

DOBÓR WSPÓŁCZYNNIKÓW NIEREKURSYWNYCH FILTRÓW CYFROWYCH ZE WZGLĘDU NA WYGŁADZANIE SYGNAŁÓW W OBECNOŚCI SZUMU ADDYTYWNEGO

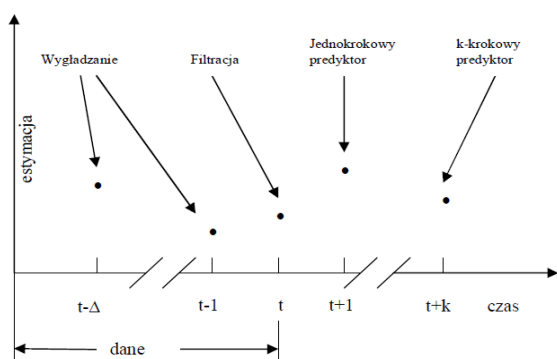
Streszczenie

W pracy przedstawiono zagadnienie wygładzania sygnałów przy pomocy cyfrowych filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej. Zaproponowano różne warianty współczynników filtru o 7-ciu elementach, których wartości dobierano w oparciu o żądany kształt charakterystyki amplitudowej. Praca może być wykorzystana na zajęciach z przedmiotu dotyczącego filtracji cyfrowej, a zwłaszcza w zagadnieniach usuwania zakłócenia addytywnego o rozkładzie normalnym.

WSTĘP

Wygładzanie jest jedną z metod cyfrowego przetwarzania sygnałów, polegającą na estymacji wartości sygnałów w ustalonych chwilach na podstawie zarówno poprzednich, jak i następnych obserwacji. W praktyce jest to zastąpienie wyrazów danego szeregu, mającego przebieg nieregularny, innym o przebiegu gładszym, o którym można przypuszczać, że lepiej reprezentuje istotę zjawiska niż szereg pierwotny. Najczęstszą metodą rozwiązania problemu wygładzania jest odpowiednia filtracja sygnału cyfrowego, skąd pochodzi również określenie „filtr wygładzający”, stosowane do określenia różnorodnych algorytmów wygładzania. Termin filtr jest często używany do określenia urządzenia istniejącego w formie sprzętowej lub programowej podłączonego do zaszumionego zbioru danych celem ekstrakcji pożądanej informacji. W dowolnym przypadku możemy zastosować filtr do przeprowadzenia trzech podstawowych operacji przetwarzania informacji:

- Filtracji, która oznacza ekstrakcję informacji w chwili t na podstawie danych zebranych do chwili t .
- Wygładzania (*ang. smoothing*), która różni się od filtracji tym, że estymowane parametry w chwili t powstają również na podstawie danych zebranych po chwili t . Oznacza to, że podczas wygładzania istnieje pewne opóźnienie przetwarzania informacji. Ponieważ podczas wygładzania wykorzystujemy dane zebrane nie tylko do chwili t , lecz także później, dlatego możemy oczekiwać dokładniejszej estymacji parametrów niż przy filtracji.
- Predykcji, która ma na celu określenie informacji o procesie, który będzie miał miejsce w przyszłości, np. w chwili $t+\tau$ dla $\tau > 0$ na podstawie zmierzonych sygnałów do chwili t .



Rys. 1. Ilustracja przedstawiająca operacje przetwarzania sygnału

Powyższe ustalenia można przedstawić na wykresie, pokazującym jak mają się dane w stosunku do estymowanej wartości wyjścia filtru z rys.1 [18].

Filtry wygładzające znalazły we współczesnym świecie nauki szerokie zastosowanie, gdyż istotą każdego eksperymentu jest pomiar różnych parametrów i wielkości, które w trakcie trwania analizowanego zjawiska mogą być obarczone różnego rodzaju zakłóceniami o charakterze losowym. W świecie nauki sygnałów o takim charakterze jest wiele, począwszy od przebiegów ekonometrycznych i statystycznych, poprzez sygnały określające procesy technologiczne, zjawiska fizyczne i chemiczne, kończąc na sygnałach w telekomunikacji i elektronice.

