

Kamil KONTORSKI

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej,
ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra

Wyznaczanie granicznych błędów pomiaru parametrów sygnału sinusoidalnego spowodowanych kwantyzacją

Mgr inż. Kamil KONTORSKI

Tytuł zawodowy mgr inż. elektrotechniki o specjalności cyfrowe systemy pomiarowe uzyskał w 2010 roku na Wydziale Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego. Od 2010 r. jest doktorantem na Uniwersytecie Zielonogórskim. Obszar zainteresowań obejmuje zagadnienia związane z dokładnymi pomiarami wielkości elektrycznych oraz cyfrowym przetwarzaniem sygnałów.



e-mail: k.kontorski@ime.uz.zgora.pl

Streszczenie

Często w celu wyznaczenia amplitudy i fazy pewnej harmonicznej sygnału próbkowanego przetwornikiem A/C korzysta się z DFT. Dokładność pomiaru wyznacza się numerycznie stosując metodę Monte-Carlo przy założeniu, że próbki nie są skorelowane między sobą. Założenie to jest błędne, gdy próbkuje się sygnał sinusoidalny. W artykule zostanie wyznaczony zbiór sygnałów sinusoidalnych, na podstawie którego można wyznaczyć amplitudę i fazę sygnału mono-harmonicznego próbkowanego. Przeprowadzono badania dokładności transformaty DFT.

Słowa kluczowe: próbkowanie, przetwornik A/C, sygnał okresowy, amplituda i przesunięcie kąta fazowego, analiza matematyczna, DFT.

Determination of maximal errors of sinusoidal signal parameters caused by quantization

Abstract

Signals probed with finite resolution ADC's are affected by quantization errors. If we assume that value of each probe is uncorrelated with the value of each other probe then we may assess the accuracy of the first harmonic determined by DFT using Monte-Carlo method [1]. But if we probe a sinusoidal signal it is an incorrect assumption. In the paper we analyze the set of the sinusoidal signals that are inevitably connected with acquired single harmonic signal probes. In the Figure 1 we can see that the set of probes may be generated by a few different signals. We prove that set of signals that give the same set of the probes represents a non-fragmented surface on the amplitude and phase angle plane (Fig. 2). Secondly we determine the set of signals for the specified set of probes D acquired by the simulated ADC. We construct function F represented by equation (9) which consists of the function which block diagram is presented in the Fig. 3. This function F is discrete so statistical methods must be used to determine the set of signals (A, φ) which give the maximal value [2]. Final shape of the set is given on the Fig. 5. Some experiment was conducted to check the accuracy of the DFT algorithm. The Figure 6 represent values of amplitudes acquired by DFT (triangles), amplitudes from the computed sets (dots) against number of acquired probes of the 1 V sinusoidal signal. The error bars corresponds to the extreme amplitudes (Fig. 6) in the set. The results differ, because DFT computes parameters of the first harmonic of the probes which only approximately represents the input signal. This method with modifications may be applied to the multi-harmonic signals.

Keywords: signal sampling, ADC, periodic signal, amplitude and phase angle, mathematical analysis, DFT.

1. Wstęp

Amplituda i faza harmonicznej podstawowej sygnału próbkowanego za pomocą przetwornika A/C można uzyskać korzystając z transformaty DFT. W tym celu próbki sygnału poddaje się transformacji, która daje w wyniku wartość zespoloną odpowiadającą parametrom (amplitudzie i fazie) składowej podstawowej.

Żeby wyznaczyć dokładność pomiaru parametrów składowej podstawowej przy pomocy techniki komputerowej symuluje się

wszystkie możliwe sygnały, które odpowiadają pobranym próbkom. Następnie dla próbek tych sygnałów nie obciążonych błędem kwantyzacji przetwornika A/C wyznacza się parametry ich składowych podstawowych stosując transformatę DFT. Rozrzut wartości amplitudy i fazy wyznaczonych na podstawie symulowanych sygnałów jest miarą dokładności przetwarzania.

Przeprowadzenie tego typu eksperymentu nie jest trudne, ponieważ łatwo jest wygenerować zbiór sygnałów wejściowych. Wystarczy założyć, że dokładne wartości sygnału w chwilach próbkowania nie są między sobą zależne. Oznacza to przykładowo, że jeżeli znamy dokładną wartość sygnału w chwili próbkowania t_0 to nie jesteśmy w stanie stwierdzić jaka będzie wartość tego sygnału w chwili $t_0+n \cdot T_p$, gdzie T_p jest okresem próbkowania, a n pewną liczbą naturalną. Dokładność pomiaru wyznaczona w taki sposób została przedstawiona w pracy [1].

