

BUILDER  
FOR THE  
FUTURE

BUILDER  
FOR THE  
YOUNG  
ENGINEERS

W ramach realizowanego przez miesięcznik „Builder” programu „Wspieramy młodych inżynierów budownictwa” dajemy możliwość pierwszych publikacji naukowych młodym doktorantom.

**Andrzej Popiel, Mateusz Student**  
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego,  
Politechnika Wrocławska

**Opiekun naukowy:**  
**dr inż. Sławomir Rowiński**  
Katedra Konstrukcji Metalowych,  
Politechnika Wrocławska

W dzisiejszych czasach dąży się do tego, aby stropy miały coraz większe rozpiętości przy możliwie jak najmniejszej liczbie podpierających je słupów. Stropy powinny być stosunkowo lekkie o dużej wytrzymałości oraz charakteryzować się odpowiednią odpornością ogniową i trwałością. Jednak decydującą rolę odgrywa tu cena.

### Konstrukcje zespolone stalowo-betonowe

Istnieje wiele rodzajów i technologii wykonania stropów, ale obecnie coraz większą popularnością cieszą się konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Składają się z części stalowej i betonowej zespolonej ze sobą za pomocą łączników. Główną cechą konstrukcji zespolonej jest optymalne wykorzystanie właściwości mechanicznych materiałów – droga stal pracuje na rozciąganie, a stosunkowo tani beton na ściskanie, a także dodatkowo zabezpiecza stal przed ewentualnym działaniem pożaru i korozji. Wyeliminowanie wad stali i betonu oraz możliwie najlepsze wykorzystanie ich zalet przyczyniło się do coraz powszechniejszego zastosowania konstrukcji zespolonych w stropach (w szczególności w parkingach), a także w mostach o dużych rozpiętościach, budynkach wysokich i wysokościowych.

Belki zespolone najczęściej składają się z gorącowalcowanej belki dwuteowej lub ze spawanej blachownicy (często o poszerzonej półce dolnej) oraz z płyty betonowej lub żelbetowej. W przypadku belki swobodnie podpartej na całej długości występuje dodatni moment zginający, więc zgodnie z założeniem stal jest

# MODELOWANIE BELKI ZESPOLONEJ

W artykule omówiono różne metody modelowania belki zespolonej z wykorzystaniem funkcji offsetu, która jest bardzo użytecznym narzędziem dla projektanta. Jednak mimo jej licznych zalet należy jej używać świadomie i znać jej ograniczenia, które mogą wpłynąć bezpośrednio na obliczenia programu komputerowego.

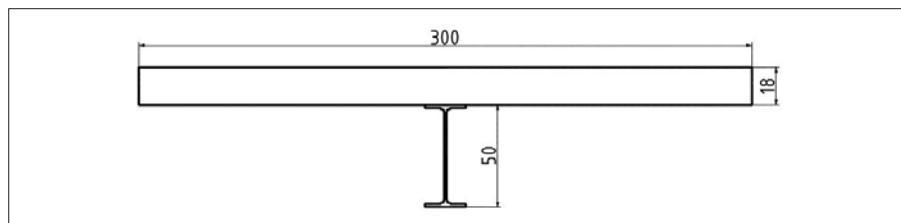
rozciągana, a beton ściskany. Jednak warunkiem takiej współpracy materiałów jest odpowiednie ich zespolenie, które uzyskuje się dzięki łącznikom.

### Obliczenia konstrukcji zespolonych

Współcześnie na rynku istnieje wiele specjalistycznych programów komputerowych służących do obliczeń konstrukcji zespolonych. Belki można jednak zamodelować tradycyjnymi programami konstrukcyjnymi, tj. Robot Structural Analysis, SOFiSTiK AG itp. Istnieją dwa sposoby takiego modelowania: pierwszy wykorzystujący funkcję „offset” oraz drugi, bardziej pracochłonny, polegający na „ręcznym” odsunięciu dwóch materiałów. Funkcja „offset” polega na automatycznym odsunięciu dwóch współpracujących elementów, tak aby były ze sobą zlicowane (jak ma to miejsce w rzeczywistości), gdyż program domyślnie przyjmuje, że są one współpłaszczyznowe. Funkcja ta jest zatem informacją dla programu, w jakiej odległości od siebie znajdują się dwa elementy.