1. FILTR O SKOŃCZONEJ ODPOWIEDZI IMPULSOWEJ FIR

Filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (*ang. Finite Impulse Response filter - FIR filter*) – rodzaj nierekursywnego filtru cyfrowego. Nazwa FIR oznacza filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (polski skrót tej nazwy to filtr SOI). Oznacza to tyle, że reakcja na wyjściu tego układu na pobudzenie o skończonej długości jest również skończona (przez długość pobudzenia i odpowiedzi rozumiemy tu długość odcinka czasu, dla którego próbki sygnału przyjmują wartości niezerowe). Aby warunek ten był spełniony, w filtrach tego typu nie występuje pętla sprzężenia zwrotnego, z tego powodu nazywane są nierekursywnymi. Filtr ten opisany jest następującym równaniem:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \cdot x(n-m) \quad (1)$$

gdzie: $x(n)$ – sygnał wejściowy, $y(n)$ – sygnał wyjściowy, $h(m)$ – odpowiedź impulsowa filtra.

W dziedzinie częstotliwości równaniu (1) odpowiada zależność:

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) \quad \Omega = 2\pi \frac{f}{f_{pr}} \quad (2)$$

gdzie: $Y(e^{j\Omega})$, $H(e^{j\Omega})$ i $X(e^{j\Omega})$ – widma Fouriera, Ω – częstotliwość unormowana.

W przypadku zastosowania filtrów FIR do wygładzania sygnałów stosujemy skończoną liczbę współczynników $h(m)$ odpowiedzi impulsowej - N ($N=2k+1$ - zwykle nieparzysta ilość elementów) oraz wprowadzamy opóźnienie by dla bieżącej próbki sygnału wyjściowego $y(n)$ korzystać z przeszłych $x(n-k)$ i przyszłych $x(n+k)$ wartości

sygnału wejściowego. Jednocześnie korzystamy z symetrycznej odpowiedzi impulsowej co powoduje, że filtr ma liniową charakterystykę fazową. Powyższe ustalenia prowadzą do następującej zależności:

$$y(n) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} h(k) \cdot x(n+k) \quad \text{gdzie} \quad h(-k) = h(k) \quad (3)$$

Niniejsza praca stanowi rozwinięcie artykułu [4], w którym podano przykłady doboru współczynników filtrów FIR dla maski 5 – elementowej. W bieżącym artykule rozpatrzony zostanie filtr o masce 7 – elementowej.

2. PRZYKŁAD DOBORU WSPÓŁCZYNNIKÓW FILTRU FIR

Jako przykład zostanie rozpatrzony filtr nierekursywny o masce siedmioelementowej (N=7) opisany następującym równaniem:

$$y(n) = a \cdot x(n-3) + b \cdot x(n-2) + c \cdot x(n-1) + d \cdot x(n) + c \cdot x(n+1) + b \cdot x(n+2) + a \cdot x(n+3) \quad (4)$$

Dla którego charakterystyka częstotliwościowa opisana jest wzorem:

$$H(\Omega) = 2 \cdot a \cdot \cos(3 \cdot \Omega) + 2 \cdot b \cdot \cos(2 \cdot \Omega) + 2 \cdot c \cdot \cos(\Omega) + d$$

Jeżeli chcemy eliminacji wyższych częstotliwości – filtr dolno-przepustowy, to należy postawić warunki: $H(0)=1$ oraz $H(\pi)=0$ co prowadzi do zależności:

$$\begin{cases} H(0) = 2a + 2b + 2c + d = 1 \\ H(\pi) = -2a + 2b - 2c + d = 0 \end{cases} \quad (6)$$

którą przekształcając otrzymamy:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2} - 2b \\ c = \frac{1}{4} - a \end{cases}$$

Po podstawieniu do równania (5), zależność opisująca charakterystykę częstotliwościową będzie opisana następującym wzorem:

$$H(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(\Omega) + 2 \cdot a \cdot (\cos(3 \cdot \Omega) - \cos(\Omega)) + 2 \cdot b \cdot (\cos(2 \cdot \Omega) - 1) \quad (7)$$

By wyznaczyć wszystkie współczynniki trzeba postawić dodatkowe warunki, z których kilka przedstawiono poniżej.

