra", nie mam na myśli akurat algebry współczesnej. Każdy algorytm, każdy proces rachunkowy, jest ciągiem kroków wykonywanych jeden po drugim. Współczesny komputer wyraźnie to nam uświadamia. Współczesny komputer pobiera informację w postaci ciągu zer i jedynek i takąż nam daje odpowiedź.

Algebra dotyczy manipulacji w czasie, a geometria dotyczy przestrzeni. Są to dwa ortogonalne aspekty świata, przedstawiające dwa różne punkty widzenia na matematykę. Tak więc argumentacja czy dialog miedzy matematykami z przeszłości na temat relatywnego znaczenia geometrii i algebry jest czymś bardzo fundamentalnym. Oczywiście nie ma sensu myśleć o tym tak, że jedna strona traci, a druga zyskuje. Sam chętnie myślę o tym w postaci analogii: pytanie „chciałbyś być algebraikiem czy geometrą?" jest podobne do pytania „chciałbyś być głuchy czy ślepy?". Jeśli jesteś ślepy, nie widzisz przestrzeni, a jeśli jesteś głuchy – nie słyszysz. Na ogół chcemy mieć jedno i drugie.

W fizyce występuje analogiczny, równoległy podział na pojęcia i eksperymenty. Fizyka ma odpowiadające im dwie składowe: teorię – pojęcia, idee, słowa, prawa oraz aparat eksperymentalny. Myślę, że w pewnym szerokim sensie pojęcia są geometryczne, ponieważ dotyczą rzeczy mających miejsce w rzeczywistym świecie. Z drugiej natomiast strony eksperyment jest bardziej podobny do algebraicznych rachunków. Robisz coś w czasie, mierzysz jakieś wielkości, wstawiasz je w jakieś formuły, ale podstawowe pojęcia za tymi eksperymentami są częścią tradycji geometrycznej.

Jednym ze sposobów przedstawienia tej dychotomii, sposobem bardziej filozoficznym czy literackim jest powiedzenie, że algebra jest dla geometry tym, co można nazwać „ofertą Fausta". Jak wiadomo, Faustowi w dziele Goethego szatan oferował wszystko, czego by on zapragnął (w jego przypadku miłość pięknej kobiety) w zamian za zaprzedanie swojej duszy. Algebra jest szatańską ofertą dla matematyka. Szatan mówi: „Dam ci tę potężną machinę, a ona odpowie ci na każde pytanie, jakie tylko zechcesz. Wszystko, co masz zrobić, to oddać mi swoją duszę: oddaj geometrię, a będziesz miał tę piękną machinę." (Dzisiaj możesz myśleć o niej jako o komputerze!) Oczywiście chcielibyśmy mieć jedno i drugie: prawdopodobnie próbowalibyśmy oszukać szatana udając, że sprzedajemy swoją duszę, ale jej nie oddając. A jednak jest to dla duszy niebezpieczne, przechodząc bowiem do algebraicznych rachunków przestajemy w zasadzie myśleć; przestajemy myśleć geometrycznie, przestajemy myśleć o sensie.

Jestem trochę zbyt surowy dla algebraików, fundamentalnym celem algebry było jednak zawsze wyprodukowanie formuły, którą mógłbyś włożyć do maszyny, przekręcić rączkę i dostać odpowiedź. Bierze się coś, co ma znaczenie, przekształca to na formułę i otrzymuje odpowiedź. W tym procesie nie musisz już myśleć o tym, jakie różne stadia algebry odpowiadają temu czemuś w geometrii. Tracisz wgląd, a to może się okazać ważne! Może będziesz chciał później do tego wrócić. To właśnie nazywam „ofertą Fausta". Z pewnością jest to prowokacyjne.

Ten wybór między geometrią a algebrą prowadził do hybryd, które zaciemniały obie i granica między nimi nie jest tak prosta i naiwna, jak to przedstawiłem. Na przykład, algebraicy często używają diagramów. A czymże jest diagram, jak nie koncesją na rzecz intuicji geometrycznej.

Wspólne techniki. Niech mi teraz będzie wolno wrócić i mówić o tematach nie tyle w znaczeniu treści, ile raczej w znaczeniu technik i wspólnie używanych metod. Zamierzam opisać pewną liczbę wspólnych metod, stosowanych w szerokim zakresie dziedzin.