Gdy próbkowany jest sygnał sinusoidalny lub okresowy nie można założyć, że nie ma żadnej zależności między wartościami sygnału w różnych chwilach próbkowania. Przykładowo wartość sygnału okresowego o okresie T pobrana w chwili t_0 i w chwili t_0+T ma taką samą wartość. W przypadku, gdy próbkujemy sygnał sinusoidalny to znajomość wartości dwóch próbek wystarczy do określenia wartości próbek pozostałych.

Aby sprawdzić dokładność algorytmu DFT w przypadku, kiedy próbkowany jest sygnał sinusoidalny nie można zastosować metody opisanej w [1]. W artykule autor postara się rozwiązać ten problem i wyznaczyć sygnały wejściowe odpowiadające pewnym próbkom sygnału sinusoidalnego oraz wyznaczyć dokładność algorytmu DFT dla takiego sygnału. Omówione zostanie krótko postępowanie, w przypadku, kiedy próbkuje się sygnały okresowe wielo-harmoniczne.

2. Analiza zbioru sygnałów sinusoidalnych

Założmy, że na wejście idealnego przetwornika A/C bipolarnego o rozdzielczości k -bitów i zakresie U_{zakr} został podany sygnał jedno-harmoniczny o nieznannej amplitudzie i fazie o okresie T . Zebrano synchronicznie N próbek pr_i , gdzie $i \in \{0, \dots, N-1\}$. Zbiór tych próbek oznaczony jest jako $D = \{pr_i\}$. Długość przedziału kwantyzacji przetwornika jest równa:

$$\Delta = \frac{U_{zakr}}{2^{k-1}}. \quad (1)$$

Przedział kwantyzacji K_i dla próbki o numerze i określony jest następująco:

$$K_i = (pr_i - \frac{1}{2}\Delta, pr_i + \frac{1}{2}\Delta). \quad (2)$$

Przykładowe próbki i odpowiadające im przedziały kwantyzacji dla przetwornika A/C o wybranych parametrach przedstawiono na rys. 1.

Wartości A i φ spełniające wyrażenia (3) opisują sygnał jedno-harmoniczny dający na wyjściu przetwornika A/C próbki D .

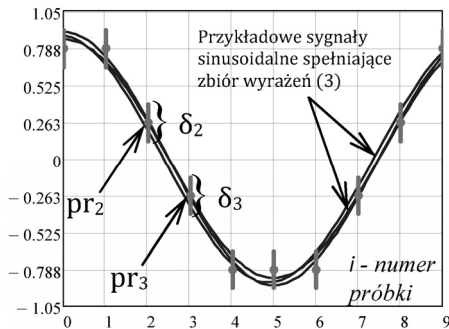
$$A \cos\left(\frac{2\pi}{N} i + \varphi\right) \in K_i, \quad (3)$$

gdzie:

A - amplituda sygnału poszukiwanego,
 φ - faza sygnału poszukiwanego,
 $i \in \{0, \dots, N-1\}$.

Sygnal taki w chwilach próbkowania i przyjmuje wartości z przedziału K_i . Kilka takich przykładowych sygnałów przedstawiono na rys. 1. Zbiór wyrażeń (3) ($i \in \{0, \dots, N-1\}$) jest równoważny zbiorowi nierówności (4):

$$pr_i - \frac{1}{2}\Delta < A \cos\left(\frac{2\pi}{N}i + \varphi\right) \leq pr_i + \frac{1}{2}\Delta \quad (4)$$