2.1. Dobór ze względu na szerokość pasma przepustowego

Zakładamy by filtr miał pasmo przepustowe od $\Omega=0$ do $\Omega=\frac{1}{2} \cdot \pi$ czyli $H(\Omega=\frac{1}{2} \cdot \pi)=1$, prowadzi to do równania:

$$1 = \frac{1}{2} + 2b(-1-1) \Rightarrow a = p \quad b = -\frac{1}{8} \quad c = \frac{1}{4} - p \quad d = \frac{3}{4} \quad p - \text{parametr}$$

Jak widać brakuje nam wartości jednego współczynnika, który możemy dobrać arbitralnie. W pracy wyznaczono go na podstawie dodatkowego warunku uwzględniającego założone pasmo przepustowe, czyli postawiono warunek $H(\Omega=\frac{2}{3} \cdot \pi)=1$, skąd otrzymano:

$$a = \frac{1}{24} \quad b = -\frac{1}{8} \quad c = \frac{5}{24} \quad d = \frac{3}{4}$$

Filtr nierekursywny o masce siedmioelementowej (N=7) opisany jest następującym równaniem:

$$y1(n) = \frac{1}{24} \cdot x(n-3) - \frac{1}{8} \cdot x(n-2) + \frac{5}{24} \cdot x(n-1) + \frac{3}{4} \cdot x(n) + \frac{5}{24} \cdot x(n+1) - \frac{1}{8} \cdot x(n+2) + \frac{1}{24} \cdot x(n+3) \quad (8)$$

Dla, którego charakterystyka częstotliwościowa opisana jest następującą zależnością:

$$H1(\Omega) = \frac{1}{12} \cdot \cos(3 \cdot \Omega) - \frac{1}{4} \cdot \cos(2 \cdot \Omega) + \frac{5}{12} \cdot \cos(\Omega) + \frac{3}{4} \quad (9)$$

2.2. Dobór współczynników ze względu na maksymalną płaskość charakterystyki

Żądamy by w paśmie przepustowym charakterystyka była maksymalnie płaska. W tym przypadku należy rozwinąć funkcję (5) w szereg Taylora. Przyrównując wszystkie, oprócz pierwszego, współczynniki rozwinięcia do zera wyznaczmy współczynniki filtru FIR spełniające warunek maksymalnej płaskości w paśmie przepustowym.

$$H(\Omega) \approx (2a + 2c + \frac{1}{2}) + \frac{\Omega^2}{2!} \cdot (-18a - 8b - 2c) + \frac{\Omega^4}{4!} \cdot (162a + 32b + 2c) \quad (10)$$

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2} - 2b \\ 2a + 2c + \frac{1}{2} = 1 \\ -9a - 4b - c = 0 \\ \frac{27}{4}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{12}c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{64} \\ b = -\frac{3}{32} \\ c = \frac{15}{64} \\ d = \frac{11}{16} \end{cases}$$

Filtr ten opisany jest następującym równaniem:

$$y2(n) = \frac{1}{64} \cdot x(n-3) - \frac{3}{32} \cdot x(n-2) + \frac{15}{64} \cdot x(n-1) + \frac{11}{16} \cdot x(n) + \frac{15}{64} \cdot x(n+1) - \frac{3}{32} \cdot x(n+2) + \frac{1}{64} \cdot x(n+3) \quad (11)$$

Ostatecznie charakterystyka częstotliwościowa przyjmie postać:

$$H2(\Omega) = \frac{1}{32} \cdot \cos(3 \cdot \Omega) - \frac{3}{16} \cdot \cos(2 \cdot \Omega) + \frac{15}{32} \cdot \cos(\Omega) + \frac{11}{16} \quad (12)$$

2.3. Dobór współczynników ze względu na minimalną wariancję sygnału wyjściowego

Stawiamy żądanie by wariancja sygnału wyjściowego była minimalna. Uwzględniając warunki postawione w (6) otrzymamy:

$$y(n) = a \cdot x(n-3) + b \cdot x(n-2) + \left(\frac{1}{4} - a\right) \cdot x(n-1) + \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot b\right) \cdot x(n) + \left(\frac{1}{4} - a\right) \cdot x(n+1) + b \cdot x(n+2) + a \cdot x(n+3) \quad (13)$$