### Dane do obliczeń

Przyjęto, że strop zespolony o rozpiętości 15 m będzie składać się z belki stalowej IPE500 o rozstawie 3 m oraz płyty betonowej o grubości 18 cm. Zatem można wyodrębnić ze stropu poszczególne belki zespolone.



Rys. 1. Wymiary belki zespolonej

Belka została wykonana ze stali S235 o module Younga  $E_s = 210$  MPa, a płyta z betonu klasy C30/37 o module Younga  $E_c = 33$  MPa.

Przyjęto obciążenie na strop  $q_u = 3,0$  kN/m<sup>2</sup>, które po przemnożeniu przez rozstaw belek daje obciążenie po długości  $q = 9,0$  kN/m.

### Obliczenia analityczne

W celu porównania ze sobą obu metod przeprowadzono obliczenia analityczne polegające na wyznaczeniu naprężeń normalnych oraz sił rozwarstwiających bez użycia programów komputerowych.

## Naprężenia normalne

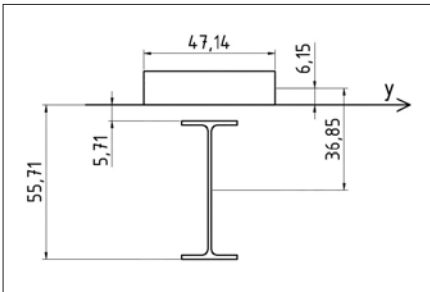
Belka zespolona jest swobodnie podparta, zatem moment w belce należy obliczyć ze wzoru:

$$M_{y,Ed} = \frac{ql^2}{8} = \frac{9,0 \cdot 15^2}{8} = 253,13 \text{ kNm} \quad 2.1$$

W związku z tym, że belka składa się z dwóch materiałów, jej przekrój należy sprowadzić do jednego materiału, np. stali. Szerokość płyty zmniejszono więc o współczynnik, który jest ilorazem modułów Younga.

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{210}{33} = 6,36 \quad 2.2$$

Dla tak zmodyfikowanego przekroju wyznaczono główną oś y. Przechodzi ona przez płytę betonową, co oznaczałoby, że beton będzie rozciągany. Należy zatem usunąć z przekroju rozciąganą część płyty i ponownie wyznaczyć oś y. Przeprowadzono kilka takich iteracji, dochodząc do zbieżności, otrzymując przekrój jak na rysunku (rys. 2.).



Rys. 2. Wymiary przekroju sprowadzonego, zredukowanego

Następnie względem wyznaczonej osi y wyznaczono moment bezwładności, a także wskaźniki sprężyste dla części rozciąganej oraz ściskanej. Aby ostatecznie wyznaczyć naprężenia normalne w stali i betonie, obliczony moment należy podzielić przez odpowiedni wskaźnik zgodnie ze wzorem:

$$\sigma = \frac{M}{W_{sp}} \quad 2.3$$

Tabela 1. Zestawienie wyników obliczeń analitycznych – naprężenia normalne

Moment zginający	253,13 kNm
Moment bezwładności	186320 cm <sup>4</sup>
Wskaźnik sprężysty dla stali	3344 cm <sup>3</sup>
Wskaźnik sprężysty dla betonu	30296 cm <sup>3</sup>
Naprężenia normalne w stali	75,69 MPa
Naprężenia normalne w betonie	1,31 MPa

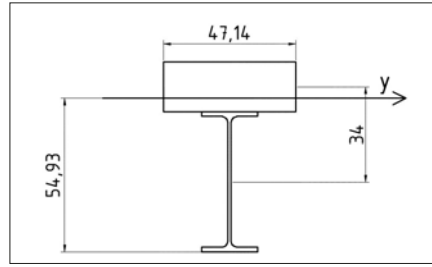
## Siły rozwarstwiające

Dla belki swobodnie podpartej wartość siły tnącej wynosi:

$$T_{z,Ed} = \frac{ql}{2} = \frac{9,0 \cdot 15}{2} = 67,5 \text{ kN} \quad 2.4$$

Przy wyznaczaniu momentu bezwładności nie zredukowano grubości płyty betonowej

o strefę rozciąganą, ponieważ cały przekrój płyty przenosi naprężenia ścinające.