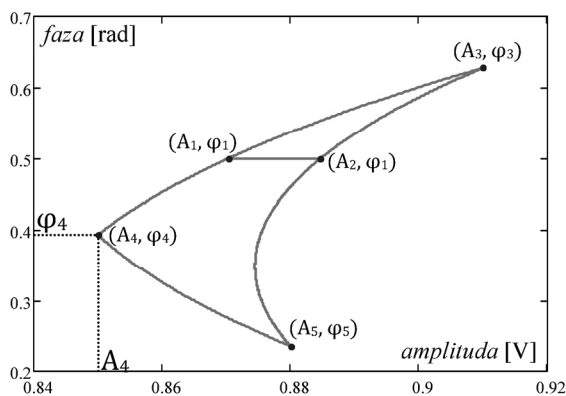


Rys. 1. Przykładowe próbki, przedziały kwantyzacji oraz sygnały spełniające zbiór wyrażeń (3) dla przetwornika 3-bitowego o zakresie $\pm 1,05V$ i zebranych 10 próbkach
 Fig. 1. Exemplar probes pr , quantization ranges δ and signals that fulfill the set of expressions (3) for the 3-bit, $\pm 1,05V$ A/C converter

Jeżeli dwa sygnały o amplitudzie A_1 i A_2 o takiej samej fazie φ_1 spełniają nierówności (4) to oczywistym jest, że każdy sygnał o amplitudzie między A_1 i A_2 oraz fazie φ_1 będzie także spełniał nierówności (4), ponieważ będzie należał do tych samych przedziałów kwantyzacji. Zbiór tych sygnałów można opisać na płaszczyźnie amplitudowo-fazowej linią prostą równoległą do osi amplitud i łączącą punkty (A_1, φ_1) , (A_2, φ_1) (rys. 2).

Jeżeli sygnał o fazie φ_3 i amplitudzie A_3 oraz sygnał o fazie φ_4 i amplitudzie A_4 spełniają nierówności (4) to można wskazać zbiór sygnałów spełniający nierówności (4), który łączy na płaszczyźnie amplitudowo-fazowej punkty odpowiadające tym dwóm danym sygnałom. Aby wyznaczyć ten zbiór sygnałów należy wyznaczyć chwilę t_{prz} przecięcia się dwóch danych sygnałów (A_3, φ_3) i (A_4, φ_4) . Tę sytuację opisuje równanie (5).

$$A_3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t_{prz} + \varphi_3\right) = A_4 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t_{prz} + \varphi_4\right) \quad (5)$$



Rys. 2. Zbiór punktów odpowiadających sygnałom spełniającym nierówności (4)
 Fig. 2. The set of points corresponding to signals that fulfill the inequalities (4)

Wartość t_{prz} opisana jest wyrażeniem (6):

$$t_{prz} = \frac{T}{2\pi} \arctg\left(\frac{A_3 \cos \varphi_3 - A_4 \cos \varphi_4}{A_3 \sin \varphi_3 - A_4 \sin \varphi_4}\right), \quad (6)$$

gdzie T to okres sygnałów analizowanych.

Znając czas t_{prz} można ułożyć równanie uzależniające amplitudę i fazę poszukiwanych sygnałów. Równanie to opisane jest zależnością (7), w której A reprezentuje amplitudę poszukiwanego sygnału natomiast φ reprezentuje jego fazę.

$$A = \frac{A_3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t_{prz} + \varphi_3\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{T}t_{prz} + \varphi\right)} \quad (7)$$

Wiadomo, że faza φ zmienia się od φ_3 do φ_4 , ponieważ dla innych wartości sygnał nie przechodzi pomiędzy sygnałami danymi o parametrach (A_3, φ_3) i (A_4, φ_4) . Przykładowy wykres uzyskany na podstawie zależności (7) przedstawiony jest na rys. 2.

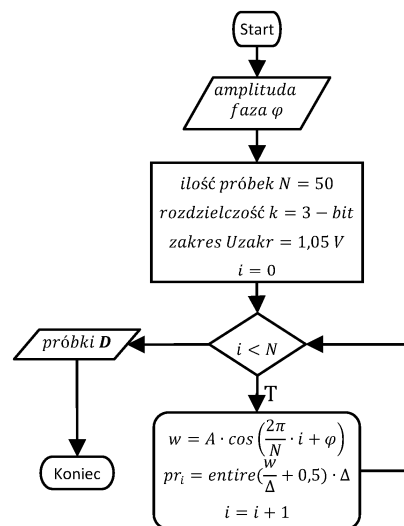
Mając trzy sygnały spełniające nierówności (4) także można je między sobą wzajemnie połączyć, co przedstawiono na rys. 2, korzystając z zależności (7) i dodatkowego sygnału (A_5, φ_5) .

