

Kordian DUDZIK¹, Marian KAMPIK²¹FIRMA KONSTRUKCYJNO-PROJEKTOWA KDE, ul. L. Staffa 14, 44-335 Jastrzębie-Zdrój²POLITECHNIKA ŚLĄSKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY, INSTYTUT METROLOGII, ELEKTRONIKI I AUTOMATYKI, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice

Analiza wybranych właściwości sygnału wytwarzanego przez cyfrowe źródło wzorcowego napięcia przemiennego z interpolatorem pierwszego rzędu

Mgr inż. Kordian DUDZIK



Ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej, o specjalności Automatyki i Metrologii Elektrycznej. Obronił pracę magisterską w 2007 r. W latach 2009-2012 był słuchaczem studiów doktoranckich, specjalność Współczesne Problemy Elektrotechniki. Jego zainteresowania naukowe to przetwarzanie sygnałów z wykorzystaniem procesorów sygnałowych i układów programowalnych oraz technika mikroprocesorowa.

e-mail: kdel@poczta.onet.pl

Dr hab. inż. Marian KAMPIK



Profesor nadzwyczajny w Instytucie Metrologii Elektroniki i Automatyki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej, Autor lub współautor ponad 100 publikacji naukowo-technicznych, w tym trzech monografii. Jego zainteresowania naukowe obejmują dokładne pomiary wielkości elektrycznych, sensorykę oraz zagadnienia związane z cyfrową syntezą sygnałów pomiarowych.

e-mail: marian.kampik@polsl.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę właściwości sygnału generowanego przez cyfrowe źródło sinusoidalnego wzorcowego napięcia przemiennego wyposażone w interpolator pierwszego rzędu. Interpolator pierwszego rzędu pozwala na uzyskanie sygnału aproksymowanego odcinkowo w miejsce sygnału aproksymowanego sygnałem schodkowym. Głównym celem analizy było uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy zastosowanie interpolatora pierwszego rzędu rzeczywiście umożliwia zmniejszenie zawartości harmonicznych w widmie wytwarzanego przez źródło sygnału. Zapropionowano również przykładowe rozwiązania układowe analogowych i cyfrowych interpolatorów pierwszego rzędu.

Słowa kluczowe: wzorce napięcia przemiennego, źródła sygnałów pomiarowych, cyfrowa synteza sygnału, interpolacja.

Analysis of selected properties of the signal generated by a digital source of the standard AC voltage with a first-order interpolator

Abstract

The paper presents analysis of the signal generated by a digital source of the standard sinusoidal voltage. In the source the digital-to-analog converter (DAC) used for reconstruction of the sinusoidal waveform is followed with a first-order interpolator. The interpolator approximates a staircase waveform at the DAC output with piecewise approximation of the signal. It is shown in the paper that use of the first-order interpolator improves the spectral purity of the generated sine wave significantly and is especially beneficial for low number of samples per period of the generated sinusoidal waveform. The disadvantage of the source with the first-order interpolator is the need to use two digital-to-analog converters. Nonlinearities of both DACs may generate harmonics located close to the fundamental and difficult to be filtered out. Despite this drawback, the authors speculate that use of modern electronic components in the interpolator will increase the stability and accuracy of the signal produced by the source. The paper presents a few ideas of the circuits of analog and digital first-order interpolators. The presented analysis does not include the effect of finite resolution of digital-to-analog converters, their nonlinearity, the impact of analog circuits, and other phenomena.

Keywords: AC voltage standards, sources of measurement signals, digital signal synthesis, interpolation.

1. Wstęp

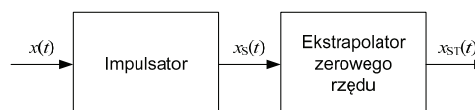
Cyfrowe źródło wzorcowego napięcia przemiennego wytwarza napięcie sinusoidalne o bardzo stabilnej wartości skutecznej w paśmie częstotliwości od około 10 mHz do kilku kHz. Wartość skuteczna napięcia wytwarzanego przez takie źródło może być następnie zdefiniowana za pomocą metody niekwantowej [1] lub przy wykorzystaniu wzorca kwantowego [2].