Pierwsza jest teoria homologii. Tradycyjnie teoria homologii zaczęła się od topologii. Dotyczy ona następującej sytuacji. Masz skomplikowaną przestrzeń topologiczną i chcesz wycisnąć z niej jakąś prostą informację związaną z liczeniem dziur lub czymś podobnym, jakieś addytywne niezmienniki liniowe, które można związać ze skomplikowaną przestrzenią. Jest to konstrukcja, jeśli tak chcecie, niezmienników liniowych w nieliniowej sytuacji.

Geometrycznie można myśleć o cyklach, które można dodawać lub odejmować i z których wydobywa się to, co się nazywa grupą homologii przestrzeni. Homologia jest podstawowym narzędziem algebraicznym, wymyślonym w pierwszej połowie tego stulecia jako sposób uzyskania informacji o przestrzeniach topologicznych, jakaś algebra wydobyta z geometrii.

Homologia pojawia się także w innych kontekstach. Pojawiła się u Hilberta i w studium wielomianów. Wielomiany są funkcjami, które nie są liniowe i które można mnożyć, by dostać wyższe ich rzędy. Wielkim pomysłem Hilberta było rozpatrywanie „ideałów", liniowych kombinacji wielomianów, o wspólnych zerach. Szukał generatorów tych ideałów, ale te generatory mogły być zbyteczne. Szukał relacji, a potem relacji między relacjami, które nazwano „syzygiami Hilberta" i dostał ich hierarchię. Ta teoria Hilberta była bardzo wyszukaną próbą zredukowania sytuacji nieliniowej, studium wielomianów, do sytuacji liniowej. W istocie Hilbert doszedł do skomplikowanego układu relacji liniowych, ujmującego zwięźle jakąś informację o nieliniowych obiektach, wielomianach.

Ta teoria algebraiczna jest w istocie ściśle równoległa do teorii topologicznej i dzisiaj obie się zlały w to, co się nazywa „algebrą homologiczną". W geometrii algebraicznej jednym z wielkim triumfów lat pięćdziesiątych był rozwój kohomologicznej teorii snopów i jej rozszerzenie na geometrię analityczną przez szkołę francuską Leray'a, Cartana, Serre'a i Grothendiecka, gdzie można znaleźć kombinację idei topologicznych Riemanna-Poincarégo, idei algebraicznych Hilberta i sporo dobrej analizy.

Okazuje się, że teoria homologii ma jeszcze szersze zastosowania w innych gałęziach algebry. Można wprowadzić grupy homologii, które zawsze są obiektami liniowymi związanymi z nieliniowymi. Można wziąć grupy, na przykład grupy skończone albo algebry Liego, obie mają związane z sobą grupy homologii. Bardzo ważne zastosowania teorii homologii są, poprzez teorię Galois, w teorii liczb. Teoria homologii okazała się jednym z najpotężniejszych narzędzi analizy w wielu rozmaitych sytuacjach, charakterystycznym dla matematyki XX wieku.

<u>K-teoria</u>. Później pojawiła się inna technika, pod wieloma względami podobna do teorii homologii, również mająca szerokie zastosowania i przenikająca wiele części matematyki. Aczkolwiek korzenie ma starsze, wynurzyła się dopiero w połowie XX wieku. Ściśle związana z teorią reprezentacji, nazywa się „K-teorią". Teoria reprezentacji, powiedzmy, grup skończonych zaczęła się w poprzednim stuleciu, ale jej współczesna postać, czyli K-teoria, jest znacznie późniejsza. O K-teorii można myśleć także w następujący sposób: bierzemy teorię macierzy, w której macierze nie są przemienne względem mnożenia i próbujemy skonstruować abelowe lub liniowe ich niezmienniki. Takimi abelowymi niezmiennikami są ślady, wymiary i wyznaczniki, zaś K-teoria jest próbą systematycznego ich traktowania. Czasem nazywa się ją

„stabilną algebrą liniową". Idea jest taka, że jeśli mamy do dyspozycji duże macierze, to macierze A i B, które nie komutują (nie są przemienne), będą komutowały po umieszczeniu ich w pozycjach ortogonalnych w różnych blokach. Ponieważ w dużej przestrzeni można rzeczy obracać, to traktując rzecz w sposób przybliżony można to sobie wyobrazić jako pewne przedstawienie o bazie technicznej K-teorii. Jej wspólną cechą z teorią homologii jest to, że obie próbują wydobyć informację liniową ze skomplikowanej sytuacji nieliniowej.