Możemy wyznaczyć wariancję sygnału wyjściowego, którą przedstawia zależność:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(a, b) &= \sigma_x^2 \left(2a^2 + 2b^2 + 2\left(\frac{1}{4} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2b\right)^2 \right) = \\ &= \sigma_x^2 \left(\frac{3}{8} - a - 2b + 4a^2 + 6b^2 \right) \end{aligned}$$

która osiąga minimum dla:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2} - 2b \\ c = \frac{1}{4} - a \\ \frac{\partial \sigma_y^2(a,b)}{\partial a} = 8a - 1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y^2(a,b)}{\partial b} = 12b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{6} \\ c = \frac{1}{8} \\ d = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Filtr nierekursywny opisany jest następującym równaniem:

$$y3(n) = \frac{1}{8} \cdot x(n-3) + \frac{1}{6} \cdot x(n-2) + \frac{1}{8} \cdot x(n-1) + \frac{1}{6} \cdot x(n) + \frac{1}{8} \cdot x(n+1) + \frac{1}{6} \cdot x(n+2) + \frac{1}{8} \cdot x(n+3) \quad (14)$$

I charakterystyce częstotliwościowej opisanej wzorem:

$$H3(\Omega) = \frac{1}{4} \cdot \cos(3 \cdot \Omega) + \frac{1}{3} \cdot \cos(2 \cdot \Omega) + \frac{1}{4} \cdot \cos(\Omega) + \frac{1}{6} \quad (15)$$

2.4. Filtr średniej ruchomej

Jeżeli wszystkie współczynniki są sobie równe $a=b=c=d=1/7$, to otrzymamy filtr średniej ruchomej o równaniu:

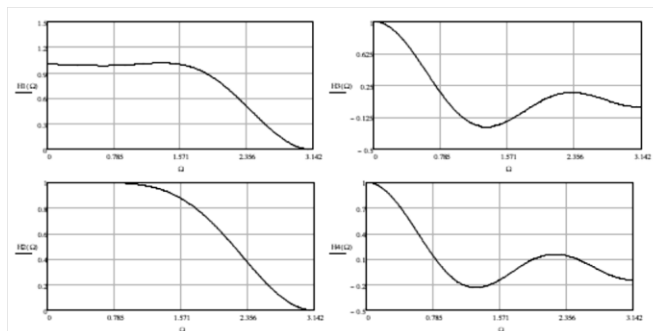
$$y4(n) = \frac{1}{7} \cdot x(n-3) + \frac{1}{7} \cdot x(n-2) + \frac{1}{7} \cdot x(n-1) + \frac{1}{7} \cdot x(n) + \frac{1}{7} \cdot x(n+1) + \frac{1}{7} \cdot x(n+2) + \frac{1}{7} \cdot x(n+3) \quad (16)$$

którego charakterystyka częstotliwościowa przyjmie postać:

$$H4(\Omega) = \frac{2}{7} \cdot \cos(3 \cdot \Omega) + \frac{2}{7} \cdot \cos(2 \cdot \Omega) + \frac{2}{7} \cdot \cos(\Omega) + \frac{1}{7} \quad (17)$$

Przedstawione metody doboru współczynników filtrów FIR nie wyczerpują całości tego zagadnienia. Prezentowane przykłady mają na celu pokazanie jak można kształtować właściwości filtrów w oparciu o zadane kryterium. Właściwości proponowanych filtrów oceniono w następnym punkcie, gdzie zastosowana je do usuwania zakłócenia addytywnego o rozkładzie normalnym.

Charakterystyki amplitudowe proponowanych filtrów przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Charakterystyki amplitudowe proponowanych filtrów FIR

3. WYNIKI TESTÓW

Proponowane filtry opisane równaniami (8, 10, 12, 13), poddano testom, polegającym na wygładzaniu ciągu próbek $\{x_k\}$, zakłóconych szumem $\{n_k\}$, o rozkładzie normalnym (Gaussa), wartości przeciętnej zero $E(n) = 0$ i wariancji $V(n) = \sigma_n^2$, gdzie wartość odchylenia standardowego σ_n zmieniano w zakresie od 0 do 20 co 2.

$$x = s + n$$

Jako sygnałów testowych $\{s_k\}$, użyto funkcji przedstawionych w pracy [5], których formuły przedstawiono poniżej:

– Blocks:

$$f(t) = \sum h_j K(t-t_j) \quad K(t) = 0,5 \cdot (1 + \text{sgn}(t)) \quad (18)$$

$$t_j = \{0.1; 0.13; 0.15; 0.23; 0.25; 0.40; 0.44; 0.65; 0.76; 0.78; 0.81\}$$

$$h_j = \{4; -5; 3; -4; 5; -4.2; 2.1; 4.3; -3.1; 2.1; -4.2\}$$

– Bumps:

$$f(t) = \sum h_j K\left(\frac{t-t_j}{w_j}\right) \quad K(t) = (1+|t|)^{-4} \quad (19)$$

$$t_j = \{0.1; 0.13; 0.15; 0.23; 0.25; 0.40; 0.44; 0.65; 0.76; 0.78; 0.81\}$$

$$h_j = \{4; 5; 3; 4; 5; 4.2; 2.1; 4.3; 3.1; 2.1; 4.2\}$$

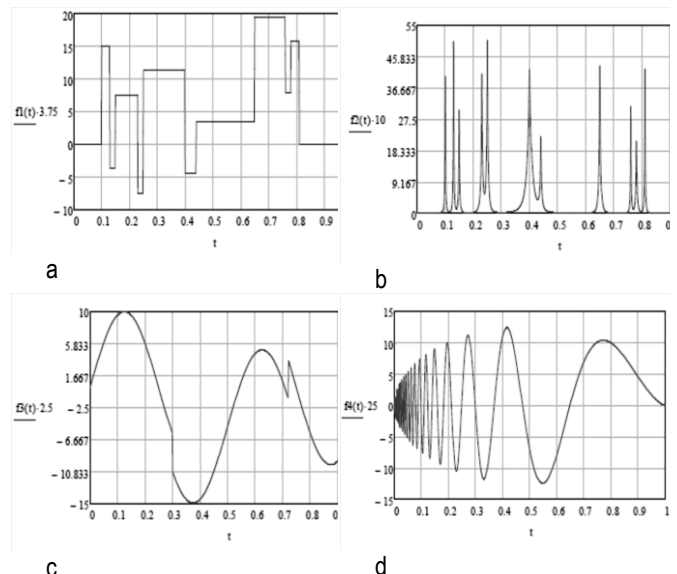
$$w_j = \{0.005; 0.005; 0.006; 0.01; 0.01; 0.03; 0.01; 0.01; 0.005; 0.008; 0.005\}$$

– HeaviSine:

$$f(t) = 4 \sin(4\pi t) - \text{sgn}(t - 0.3) - \text{sgn}(0.72 - t) \quad (20)$$

– Doppler:

$$f(t) = \sqrt{t(1-t)} \sin\left(\frac{2\pi(1+\varepsilon)}{t+\varepsilon}\right) \quad \varepsilon = 0.05 \quad (21)$$



Rys. 3. Przebieg sygnału oryginalnego $\{s_n\}$ a) Blocks, b) Bumps, c) HeaviSine d) Doppler [5]

Do porównania wyników filtracji zakłócenia zastosowano miarę błędów średniokwadratowego:

$$MSE = \frac{1}{K} \cdot \sum_k (s_k - y_k)^2 \quad (22)$$

Tab. 1. Wartości błędów średniokwadratowego MSE dla poszczególnych filtrów dla sygnału Blocks (18)

Lp.	σ_n	MSE			
		y1 (8)	y2 (11)	y3 (14)	y4 (16)
1.	0	0.003	0.005	0.33	0.34
2.	2	2.87	2.48	0.85	1.17
3.	4	10.25	9.92	2.08	2.87
4.	6	25.11	20.88	5.95	5.53
5.	8	45.26	38.01	5.95	7.43
6.	10	62.67	62.18	15.73	9.8
7.	12	100.22	97.62	16.79	34.2
8.	14	128.99	112.89	21.2	37.67
9.	16	181.79	168.42	37.31	45.65
10.	18	228.68	173.62	55.96	50.89
11.	20	295.85	242.63	53.52	55.71

Tab. 2. Wartości błędu średniokwadratowego MSE dla poszczególnych filtrów dla sygnału Bumps (19)

Lp.	σ_n	MSE			
		y1 (8)	y2 (11)	y3 (14)	y4 (16)
1.	0	0.1	0.12	0.59	0.62
2.	2	3.14	2.31	1.1	1.2
3.	4	11.95	9.77	2.27	2.7
4.	6	29.42	21.79	5.66	5.7
5.	8	46.52	37.92	6.9	8.9
6.	10	78.11	64.35	19.03	18.49
7.	12	110.61	88.83	21.13	17.93
8.	14	127.04	123.65	28.51	31.53
9.	16	176.26	152.65	29.82	42.92
10.	18	210.22	194.02	59.4	45.66
11.	20	276.56	245.89	40.72	47.54