Jednym z podstawowym problemów związanych z syntezą cyfrowego sygnału sinusoidalnego o wzorcowej wartości skutecznej jest osiągnięcie odpowiednio dużej czystości widmowej

generowanego przebiegu. Problem ten występuje szczególnie w przypadku przebiegu odtwarzanego z małej liczby próbek (schodków) w okresie generowanego sygnału. W celu zmniejszenia zawartości harmonicznych i szumów możliwe jest zastosowanie filtra dolnoprzepustowego na wyjściu przetwornika cyfrowo-analogowego. Niestety filtr wpływa na wartość skuteczną napięcia wyjściowego. Innym znanym rozwiązaniem jest wykorzystanie interpolatora pierwszego rzędu. Podejmowano już kilka prób zbudowania źródła z interpolatorem pierwszego rzędu, lecz osiągnięte rezultaty nie były zadowalające [3, 4]. Ponadto w [5] wykazano, że zastosowanie interpolatora pierwszego rzędu w cyfrowych źródłach napięcia sinusoidalnego nie jest celowe. Celem niniejszej pracy jest zbadanie właściwości sygnału wytwarzanego przez cyfrowe źródło napięcia przemiennego wyposażone w interpolator pierwszego rzędu i wykazanie iż teza postawiona w [5] może nie być prawdziwa.

2. Właściwości przebiegu sinusoidalnego aproksymowanego przebiegiem schodkowym

Proces odtwarzania sygnału sinusoidalnego aproksymowanego przebiegiem schodkowym, nazywanego dalej przebiegiem schodkowym można przedstawić za pomocą modelu matematycznego [1, 6] przedstawionego na rys. 1.



Rys. 1. Matematyczny model generacji przebiegu schodkowego
Fig. 1. The mathematical model of generation of a staircase waveform

Impulsator taktowany ze stałą częstotliwością odtwarzania $f_s = 1/T_s$ tworzy z sygnału sinusoidalnego postaci

$$x(t) = X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right), \quad (1)$$

ciąg impulsów Diraca

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s), \quad (2)$$

gdzie $N = T_0/T_s$ jest liczbą próbek na okres $T_0 = 1/f_0$ [1, 5, 6].

Ekstrapolator utrzymuje na swoim wyjściu wartość $x_s(t)$ przez czas T_s . W rezultacie na wyjściu ekstrapolatora występuje przebieg schodkowy przedstawiony na rys. 2. Reprezentację czasową przebiegu schodkowego $x_{ST}(t)$ zamieszczono m.in. w [1, 6].

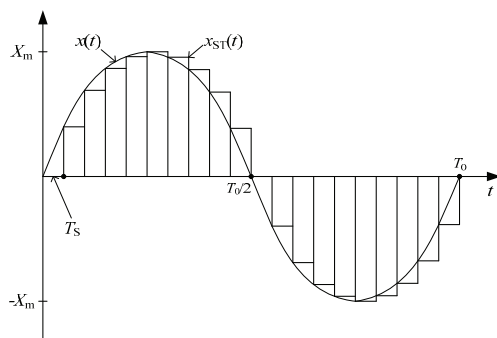
Na podstawie reprezentacji czasowej przebiegu schodkowego $x_{ST}(t)$ można obliczyć widmo przebiegu schodkowego o postaci

$$X_{ST}(mf_s - f_0) = X_m \operatorname{sinc} \left(\pi \left(m \pm \frac{f_0}{f_s} \right) \right). \quad (3)$$