W geometrii algebraicznej K-teorię pierwszy z dużym powodzeniem zastosował Grothendieck, co znajdowało się w ścisłym związku ze wspomnianą chwilę temu teorią snopów i jego własną pracą nad twierdzeniem Riemanna-Rocha.

Hirzebruch i ja skopiowaliśmy te idee i zastosowaliśmy je w czysto topologicznym kontekście. Podczas gdy praca Grothendiecka odnosiła się do pracy Hilberta o syzygiach, nasza praca była bliższa pracy Riemanna-Poincarégo nad homologiami, posługującej się funkcjami ciągłymi, a nie wielomianami. Odegrała ona także pewną rolę w teorii indeksu liniowych eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych.

Milnor, Quillen i inni rozwinęli algebraiczną stronę tej historii w inną stronę, z możliwymi zastosowaniami w teorii liczb, co doprowadziło do wielu interesujących pytań.

W analizie funkcjonalnej praca wielu ludzi, w tym Kasparowa, rozciągnęła K-teorię na nieprzemienne C^*-algebry. Funkcje ciągłe na przestrzeni tworzą algebrę przemienną względem mnożenia, w innych jednak sytuacjach mamy ich nieprzemienne analogi i analiza funkcjonalna okazuje się naturalnym miejscem dla wszystkich pytań tego rodzaju.

Tak więc K-teoria jest stosunkowo prostym formalizmem, któremu poddało się wiele różnych fragmentów matematyki, chociaż w każdym przypadku występują dość trudne problemy techniczne, specyficzne dla danego fragmentu i łączące się z innymi fragmentami. Nie jest to narzędzie jednorodne, raczej jest to jednorodne podejście, z analogiami i podobieństwami między jednym fragmentem a drugim.

Sporo tej pracy przeniósł Alain Connes na „nieprzemienną geometrię różniczkową". Jest rzeczą interesującą, że zupełnie niedawno Witten, pracując nad teorią strun (najnowsza idea w podstawach fizyki) zidentyfikował bardzo interesujące sposoby, jak K-teoria może być naturalnym miejscem rozważania tak zwanych „conserved quantities". Dawniej myślano, że takim naturalnym miejscem jest teoria homologii, obecnie wydaje się, że bardziej odpowiednia będzie K-teoria.

Grupy Liego. Innym jednoczącym pojęciem, a nie tylko techniką, są grupy Liego. Grupy te, przez które zasadniczo rozumiemy grupy ortogonalne, unitarne i symplektyczne oraz pewne grupy wyjątkowe, odegrały bardzo ważną rolę w dziejach XX-wiecznej matematyki. Także one zaczęły się w XIX wieku, kiedy to XIX-wieczny matematyk norweski Sophus Lie, Felix Klein i inni rozwijali „teorię grup ciągłych", jak się one wówczas nazywały. Dla Kleina był to początkowo sposób powiązania różnych rodzajów geometrii, euklidesowej i nieeuklidesowych. Chociaż przedmiot zaczął się w XIX wieku, tak naprawdę rozwinął się dopiero w wieku XX, który stał już pod znakiem silnej dominacji grup Liego jako wspólnego podejścia do studiowania wielu różnych problemów.

Wspomniałem o roli idei Kleina w geometrii. Dla Kleina geometrie były przestrzeniami jednorodnymi, w których obiekty można było swobodnie przemieszczać bez zniekształcania, a przeto były to przestrzenie określone przez odpowiednie grupy izometrii. Grupa euklidesowa dawała geometrię euklidesową, inna grupa Liego dawała geometrię hiperboliczną. Później wszakże, pod wpływem pracy Riemanna w geometrii, zainteresowanie przesunęło się na geometrie, które nie były jednorodne, gdzie krzywizna zmieniała się z punktu do punktu i gdzie nie było globalnych symetrii przestrzeni. Mimo to grupy Liego nadal odgrywały ważną rolę, pojawiają się one bowiem także na poziomie infinitezymalnym, w przestrzeni stycznej mamy bowiem współrzędne euklidesowe. Tak więc infinitezymalnie, w przestrzeni stycznej, znów pojawia się teoria grup Liego, ale ponieważ trzeba porównywać różne punkty na różnych miejscach, trzeba umieć jakoś te rzeczy przesuwać i borykać się z różnymi grupami Liego. Taką teorię rozwinął Elie Cartan i to stało się podstawą nowoczesnej geometrii różniczkowej, istotną dla teorii względności Einsteina. Teoria Einsteina była oczywiście silnym bodźcem dla całego rozwoju geometrii różniczkowej.