Rys. 3. Wymiary przekroju sprowadzonego, niezredukowanego

Siły rozwarstwiające występują na połączeniu płyty z belką, więc moment statyczny należy wyznaczyć dla całej betonowej płyty. Naprężenie ścinające oblicza się za pomocą wzoru:

$$\tau_{yx} = \frac{T_z S_y}{I_y b} \quad 2.5$$

gdzie:

- $\tau_{yx}$  – naprężenia styczne w przekroju
- $T_z$  – siła tnąca
- $S_y$  – moment statyczny odciętej części przekroju
- $I_y$  – moment bezwładności
- $b$  – szerokość przekroju

Jednak w celu wyznaczenia sił rozwarstwiających, które są bardziej reprezentatywne do wymiarowania łączników, przemnożono obie strony przez szerokość, otrzymując ostatecznie:

$$V_L = \tau_{yx} b = \frac{T_z S_y}{I_y} \quad 2.6$$

Tabela 2. Zestawienie wyników obliczeń analitycznych – naprężenia styczne

Siła tnąca	67,5 kN
Moment bezwładności	190380 cm <sup>4</sup>
Moment statyczny odciętej części przekroju	3453 cm <sup>3</sup>
Siła rozwarstwiająca	122,44 kN/m

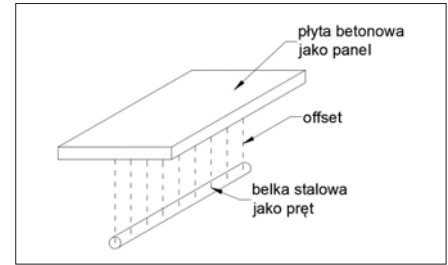
Funkcja „offset” polega na automatycznym odsunięciu dwóch współpracujących elementów, tak aby były ze sobą zlicowane (jak ma to miejsce w rzeczywistości), gdyż program domyślnie przyjmuje, że są one współpłaszczyznowe.

## Offset jako funkcja

Offset można uzyskać na dwa sposoby [1]:

- a) zadając przesunięcie elementu o wartościach absolutnych;
  - b) przesuując środek przekroju poprzecznego profilu w skrajny zadany punkt elementu.
- W sposobie a) w sytuacji zmiany wymiarów elementu należy skorygować przesunięcie. W sposobie b) offset nie jest uzależniony od wymiarów elementu, więc nie ulega zmianie.

Belkę zespoloną zamodelowano metodą pierwszą, przyjmując płytę betonową jako panel, a belkę stalową jako pręt i odsunięto za pomocą offsetu.



Rys. 4. Schemat metody 1.

Poniżej zamieszczono procedurę wyznaczenia sił wewnętrznych metodą 1.:

## MOMENT ZGINAJĄCY

$$M_{y,Ed} = M_{y,Ed,B} + F_{x,Ed} * r + \int M_{xx} dy = 66,19 + 481,7 * 0,3685 + 9,43 = 253,14 \text{ kNm} \quad 2.7$$

gdzie:

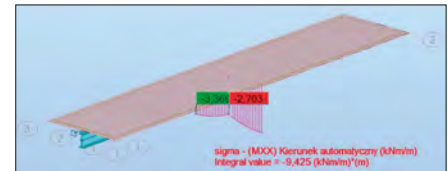
$M_{y,Ed}$  – moment w przekroju [kNm]

$M_{y,Ed,B}$  – moment w przecię [kNm]