Widmo składa się z składowej podstawowej, reprezentującej częstotliwość f_0 generowanego sygnału sinusoidalnego, jak również z jej harmonicznych o częstotliwościach f_m^- oraz f_m^+ równych:

$$f_m^- = mf_s - f_0 \quad \text{oraz} \quad f_m^+ = mf_s + f_0, \quad (4)$$

gdzie $m=1; 2; 3 \dots$

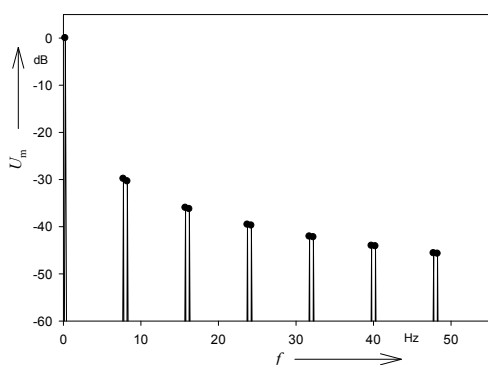


Rys. 2. Przebieg czasowy idealnej sinusoidy i aproksymującego ją przebiegu schodkowego

Fig. 2. The ideal sinusoidal waveform and its staircase approximation

Wartość skuteczna składowych harmonicznych uzależniona jest od liczby próbek na okres N i od częstotliwości odtwarzania próbek f_s . Do odtwarzania cyfrowego sygnału sinusoidalnego najczęściej wykorzystuje się metodę ze stałym czasem odtwarzania próbek (tzw. tryb CST, ang. *Constant Sampling Time*). Czas odtwarzania $T_s = 1/f_s$ jest zdeterminowany właściwościami zastosowanego przetwornika cyfrowo-analogowego.

Zawartość harmonicznych w sygnale generowanym przez źródło zwiększa się wraz ze zmniejszaniem liczby próbek w okresie. Na rys. 3 przedstawiono widmo częstotliwościowe przebiegu schodkowego dla $N = 32$ i $f_s = 8$ Hz.



Rys. 3. Widmo częstotliwościowe przebiegu schodkowego

Fig. 3. Frequency spectrum of the staircase waveform

Podstawowym parametrem charakteryzującym czystość widmową sygnału jest całkowity współczynnik zniekształceń harmonicznych *THD* (ang. *Total Harmonic Distortion*) zdefiniowany wzorem:

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U^2(kf_0)}}{U(f_0)}, \quad (5)$$

gdzie $U(f_0)$ jest wartością skuteczną składowej podstawowej generowanego przebiegu a $U(kf_0)$ są wartościami skutecznymi wyższych harmonicznych.

Drugim pożytecznym współczynnikiem używanym do określania jakości generowanego sygnału jest dynamiczny zakres wolny od zniekształceń *SFDR* (ang. *Spurious Free Dynamic Range*):

$$SFDR = 20 \cdot \log \frac{\max(U(kf_0))}{U(f_0)}, \quad (6)$$

gdzie $\max(U(kf_0))$ jest wartością skuteczną dominującej harmonicznej.

Podstawowym sposobem uzyskania małej wartości *THD* i dużego *SFDR* jest generowanie przebiegu o możliwie dużej liczbie próbek w okresie. W tabeli 1 pokazano wpływ zmiany liczby próbek w okresie na wartości parametrów *THD* i *SFDR* [1].

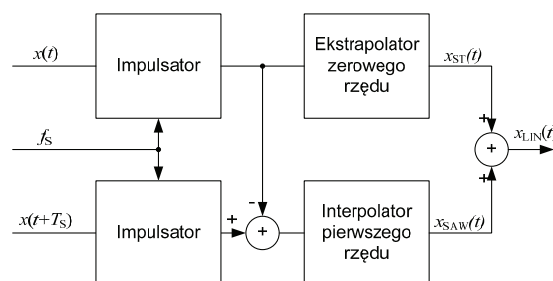
Tab. 1. Wpływ zmiany liczby próbek na okres na współczynniki *THD* i *SFDR* dla przebiegu schodkowego

Tab. 1. The impact of changes in the number of samples on *THD* and *SFDR* for the piecewise staircase waveform

Liczba próbek na okres N	Współczynnik <i>THD</i> (%)	Współczynnik <i>SFDR</i> (dB)
4	48,3	9,5
8	23,0	16,9
16	11,4	23,5
32	5,67	29,8
64	2,83	36,0
128	1,42	42,1
256	0,709	48,1
1024	0,177	60,2
4096	0,0443	72,2
16384	0,0111	84,3

3. Właściwości przebiegu sinusoidalnego z użyciem interpolatora pierwszego rzędu

Na rys. 4 przedstawiono schemat blokowy przy pomocy którego opracowano model matematyczny przebiegu sinusoidalnego generowanego przez źródło wyposażone w interpolator pierwszego rzędu.