Przenieśmy się do XX wieku. Aspekt globalny, o którym już mówiłem, połączył grupy Liego i geometrię różniczkową na poziomie globalnym. Istotny rozwój, dzieło Borela i Hirzebrucha, dostarczył informacji o tak zwanych „klasach charakterystycznych". Są to niezmienniki topologiczne łączące trzy kluczowe obszary: grupy Liego, geometrię różniczkową i topologię, a także oczywiście algebrę związaną z samym pojęciem grupy.

W kierunku bardziej analitycznym odnajdujemy to, co się dzisiaj nazywa nieprzemienną analizą harmoniczną. Jest to uogólnienie teorii Fouriera, gdzie szereg Fouriera czy całka Fouriera odpowiadają w zasadzie przemiennym grupom Liego okręgu i linii prostej. Zastępując te ostatnie przez bardziej skomplikowane grupy Liego otrzymuje się bardzo piękną, wyszukaną teorię łączącą teorię reprezentacji grup Liego i analizę. To w istocie było dzieło życia Harish-Chandry.

W teorii liczb mieliśmy cały tak zwany „program Langlandsa", ściśle związany z teorią Harish-Chandry i lokujący się w teorii grup Liego. Z każdą grupą Liego wiąże się pewna teoria liczb i program Langlandsa, do pewnego stopnia wykonany. Wpłynęło to na sporą część pracy w algebraicznej teorii liczb w drugiej połowie tego stulecia. Należy tu badanie form modularnych, a w tym praca Andrew Wilesa nad Ostatnim Twierdzeniem Fermata.

Można by pomyśleć, że grupy Liego mają szczególne znaczenie jedynie w kontekście geometrycznym ze względu na potrzebę ciągłości zmiany, jednakże analogi grup Liego nad skończonymi ciałami dają grupy skończone i w ten sposób powstaje większość grup skończonych. Przeto niektóre techniki teorii grup Liego mają zastosowanie nawet w sytuacji dyskretnej dla ciał skończonych lub ciał lokalnych. Mnóstwo pracy tutaj jest czystą algebrą, np. praca związana z nazwiskiem George'a Lusztiga, gdzie studiuje się teorię reprezentacji takich grup skończonych i gdzie wiele ze wspomnianych przeze mnie technik ma swoje odpowiedniki.

Grupy skończone. Tak więc doszliśmy do grup skończonych, a to mi przypomina, że w związku z klasyfikacją skończonych grup prostych powinienem uczynić pewne wyznanie. Jakiś czas temu, kiedy ta historia ze skończonymi grupami prostymi się kończyła, udzielałem wywiadu, w trakcie którego padło pytanie, co o tym myślę. Pospieszyłem się mówiąc, że nie uważam tego za ważne. Mój argument był taki, że klasyfikacja skończonych grup prostych mówiła nam, że znaliśmy, poza nielicznymi wyjątkami, większość grup prostych. W pewnym sensie to zamykało, a nie otwierało sprawę. A kiedy sprawy się zamykają, a nie otwierają, nie wpadam w stan podniecenia. Ale oczywiście bardzo wielu moich przyjaciół, pracujących w tym obszarze było bardzo, bardzo zagniewanych. Musiałem potem nosić coś w rodzaju kamizelki kuloodpornej!

Była w tym jednak i strona pozytywna. Zwróciłem mianowicie uwagę, że na liście tak zwanych „grup sporadycznych" największa nosiła imię Monstrum. Wydaje mi się, że odkrycie samego tego Monstrum jest najbardziej ekscytującym rezultatem tej klasyfikacji. Okazuje się, że Monstrum jest nadzwyczaj interesującym zwierzęciem, które jest ciągle jeszcze badane. Ma ono nieoczekiwane związki z innymi obszarami matematyki, z modularnymi funkcjami eliptycznymi, a nawet z fizyką teoretyczną i kwantową teorią pola. Był to interesujący produkt uboczny tej klasyfikacji. Klasyfikacje jako takie, jak powiedziałem, zamykają drzwi, ale Monstrum drzwi otworzyło.