$F_{x,Ed}$  – siła osiowa w przecię [kN]

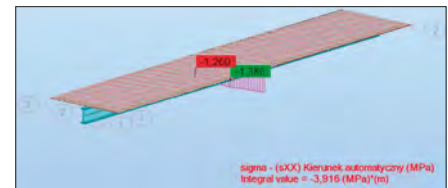
$r$  – offset [m]

$\int M_{xx} dy$  – całka momentu w panelu [kNm]



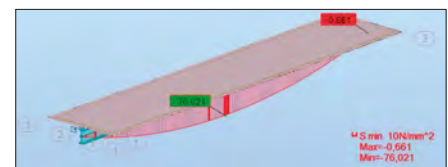
Rys. 5. Wykres momentu zginającego w półce betonowej

## MAKSYMALNE NAPRĘŻENIE NORMALNE Półka betonowa



Rys. 6. Wykres naprężeń normalnych w półce betonowej

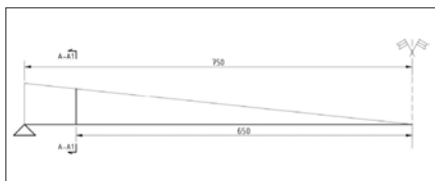
## Kształtownik stalowy



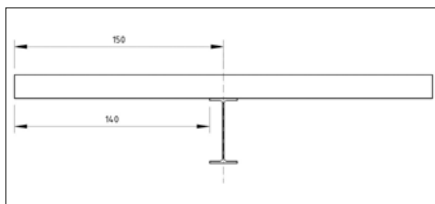
Rys. 7. Wykres naprężeń normalnych w kształtowniku stalowym

## NAPRĘŻENIA STYCZNE

Wyznaczenie maksymalnych naprężeń stycznych występujących w połączeniu kształtownik – półka betonowa celem zwymiarowania łączy.

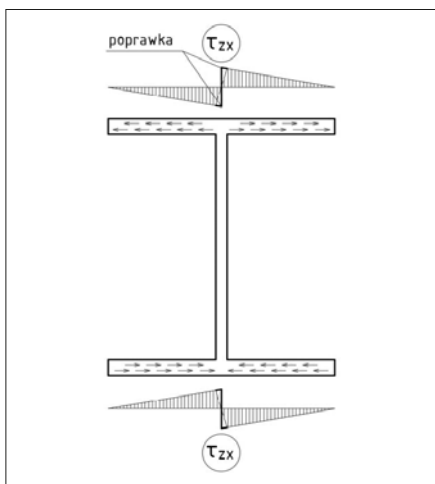


Rys. 8. Wykres sił poprzecznych  $V_z$

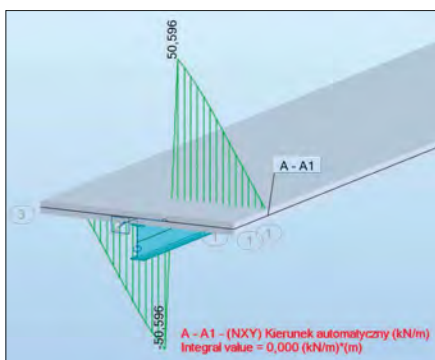


Rys. 9. Przekrój A-A1 belki

Zaleca się, aby naprężenia styczne były analizowane w pewnej odległości od podpory. W tym przypadku przekrój znajduje się w odległości 1,00 m od podpory.



Rys. 10. Wykres naprężeń stycznych w półkach



Rys. 11. Wykres naprężeń stycznych w badanym przekroju  $\tau_{A-A1}$

Wynik podlega korekcie  
Poprawka zgodnie z (rys. 9.)

$$\tau'_{zx} = \frac{150}{140} * \tau_{A-A1} = \frac{150}{140} * 50,59 = 54,21 \text{ kN/m}^2 \quad 2.8$$

Poprawka uwzględniająca przesunięcie przekroju (rys. 10.)

$$V_L = 2 * \left( \frac{7,5}{6,5} * \tau'_{zx} \right) = 2 * \frac{7,5}{6,5} * 54,21 = 125,1 \text{ kN/m} \quad 2.9$$

Tabela 3. Zestawienie wyników obliczeń metodą 1.