Rys. 4. Model matematyczny generacji sinusoidalnego przebiegu interpolowanego

Fig. 4. The mathematical model of generation of the interpolated sinusoidal waveform

W układzie przedstawionym na rys.4 występują dwa sygnały sinusoidalne:

$$x(t) = X_m \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right), \quad (7)$$

oraz

$$x(t + T_s) = X_m \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t + T_s \right). \quad (8)$$

Łatwo zauważyć, że sygnał (8) jest przesunięty względem pierwszego (7) o czas T_s , czyli czas trwania jednej próbki.

Obydwa sygnały przechodzą przez impulsator, który tworzy z sygnału sinusoidalnego ciąg impulsów Diraca. Sygnał nie przesunięty (7) zostaje przetworzony na przebieg schodkowy za pomocą ekstrapolatora zerowego rzędu. Jednocześnie tworzona jest różnica amplitudy impulsu sinusoidy przesuniętej (8) i amplitudy impulsu sinusoidy nieprzesuniętej (7). Różnica ta podawana jest na wejście interpolatora pierwszego rzędu. Na jego wyjściu powstaje przebieg piłokształtny $x_{SAW}(t)$, modulowany różnicą amplitud obydwu sinusoid. Matematyczny opis reprezentacji czasowej sygnału $x_{LIN}(t)$ oraz przebiegu piłokształtnego $x_{SAW}(t)$ wykracza poza ramy niniejszej pracy. Przedstawione zostaną jedynie widma tych sygnałów, które posłużyły do obliczenia przebiegów czasowych sygnałów $x_{LIN}(t)$ oraz $x_{SAW}(t)$.

Widmo przebiegu piłokształtnego jest dane wzorem:

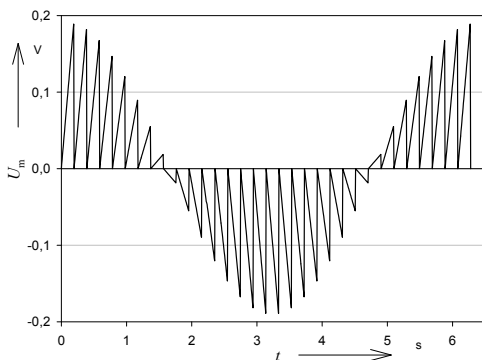
$$X_{SAW}(j\omega) = [X(j\omega) \otimes S(j\omega)](e^{-j\omega T_s} - 1)R(j\omega), \quad (9)$$

a widmo przebiegu interpolowanego:

$$X_{LIN}(j\omega) = [X(j\omega) \otimes S(j\omega)][P(j\omega) + (e^{-j\omega T_s} - 1)R(j\omega)], \quad (10)$$

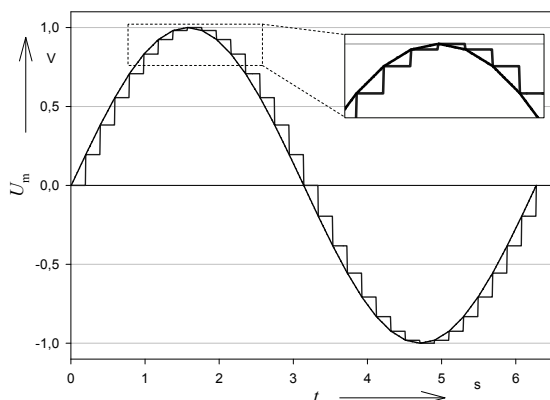
gdzie: $X(j\omega)$ – widmo przebiegu sinusoidalnego, $S(j\omega)$ – widmo szeregu impulsów Diraca, $P(j\omega)$ – widmo przebiegu prostokątnego (dla operacji ekstrapolacji), $R(j\omega)$ – widmo przebiegu piłokształtnego (dla operacji interpolacji), a symbol \otimes oznacza operację splotu.