Wpływ fizyki. Przejdę teraz do innego tematu, a mianowicie wpływu fizyki. W swojej historii fizyka ma od dawna związki z matematyką i duże działy matematyki, na przykład rachunek różniczkowy i całkowy, zostały rozwinięte dla rozwiązywania problemów fizycznych. W połowie XX wieku było to już może mniej widoczne, większość czystej matematyki rozwijała się bowiem bardzo dobrze bez związku z fizyką, jednakże w ostatnim dwudziestopięcioleciu owego stulecia sprawy uległy dramatycznym zmianom. Dokonam teraz krótkiego przeglądu związków fizyki z matematyką, a w szczególności z geometrią.

Wspominałem już o ogólnej teorii względności i pracy Einsteina. Ogromny wkład wniosła oczywiście mechanika kwantowa. Nie tylko w relacjach komutacyjnych, ale, co znacznie ważniejsze, w nacisku na przestrzeń Hilberta i teorię spektralną.

W sposób bardziej konkretny i oczywisty, krystalografia w swojej postaci klasycznej zajmowała się symetriami struktur krystalicznych. Ze względu na ich zastosowania w krystalografii studiowano przede wszystkim te skończone grupy symetrii, jakie mogą mieć miejsce wokół punktów. W tym stuleciu okazało się, że głębsze zastosowania teorii grup mają związki z fizyką. Cząstki elementarne, z których materia wydaje się być zbudowana, okazują się posiadać symetrie ukryte na najniższym poziomie, gdzie przyczaiły się pewne grupy Liego, czego nie można już widzieć, jednakże kiedy bada się rzeczywiste zachowania tych cząstek, ujawniają one te swoje symetrie. Narzuca się więc model z istotnym składnikiem symetrii i w rezultacie mamy dziś różne teorie, w których pewne podstawowe grupy Liego takie jak $SU(2)$ czy $SU(3)$ są wbudowane jako pierwotne grupy symetrii. W ten sposób te grupy Liego okazują się cegiełkami materii.

Nie pojawiają się tu wyłącznie zwarte grupy Liego. W fizyce występują pewne nie-zwarte grupy Liego takie jak grupa Lorentza. I właśnie fizycy jako pierwsi podjęli badanie teorii reprezentacji niezwartych grup Liego. Są to reprezentacje, które wymagają przestrzeni Hilberta, ponieważ dla grup zwartych reprezentacje nieprzywiedlne są skończenie wymiarowe, jednakże grupy niezwarte wymagają wymiarów nieskończonych. I właśnie fizycy pierwsi zdali sobie z tego sprawę.

W ostatniej ćwierci XX wieku, która się właśnie kończy, nastąpił ogromny przypływ nowych idei z fizyki do matematyki. Być może jest to jedna z najbardziej zadziwiających historii całego tego wieku. Potrzebny byłby na to całkiem osobny wykład, w istocie chodzi jednak o to, że kwantowa teoria pola i teoria strun znajdowały zadziwiające zastosowania, dając w wielu dziedzinach matematyki nowe wyniki, idee i techniki. Chcę przez to powiedzieć, że fizycy potrafili przewidywać, opierając się na swoim rozumieniu teorii fizycznych, prawdziwość pewnych rzeczy w matematyce. Oczywiście nie stały za tym ścisłe dowody, opierało się to wszakże na potężnej intuicji, przypadkach specjalnych i analogiach. Takie przewidywania fizyków były raz po razie przez matematyków sprawdzane i okazywały się fundamentalnie poprawne, nawet chociaż bywa całkiem trudno podać dowody, a wiele z tych przewidywań nie zostało jeszcze w pełni dowiedzionych.

Tak więc w minionym dwudziestopięcioleciu nastąpił ogromny ruch w tym kierunku. Wyniki okazały się nadzwyczaj szczegółowe. To nie jest tak, że fizycy mówią „ten rodzaj rzeczy powinien być prawdziwy". Oni powiadają „oto precyzyjna formuła, a tutaj pierwszych jej dziesięć przypadków" (sprawdzonych z dokładnością do 12 i więcej miejsc znaczących). Dają dokładne odpowiedzi na złożone zagadnienia, wcale nie takie, jakich można by oczekiwać; rzeczy, dla wyrachowania których potrzebna jest cała maszyneria. Kwantowa teoria pola dostarczyła zadziwiającego narzędzia, które jest bardzo trudno zrozumieć matematycznie, ale które dało zastosowaniom nieoczekiwaną premię. Historia ostatnich 25 lat naprawdę była ekscytująca.