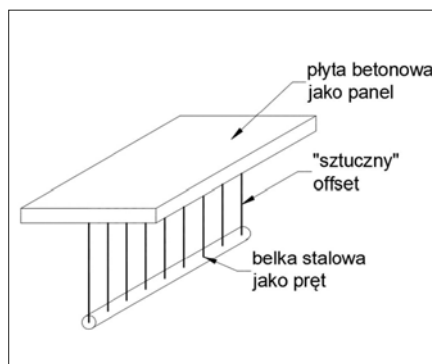
Moment zginający		$M_{y,Ed} = 253,14 \text{ kNm}$
Naprężenia normalne	kształtownik	$\sigma_x = 76,021 \text{ MPa}$
	półka betonowa	$\sigma_x = 1,386 \text{ MPa}$
Siła rozwarstwiająca		$V_L = 125,1 \text{ kN/m}$

Wyniki uzyskane metodą 1. są zbliżone do wyników obliczeń analitycznych. Metoda jest prosta w zastosowaniu. W przeciwieństwie do metody opisanego wcześniej niezeczywiste umiejscowienie podpory wprowadza zaburzenia w tej strefie, a więc należy uwzględnić poprawkę w obliczeniach sił rozwarstwiających.

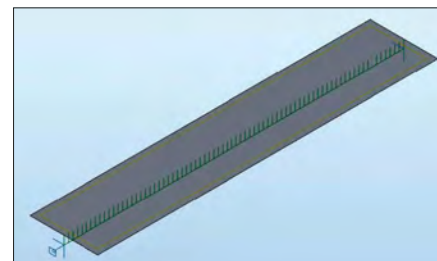
### Offset zamodelowany za pomocą prętów

Głównym celem zastosowania tej metody jest lepsze oddanie rzeczywistych warunków podparcia belki zespolonej. W poprzedniej metodzie podpory muszą być przyłożone do płyty betonowej. Wynika to z ograniczeń funkcji offset, która nie pozwala na podparcie pręta odsuniętego, tylko w miejscu jego pierwotnego wstawienia. Skutkuje to innym rozkładem naprężeń zarówno w płycie żelbetowej, jak i w belce stalowej, a także zwiększonymi zaburzeniami w strefie podporowej.

„Sztuczny” offset polega na zamodelowaniu płyty i pręta w takiej odległości, w jakiej są od siebie oddalone środki ciężkości w rzeczywistości, a połączenie ich dokonuje się za pomocą sztywno zamocowanych prętów pełniących funkcję przewiązek. Ważne jest, aby pręty te były jak najbardziej sztywne oraz możliwie gęsto umieszczone, co zapewni lepsze odwzorowanie. Rozstaw przewiązek powinien pokrywać się z gęstością siatki ES. W ten sposób powstaje tzw. belka Vierenddeel'a, czyli kratownica bez wykratowania.



Rys. 12. Schemat metody 2.



Rys. 13. Model belki zespolonej metodą 2.

Tak jak widać to na rys. 13., takie zamodelowanie belki zespolonej pozwala na umieszczeniu podpór tam, gdzie znajdują się one w rzeczywistości, czyli na końcach belki.

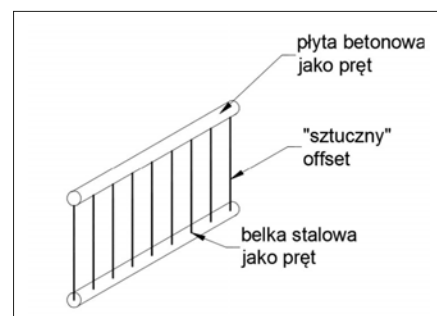
Tabela 4. Zestawienie wyników obliczeń metodą 2.