Na rys. 5 przedstawiono piłokształtny przebieg czasowy na wyjściu interpolatora pierwszego rzędu.



Rys. 5. Przebieg piłokształtny na wyjściu interpolatora
Fig. 5. The saw waveform at the first order interpolator output

Na rys. 6 przedstawiono przebieg sinusoidalny interpolowany odcinkowo dla $N = 32$ i $f_s = 8$ Hz oraz przebieg schodkowy.

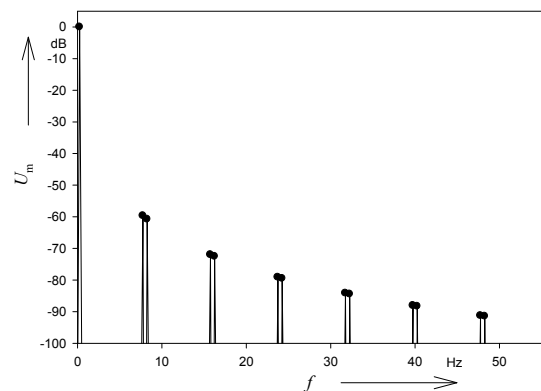


Rys. 6. Przebieg sinusoidalny interpolowany odcinkowo i schodkowo
Fig. 6. A sine wave interpolated with the piecewise- and staircase waveform

W oparciu o reprezentację czasową przebiegu interpolowanego można wyznaczyć wzór na składowe harmoniczne widma (11).

$$X_{LIN}(mf_s \pm f_0) = X_m \frac{1}{2} \left(\frac{f_s}{\pi(mf_s \pm f_0)} \right)^2 \left[1 - \cos \left(2\pi \left(m \pm \frac{f_0}{f_s} \right) \right) \right], \quad (11)$$

Składowa o $m=0$ reprezentuje amplitudę składowej podstawowej generowanego przebiegu. Amplitudy pozostałych składowych harmonicznych, występujących w widmie przebiegu sinusoidalnego interpolowanego odcinkowo, są znacznie mniejsze od amplitud składowych widma sinusoidy aproksymowanej przebiegiem schodkowym (por. rys. 7).



Rys. 7. Widmo częstotliwościowe przebiegu interpolowanego
Fig. 7. Frequency spectrum of the interpolated waveform

Wartości parametrów *THD* i *SFDR* przebiegu o widmie przedstawionym na rys.7 zamieszczono w tabeli 2. Porównując zawartości tabel 1 i 2 można zauważyć, iż użycie interpolatora pierwszego rzędu w torze syntezy poprawia dwukrotnie współczynnik *SFDR* oraz znacząco zmniejsza wartość współczynnika *THD*.

Tab. 2. Wpływ zmiany liczby próbek na okres na współczynniki *THD* i *SFDR* dla przebiegu interpolowanego

Tab. 2. The impact of changes in the number of samples on *THD* and *SFDR* for the piecewise interpolated waveform

Liczba próbek na okres N	Współczynnik <i>THD</i> (%)	Współczynnik <i>SFDR</i> (dB)
4	12,1	19,1
8	2,47	33,8
16	0,585	47,0
32	0,144	59,6
64	0,0359	72,0
128	$8,98 \times 10^{-3}$	84,1
256	$2,24 \times 10^{-3}$	96,3
1024	$0,140 \times 10^{-3}$	120
4096	$8,77 \times 10^{-6}$	144
16384	$0,548 \times 10^{-6}$	169

4. Wartość skuteczna przebiegu sinusoidalnego generowanego przez źródło z interpolatorem pierwszego rzędu

Jak wykazano, zastosowanie interpolacji pierwszego rzędu pozwala na znaczną poprawę czystości widmowej generowanego przebiegu sinusoidalnego. Pozostaje przeprowadzenie analizy wpływu interpolacji pierwszego rzędu na wartość skuteczną napięcia składowej podstawowej U_1 generowanego przebiegu. Wyniki obliczeń dla różnej liczby próbek w okresie generowanego przebiegu zestawiono w tabeli 3.