Oto niektóre jej elementy: praca S. Donaldsona o 4-wymiarowych rozmaitościach, praca V. Jonesa o niezmiennikach węzłów, symetrie zwierciadlane i grupy kwantowe, wspomniane już Monstrum.

O czym to wszystko traktuje? Jak już wspomniałem, wiek XX był świadkiem przesunięcia w liczbie wymiarów aż do nieskończoności. Fizycy poszli jeszcze dalej. W kwantowej teorii pola próbują oni w istocie przeprowadzić bardzo szczegółowe i głębokie badania. Nieskończenie-wymiarowe przestrzenie, z którymi mają do czynienia, są z reguły przestrzeniami funkcyjnymi różnego rodzaju. Są one bardzo skomplikowane nie tylko z powodu nieskończonego wymiaru, ale także z powodu skomplikowanej algebry i geometrii, a także topologii, a nadto są w tym duże, nieskończenie-wymiarowe grupy Liego. O ile spore obszary XX-wiecznej matematyki były włączone w rozwijanie geometrii, topologii, algebry i analizy na skończenie-wymiarowych grupach Liego, ta część fizyki odnosiła się do analogicznego traktowania przypadku nieskończenie-wymiarowego, co oczywiście jest całkiem inną historią, bardzo się jednak opłacającą.

Wyjaśnię to nieco bardziej szczegółowo. Kwantowe teorie pola mają miejsce w przestrzeni i czasie; przestrzeń jest w istocie 3-wymiarowa, ale są modele uproszczone, gdzie ten wymiar wynosi 1. W przestrzeni 1-wymiarowej i 1-wymiarowym czasie typowymi rzeczami, z jakimi fizycy mają do czynienia, są – mówiąc matematycznie – grupy takie jak dyfeomorfizmy okręgu czy grupa odwzorowań różniczkowalnych okręgu w zwartą grupę Liego. Są to dwa najbardziej fundamentalne przykłady nieskończenie-wymiarowych grup Liego, które się pojawiają w kwantowych teoriach pola w tych wymiarach i są to całkiem dobre obiekty matematyczne, badane przez matematyków od pewnego już czasu.

W takich teoriach wymiaru 1+1 czasoprzestrzenią może być powierzchnia Riemanna, a to prowadzi do nowych wyników. Na przykład, klasycznym obiektem sięgającym ostatniego wieku jest przestrzeń modularna powierzchni Riemanna danego rodzaju. Kwantowa teoria pola doprowadziła do nowych wyników o kohomologiach tych przestrzeni modularnych. Inną, dość podobną przestrzenią modularną jest przestrzeń modularna płaskich G-wiązek nad powierzchnią Riemanna rodzaju g. Są to bardzo interesujące przestrzenie i kwantowa teoria pola dostarcza dla nich bardzo precyzyjnych wyników. W szczególności są to piękne formuły dla objętości, w których występują wartości funkcji zeta.

Inne zastosowanie wiąże się z liczeniem krzywych. Jeśli rozpatrywać płaskie krzywe algebraiczne danego stopnia i danego typu, pragnąc się dowiedzieć ile z nich, na przykład, przechodzi przez jakieś tam punkty, otrzymujemy problemy enumeracyjne geometrii algebraicznej, klasyczne w ostatnim stuleciu. Są one bardzo trudne. Rozwiązuje się je za pomocą nowej maszynerii zwanej „kwantowymi kohomologiami", stanowiącej część historii o kwantowej teorii pola. A można też rozpatrywać trudniejsze pytania dotyczące krzywych nie na płaszczyźnie, ale na zakrzywionych rozmaitościach. Dostaje się inną piękną historię z wyraźnymi wynikami uzyskanymi przy udziale symetrii zwierciadlanych. Wszystko to pochodzi z kwantowej teorii pola wymiaru $1+1$.

Podnosząc wymiar o 1 do przypadku 2-wymiarowej przestrzeni i 1-wymiarowego czasu przechodzimy do sytuacji, w której pojawia się teoria V. Jonesa niezmienników węzłów. Znajduje ona eleganckie objaśnienie i interpretację w terminach kwantowej teorii pola.

Wynurza się stąd także to, co nazywa się „grupami kwantowymi". Najładniejszą rzeczą w tych grupach kwantowych jest ich nazwa, bo nie są to wcale grupy! Gdyby mnie zapytać o definicję grupy kwantowej, potrzebowałbym dodatkowe pół godziny. Są to skomplikowane obiekty i nie ma żadnych wątpliwości co do tego, że mają one głęboki związek z teorią kwantów. Wyłoniły się z fizyki i są używane przez praktycznych algebraików w konkretnych obliczeniach.