Stąd, ponieważ każde dwa sygnały spełniające nierówności (4) odpowiadają punktom, które można ze sobą łączyć, oraz ponieważ sygnały o tej samej fazie spełniające nierówności (4) odpowiadają linii równoległej do osi amplitud, otrzymuje się wniosek, że zbiór wszystkich sygnałów spełniających nierówności (4) jest obszarem (płaszczyzną) jednorodnym.

3. Numeryczne wyznaczanie zbioru sygnałów

Analitycznie można wyznaczyć pewne właściwości zbioru sygnałów sinusoidalnych dających te same próbki, jednak trudno jest wyznaczyć cały zbiór takich sygnałów. Dlatego też trzeba zastosować podejście numeryczne [2], które opisane jest poniżej.

Funkcja **Kwantuj**: $R \times R \rightarrow D$ przyjmuje jako parametry wejściowe amplitudę A i fazę φ reprezentowane przez liczby rzeczywiste i zwraca zbiór próbek D . Jest ona analogiczna do zasady działania przetwornika A/C. Schemat blokowy funkcji przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Schemat blokowy funkcji **Kwantuj**
 Fig. 3. Block diagram of the function **Kwantuj**

Istnieje pewien zbiór próbek D_3 o liczebności $N=50$ uzyskanych przy pomocy przetwornika 3-bitowego, o zakresie 1,05 V. Zbiór ten został uzyskany symulacyjnie dla sygnału o amplitudzie równej 0,9 V i fazie $\pi/4$ rad. Aby sygnał o parametrach (A, φ) dawał zbiór próbek D_3 to musi być spełniona równość (8):

$$\mathbf{Kwantuj}(A, \varphi) = D_3 \quad (8)$$

Szukanie takich sygnałów o amplitudzie A i fazie φ sprowadza się do maksymalizacji funkcji $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ określonej wyrażeniem (9), gdzie Z to zbiór liczb całkowitych nieujemnych.

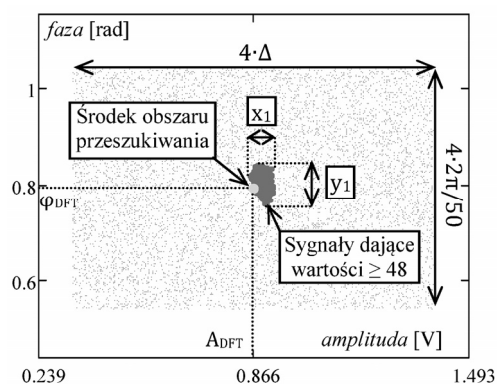
$$F(A, \varphi) = \left| \text{Kwantuj}(A, \varphi) \cap \mathbf{D}_3 \right| \quad (9)$$

Funkcja F zwraca liczbę elementów wspólnych zbioru \mathbf{D}_3 i zbioru próbek \mathbf{D} generowanego przez sygnał o amplitudzie A i fazie φ .

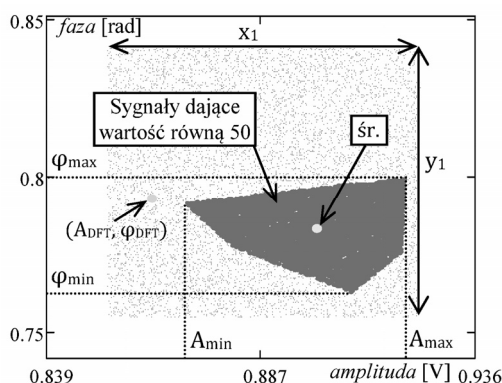
Maksimum takiej funkcji znajduje się metodami numerycznymi, gdyż metody analizy matematycznej są skomplikowane.

Aby znaleźć maksimum funkcji dyskretnej F należy najpierw wyznaczyć obszar, w którym ono się znajduje. Przyjęte jest, że środkiem tego obszaru będzie punkt o amplitudzie A_{DFT} i fazie φ_{DFT} otrzymany za pomocą DFT dla zbioru próbek \mathbf{D}_3 . Długość i szerokość tego obszaru to odpowiednio 4Δ i $4 \cdot 2\pi/50$. Długość przedziału kwantyzacji Δ wyznacza się ze wzoru (1).