Tab. 3. Zależność wartości skutecznej napięcia składowej podstawowej od liczby próbek w okresie
 Tab. 3. The relation between the RMS voltage of the fundamental and the number of samples per period

N	Wartość skuteczna napięcia składowej podstawowej U_{1ST} (V)	Względna zmiana napięcia po odfiltrowaniu harmonicznym (V/V)	Wartość skuteczna napięcia składowej podstawowej U_{1LIN} (V)	Względna zmiana napięcia po odfiltrowaniu harmonicznym (V/V)
4	0.636 619 772	9.4518E-02	0.573 159 168	4.8219E-03
8	0.689 072 276	2.5122E-02	0.671 497 735	2.7526E-04
16	0.702 572 000	6.3776E-03	0.698 066 301	1.6694E-05
32	0.705 971 446	1.600E-03	0.704 837 933	1.035E-06
64	0.706 822 845	4.005E-04	0.706 539 022	6.456E-08
128	0.707 035 791	1.001E-04	0.706 964 807	4.033E-09
256	0.707 089 033	2.504E-05	0.707 071 286	2.520E-10
1024	0.707 105 672	1.565E-06	0.707 104 563	9.844E-13
4096	0.707 106 712	9.781E-08	0.707 106 643	3.845E-15

Z tabeli 3 wynika, iż wartość skuteczna napięcia przebiegu aproksymowanego odcinkowo jest mniejsza od wartości napięcia przebiegu schodkowego. Jest to wynikiem tłumienia harmonicznym, towarzyszącym aproksymacji odcinkowej. Największą moc sygnału przenosi składowa podstawowa generowanego przebiegu. Podobnie jest i w przypadku przebiegu schodkowego, lecz składowa podstawowa aproksymowanego odcinkowo przenosi większą moc od składowej podstawowej przebiegu schodkowego. Ułatwia to konstrukcję ewentualnego filtra dolnoprzepustowego. Wynika stąd konieczność opracowania odpowiedniego algorytmu, obliczającego wartości cyfrowe próbek z których będzie syntetyzowany przebieg aproksymowany odcinkowo. Algorytm ten powinien obliczać próbki w ten sposób, aby minimalizować błąd wartości skutecznej generowanego przez źródło napięcia.

5. Problemy związane z interpolacją pierwszego rzędu i możliwości ich przezwyciężenia

Przeprowadzona analiza nie uwzględnia wpływu ograniczonej rozdzielczości przetwornika cyfrowo-analogowego, jego nieliniowości, wpływu torów analogowych oraz innych zjawisk. Z tego powodu właściwości sygnału uzyskiwanego na wyjściu źródła wyposażonego w interpolator pierwszego rzędu będą różniły się od przedstawionych powyżej. Wg [5] synteza sygnału sinusoidalnego aproksymowanego przebiegiem schodkowym jest lepszym rozwiązaniem niż synteza przy wykorzystaniu interpolatora pierwszego rzędu, a podstawowym sposobem zmniejszenia amplitud harmonicznym jest zwiększenie liczby próbek w okresie generowanego sygnału. Stwierdzono również, że współczynnik *THD* nie jest najbardziej odpowiednim wskaźnikiem czystości widmowej generowanego przez źródło sygnału. Twierdzenie to zostało poparte wynikami badań eksperymentalnych, z których wynika, iż interpolacja pierwszego rzędu poprawia współczynnik *THD*, ale nie zmniejszyła amplitud harmonicznym leżących w pobliżu składowej podstawowej. Autorzy przypuszczają, iż nowoczesne przetworniki cyfrowo-analogowe o dużej rozdzielczości i lepszych parametrach, jak np. AD5791 firmy Analog Devices pozwolą na uzyskanie lepszych właściwości sygnału wytwarzanego przez cyfrowe źródło niż sugerowane w [5].