Jeśli stawiamy jeszcze jeden krok i przechodzimy do pełnej 4-wymiarowej teorii (wymiar $3+1$), to tu pasuje teoria Donaldsona 4-wymiarowych rozmaitości, a kwantowa teoria pola ma wpływ ogromny. W szczególności doprowadziło to Seiberga i Wittena do stworzenia ich alternatywnej teorii, opartej na intuicji fizycznej, a jednocześnie dostarczającej cudownych wyników matematycznych. Są to wszystko przykłady cząstkowe, a jest ich o wiele więcej.

Jest jeszcze teoria strun, ale ta jest już *passé*. Teraz powinniśmy mówić o M-teorii, a jest to teoria bogata, znów z dużą liczbą aspektów matematycznych. Wyniki od niej pochodzące są jeszcze rozważane i przez długi jeszcze czas będą zajmowały matematyków.

Podsumowanie historyczne. Spróbuję teraz dokonać szybkiego podsumowania. Spójrzmy na historię w wielkim skrócie: co stało się z matematyką? Bez zająknienia połączę razem wieki XVIII i XIX jako erę, którą możemy nazwać matematyką klasyczną, erę związaną z Eulerem i Gaussem, w której cała ta wielka matematyka klasyczna została wypracowana i rozwinięta. Można było nawet myśleć, że to był niemal koniec matematyki, jednakże wbrew temu wiek XX okazał się bardzo produktywny i o tym właśnie mówię.

Z grubsza można podzielić wiek XX na dwie połówki. Wyobrażam sobie, że pierwsza jego połowa była zdominowana przez coś, co nazwałbym „erą specjalizacji". Erą, w której wielki wpływ miało podejście Hilberta polegające na formalizowaniu rzeczy, starannym ich definiowaniu, a następnie czynieniu z tego użytku na każdym polu. Jak wspomniałem, wiąże się z tym trendem, w którym skupiano uwagę na tym, co można w danym czasie uzyskać w ramach szczególnego systemu algebraicznego czy innego, nazwisko Bourbakiego. Druga natomiast połowa XX wieku była znacznie bardziej tym, co nazwałbym „erą unifikacji". Przekraczano w niej granice, przenoszono techniki z jednej dziedziny do drugiej, na ogromną skalę tworzono mieszańce. Prawdopodobnie jest to nadmierne uproszczenie, myślę wszakże, że podsumowuje ono krótko niektóre z aspektów, jakie można dostrzec w XX-wiecznej matematyce.

A co z wiekiem XXI? Powiedziałem, że wiek XXI może być erą matematyki kwantowej lub, jeśli wolicie, matematyki nieskończenie-wymiarowej. Co to może znaczyć? Matematyka kwantowa mogłaby dać nam, jeśli dotarlibyśmy dostatecznie daleko, właściwe rozumienie analizy, geometrii, topologii i algebry różnych nieliniowych przestrzeni funkcyjnych. Przez „właściwe rozumienie" mam na myśli rozumienie w taki sposób, by móc otrzymać w pełni ścisłe dowody tych wszystkich pięknych rzeczy, o których mówią fizycy.

Trzeba powiedzieć, że jeśli się do nieskończonych wymiarów podchodzi w sposób naiwny i zadaje naiwne pytania, to zwykle dostaje się błędne odpowiedzi lub odpowiedzi te są nudne. Zastosowania fizyczne, intuicja, motywacje pozwoliły fizykom stawiać inteligentne pytania o nieskończonych wymiarach, a kiedy dostawali sensowne odpowiedzi, robić z nimi rzeczy nadzwyczaj subtelne. Uprawianie analizy nieskończenie-wymiarowej w ten sposób nie jest jednak w żadnym razie zajęciem łatwym. Trzeba zabierać się do tego w odpowiedni sposób, a sposobów jest mnóstwo. Kierunek jest wszakże wytyczony: to jest to, co należy zrobić, ale droga do przejścia jest jeszcze długa.