Na rys. 4 zaznaczono wybrane losowo sygnały i wśród nich te, dla których funkcja F zwraca wartość co najmniej 48. Znajdują się one w ramce o długości x_1 i szerokości y_1 . W następnym kroku postępowania losowanie odbywa się w zawężonej ramce o wymiarach x_1, y_1 . Na rys. 5 przedstawione są wylosowane sygnały, wśród których oznaczono zbiór dający maksymalną wartość równą 50 w odwzorowaniu F .



Rys. 4. Pierwsze losowanie
Fig. 4. The first random searching



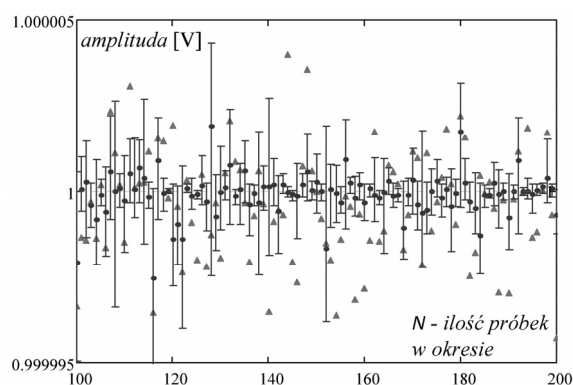
Rys. 5. Drugie losowanie i końcowa postać zbioru
Fig. 5. The second random searching and the final shape of the set of the signals that give the \mathbf{D}_3 probes

Punkt będący średnią wszystkich punktów (rys. 5) wyznaczonego zbioru będzie reprezentować wynik pomiaru parametrów sygnału sinusoidalnego. Wartość maksymalna i minimalna amplitudy A_{min} i A_{max} reprezentują maksymalne błędy pomiaru amplitu-

dy, a wartość maksymalna i minimalna fazy φ_{min} i φ_{max} reprezentują maksymalne błędy pomiaru fazy.

4. Badanie dokładności transformaty DFT

W doświadczeniu symulacyjnym wykorzystano przetwornik 16 bitowy, o zakresie $\pm 1,05$ V. Na jego wejście podano sygnał o amplitudzie 1 V i fazie $\pi/4$ rad. Doświadczenie polegało na zebraniu N próbek (oś OX na rys. 6) i na wyznaczeniu wartości maksymalnej i minimalnej amplitudy zbioru sygnałów odpowiadających takiemu zbiorowi próbek. Wyznaczano także wartość amplitudy za pomocą transformaty DFT. Trójkąty na wykresach reprezentują moduł wartości zwróconej przez DFT, natomiast w postaci przedziałów przedstawiono wartości minimalne i maksymalne amplitudy zbioru sygnałów sinusoidalnych. Kropkami oznaczono wartości średnie zbiorów.



Rys. 6. Wartości amplitudy otrzymane za pomocą omawianej metody i transformaty DFT
Fig. 6. Values of the amplitudes computed by the described method and by the DFT

5. Wnioski i uwagi

Na podstawie wyników badań, których przykład jest przedstawiony na rys. 6, stwierdza się, że transformata DFT daje wartości różniące się od amplitudy i fazy sygnału sinusoidalnego podanego na wejście przetwornika A/C. Co więcej parametry sygnału zwracane przez DFT nie należą często do zbioru sygnałów sinusoidalnych dających próbki zebrane. Stosowanie DFT daje składową odpowiadającą przebiegowi złożonemu z próbek, który tylko w przybliżeniu jest reprezentacją przebiegu wejściowego.

Sposób znajdowania zbioru sygnałów odpowiadających danym próbkom można zastosować do poszukiwania sygnałów okresowych wielo-harmonicznych. Wartość w w funkcji **Kwantuj** jest wtedy sumą wszystkich uwzględnianych harmonicznich. Poszukiwanie wartości maksymalnej funkcji F odbywa się w zbiorze $2n$ wymiarowym, gdzie n to liczba harmonicznich branych pod uwagę.

6. Literatura

- [1] Betta G., Liguoria C., Pietrosanto A.: Propagation of uncertainty in a discrete Fourier transform algorithm, Measurement, Elsevier, 2000.
- [2] Dryja M., Jankowska J., Jankowski M.: Przegląd metod i algorytmów numerycznych, T. II, PWN, 1982.

otrzymano / received: 15.07.2014

przyjęto do druku / accepted: 01.10.2014

artykuł recenzowany / revised paper