Tab. 3. Wartości błędu średniokwadratowego MSE dla poszczególnych filtrów dla sygnału HeaviSine (20)

Lp.	σ_n	MSE			
		y1 (8)	y2 (11)	y3 (14)	y4 (16)
1.	0	0.001	0.002	0.01	0.02
2.	2	2.61	2.48	0.5	0.75
3.	4	11.27	10.01	2.16	2.8
4.	6	26.93	21.99	5.98	6.35
5.	8	46.44	34.3	6.43	10.75
6.	10	67.33	56.03	8.69	14.6
7.	12	104.12	80.15	19.73	28.22
8.	14	140	119.53	25.08	38.65
9.	16	162.62	150.79	58.53	28.61
10.	18	223.79	222.62	44.49	49.04
11.	20	273.34	223.06	48.58	47.14

Tab. 4. Wartości błędu średniokwadratowego MSE dla poszczególnych filtrów dla sygnału Dopler (21)

Lp.	σ_n	MSE			
		y1 (8)	y2 (11)	y3 (14)	y4 (16)
1.	0	0.003	0.005	0.008	0.008
2.	2	2.89	2.23	0.62	0.83
3.	4	12.41	10.01	2.52	2.12
4.	6	22.95	23.99	5.45	5.83
5.	8	43.44	41.69	9.29	14.48
6.	10	67.2	64.79	12.29	11.49
7.	12	100.31	84.28	21.66	17.07
8.	14	123.12	113.83	22.28	33.55
9.	16	161.87	152.03	31.94	42.55
10.	18	239.45	176.17	64.44	53.33
11.	20	259.21	253.58	59.95	58.16

PODSUMOWANIE

Wartości uzyskane w tabelach 1-4 wskazują, że najlepiej usuwa zakłócenie filtr oznaczony jako y3 (14) oraz filtr średniej ruchomej y4 (16). Wyniki te potwierdzają teorię, gdyż ten filtr średniej ruchomej ma największą wartość współczynnika tłumienia dla zakłócenia o rozkładzie normalnym. Również filtr oznaczony y3 (14), który realizuje minimalną wariancję przy warunku: $H(0)=1$ oraz $H(\pi)=0$, odznacza się porównywalnymi a nawet mniejszymi wartościami MSE niż średnia ruchoma.

Wydaje się, że postulat dotyczący minimalnej wartości wariancji wraz z warunkami dotyczącymi parametrów częstotliwościowych, pozwala na optymalne usuwanie zakłócenia addytywnego o rozkładzie normalnym.

BIBLIOGRAFIA

1. Candy J.V., *Signal Processing The Modern Approach*. McGraw-Hill, New York 1988.
2. Lyos R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. WKŁ, W-wa 1999.
3. Zieliński P.T., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*. WKŁ, W-wa 2005.

4. Pęksiński J., Mikołajczak G., Kowalski J., *Kształtowanie charakterystyk częstotliwościowych nierekursywnych filtrów częstotliwościowych*, Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering Nr 84 (2015), s. 71-76.
5. Donoho D.L. Johnstone I.M. *Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 90, No. 432 (Dec., 1995), pp. 1200-1224

SELECTION OF NON-RECURSIVE DIGITAL FILTER COEFFICIENTS BECAUSE OF THE SMOOTHING SIGNALS IN THE PRESENCE OF ADDITIVE NOISE

Abstract

The paper presents the problem of smoothing signals with digital filters with finite impulse response. Proposed variants of filter coefficients a 7-five elements, the values of which were selected based on the desired shape of the amplitude. The work can be used in the classroom with the subject for digital filtering, especially in issues of additive noise removal of normal distribution.

Autorzy:

dr inż. **Janusz Kowalski** – Pomorski Uniwersytet Medyczny, Samodzielna Pracownia Informatyki Medycznej i Badań Jakości Kształcenia, ul. Rybacka 1, 70-204 Szczecin, E-mail: janus@pum.edu.pl

dr inż. **Jakub Pęksiński** - Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny, Katedra Telekomunikacji i Fotoniki, ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin, E-mail: jpeksinski@zut.edu.pl

dr inż. **Grzegorz Mikołajczak** - Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny, Katedra Telekomunikacji i Fotoniki, ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin, E-mail grzegorz.mikolajczak@zut.edu.pl