Co jeszcze może się zdarzyć w XXI wieku? Chciałbym tu podkreślić znaczenie nieprzemiennej geometrii różniczkowej Connesa. Tę znakomitą zunifikowaną teorię, która łączy wszystko, uzyskał A. Connes. Łączy ona analizę, algebrę, geometrię, topologię, fizykę i teorię liczb, i każda z tych dziedzin dołożyła swoją cegiełkę. Są to pewne ramy pozwalające robić to wszystko, co geometrzy różniczkowi zwykle robią, włączając w to związki z topologią, w kontekście nieprzemiennej analizy. Istnieją dobre powody dla postępowania w ten sposób, mianowicie zastosowania w teorii liczb, geometrii, grupach dyskretnych itd., a także w fizyce. Właśnie zostało wypracowane interesujące połączenie z fizyką. Jak daleko to pójdzie, co się osiągnie – to się dopiero zobaczy. Z pewnością zostanie to, jak oczekuję, znacząco rozwinięte w pierwszej przynajmniej dekadzie następnego wieku i jest możliwe, że będzie to miało związek z niedorozwiniętą jeszcze (ścisłą) kwantową teorią pola.

W innym kierunku jest coś, co nazywa się „geometrią arytmetyczną" lub geometrią Arakełowa, która stara się połączyć, na ile się tylko da, geometrię algebraiczną z fragmentami teorii liczb. Jest to bardzo udana teoria. Miała świetny start, ale przed nią daleka jeszcze droga. Kto wie?

Oczywiście, wszystko to ma wspólne elementy. Oczekuję, że fizyka będzie wywierać swój wpływ wszędzie, nawet na teorię liczb. A. Wiles się z tym nie zgadza. Czas to wyjaśni.

Są elementy, które będą pojawiać w następnej dekadzie, ale jest także coś, co nazywam dżokerem w talii: zejście do geometrii niskich wymiarów. W porównaniu z fantastyczną materią nieskończonych wymiarów geometria niskowymiarowa jest kłopotliwa. Pod wieloma względami wymiary, od których zaczynaliśmy, od których zaczynali nasi poprzednicy, pozostają czymś w rodzaju zagadki. Wymiary 2, 3 i 4 nazywamy „niskimi". Na przykład, praca Thurstone'a o 3-wymiarowej geometrii zmierza do klasyfikacji tych geometrii, które można nałożyć na 3-wymiarowe rozmaitości. Jest to znacznie głębsze niż teoria 2-wymiarowa. Program Thurstona nie został jeszcze wykonany, a jego zrealizowanie z pewnością jest wielkim wyzwaniem.

Inna zadziwiająca historia o 3 wymiarach wiąże się z pracą V. Jonesa, której idee pochodzą w zasadzie z fizyki. Daje nam ona więcej informacji o 3 wymiarach, ale jest to informacja niemal ortogonalna do tej zawartej w programie Thurstona. Jak powiązać te dwie strony jednej historii, pozostaje ogromnym wyzwaniem, ostatnio wszakże ukazały się pewne wskazówki co do możliwości przerzucenia mostu. Cały ten obszar niskich wymiarów ma związki z fizyką, ale tak naprawdę pozostaje nadal bardzo tajemniczy.

Na koniec chciałbym wspomnieć, że tym, co się wyraźnie z fizyki wyłania, są „dualności". Mówiąc nieściśle, te dualności pojawiają się, kiedy teoria kwantów ma dwie realizacje jako teoria klasyczna. Prostym przykładem jest dualność pomiędzy położeniem a momentem w mechanice klasycznej. Zastępuje się przestrzeń przez jej przestrzeń dualną, a w teoriach liniowych ta dualność jest akurat transformatą Fouriera. Jednakże w teoriach nieliniowych to, czym zastąpić transformatę Fouriera, jest jednym z dużych wyzwań. Spore fragmenty matematyki wiążą się z tym, jak uogólnić dualności w sytuacjach nieliniowych. Wydaje się, że fizycy potrafią to robić w zadziwiający sposób w swojej teorii strun i M-teorii. Przykład po przykładzie tworzą cudowne dualności, które w pewnym szerokim znaczeniu są nieskończenie-wymiarowymi nieliniowymi wersjami transformat Fouriera i te wersje wydają się dobre. Jednakże zrozumienie tych nieliniowych dualności również wydaje się jednym z dużych wyzwań następnego stulecia.

Myślę, że na tym poprzestanę. Jest bardzo dużo do zrobienia i jest rzeczą bardzo miłą dla takiego starego człowieka jak ja mówić do wielu ludzi młodych jak wy. Móc wam powiedzieć: w następnym stuleciu jest bardzo dużo do zrobienia przez was!