W pracy [3] zaprezentowano badania wpływu rozdzielczości przetwornika cyfrowo-analogowego oraz liczby próbek w okresie na wartość współczynnika *THD*. Wykazano zgodność wyników obliczeń z wynikami badań modelu fizycznego źródła. Jednak zaproponowane w [3] rozwiązania układowe interpolatorów odzwierciedlają stan techniki lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku.

Autorzy przypuszczają, iż zastosowanie w układzie interpolatora nowoczesnych elementów elektronicznych pozwoli na zwiększenie stabilności i dokładności sygnału wytwarzanego przez źródło. Zastosowanie interpolatora uprości konstrukcję opcjonalnego filtra dolnoprzepustowego na wyjściu toru analogowego, którego zadaniem jest wytlumienie tych składowych widma, które powstają na skutek powielenia sygnałów leżących w paśmie Nyquista czyli o szerokości od 0 do $f_s/2$.

Wadą źródła z interpolatorem pierwszego rzędu jest konieczność zastosowania dwóch przetworników cyfrowo-analogowych, podobnie jak to jest zrealizowane w [3,4,5]. Pierwszy przetwornik generuje przebieg aproksymowany schodkowo, natomiast drugi - o większej szybkości przetwarzania - wytwarza napięcie piłokształtne o amplitudzie równej różnicy pomiędzy dwoma kolejnymi próbkami sygnału sinusoidalnego lub napięcie stałe, które jest przetwarzane na sygnał liniowo narastający. Sygnały te muszą następnie zostać dodane do siebie. Błędy nieliniowości obydwu przetworników cyfrowo-analogowych mogą się sumować, co może powodować powstawanie trudnych do odfiltrowania harmonicznym, zlokalizowanych w pobliżu składowej podstawowej. Jest to również prawdopodobna przyczyna wniosków podanych w [5]. Zastosowanie dodatkowego przetwornika cyfrowo-analogowego umożliwi ponadto interpolację wyższego rzędu.

6. Podsumowanie

Przedstawiona analiza oraz dyskusja problemów związanych z dotychczasowymi rozwiązaniami cyfrowych źródeł napięcia sinusoidalnego z interpolatorami pierwszego rzędu wskazuje na celowość prowadzenia dalszych prac, zmierzających do zbudowania modelu fizycznego źródła o parametrach pozwalających na jego zastosowanie w niekwantowych i kwantowych wzorcach napięcia i prądu przemiennego o małej częstotliwości.

Praca sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Badań i Rozwoju (Projekt Rozwojowy nr N R01 0030 10).

7. Literatura

- [1] Kampik M.: Cyfrowe źródła wzorcowego napięcia przemiennego o małej częstotliwości. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2009.
- [2] Jeanneret B., Overney F., Callegaro L., Mortara A., Rüfenacht A.: Josephson-Voltage-Standard-Locked Sine Wave Synthesizer: Margin Evaluation and Stability, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. 58, No. 4, April 2009, p. 791-796.
- [3] Towers M.S.: Programmable waveform generator using linear interpolation with multiplying D/A converters, IEE Proc. Vol. 129, No. 1 1982, p.19-25.
- [4] Kluger A.: Metoda wytwarzania wzorcowego napięcia sinusoidalnego o małej częstotliwości, Materiały konferencji naukowo-technicznej PPM'01, Gliwice-Ustroń 2001, s.237-247.
- [5] Lozano A., Rosell J., Pallás-Areny R.: On the zero- and first-order interpolation in synthesized sine wave for testing purposes, IEEE Transactions On Instrumentation And Measurements, Vol. 41, No. 6 1992, p.820-823.
- [6] Rybski R.: Komparacja impedancji w układach z cyfrowymi źródłami napięć sinusoidalnych. Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra 2007.

otrzymano / received: 08.02.2013

przyjęto do druku / accepted: 01.04.2013

artykuł recenzowany / revised paper