Moment zginający	w pręcie	$M_{y,Ed,B} = 66,41 \text{ kNm}$
	na offsecie	$F_{x,Ed}; r = 481,3 \cdot 0,3685 = 177,38 \text{ kNm}$
	w panelu	$\int M_{xx} dy = 9,44 \text{ kNm}$
	SUMA	$M_{y,Ed} = 253,22 \text{ kNm}$
Naprężenia normalne	kształtownik	$\sigma_x = 76,064 \text{ MPa}$
	półka betonowa	$\sigma_x = 1,385 \text{ MPa}$
Siła rozwarstwiająca		$V_L = 121,8 \text{ kN/m}$

Metoda ta daje wyniki bardzo zbliżone do poprzedniej. Jednak istotną różnicę można zauważyć w wartości siły rozwarstwiającej. Zgodnie z oczekiwaniami w modelu ze „sztucznym” offsetem wartość siły rozwarstwiającej jest bliższa wartości obliczonej analitycznie. Wynika to z faktu, iż model ten lepiej odwzorowuje warunki podparcia i bezpośrednio przyczynia się do otrzymania dokładniejszych wyników.

### Metody alternatywne

Powyższe dwie metody zamodelowania belki zespolonej nie są jedynymi. Można stworzyć wiele modeli w zależności od sposobu zamodelowania poszczególnych elementów (pręt lub panel) oraz od rodzaju offsetu („normalny” lub „sztuczny”). Przykładem może być skrajne uproszczenie konstrukcji, modelując płytę oraz belkę jako pręt. W tym przypadku offset musi zostać nadany ręcznie – za pomocą przewiązek, gdyż nie ma możliwości umieszczenia w programie dwóch prętów w tym samym miejscu.



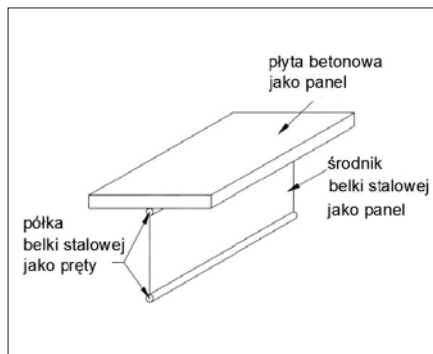
Rys. 14. Schemat metody 3.

Dla tego modelu, w przeciwieństwie do pozostałych, siłę rozwarstwiającą należy wyznaczyć, dzieląc siłę w skrajnej przewiązce przez ich rozstaw.

Tabela 5. Zestawienie wyników obliczeń metodą 3.

Moment zginający	w przęcie (belka)	$M_{y,Ed,B} = 66,24 \text{ kNm}$
	na offsecie	$F_{x,Ed} \cdot r = 470,8 \cdot 0,3685 = 173,50 \text{ kNm}$
	w przęcie (plyta)	$M_{y,Ed,F} = 10,20 \text{ kNm}$
	SUMA	$M_{y,Ed} = 249,94 \text{ kNm}$
Naprężenia normalne	kształtownik	$\sigma_x = 76,064 \text{ MPa}$
	półka betonowa	$\sigma_x = 1,385 \text{ MPa}$
Siła rozwarstwiająca		$V_L = 126,7 \text{ kN/m}$

Z kolei drugim skrajnym przykładem może być zamodelowanie prawie wszystkich elementów konstrukcji panelami. Wiąże się to oczywiście z dużo większym nakładem pracy, ale daje możliwość uzyskania większej liczby danych wytrzymałości belki.



Rys. 15. Schemat metody 4.

Obliczenie momentu zginającego w przekroju jest trudniejsze niż w przypadku pozostałych metod, ponieważ dla każdego panelu należy wyznaczyć siłę osiową i przemnożyć przez odległość od środka płyty.

Tabela 6. Zestawienie wyników obliczeń metodą 4.

Moment zginający	w panelu (półka górna)	$\int M_{xx} dy = 0,01 \text{ kNm}$
	w panelu (półka dolna)	$\int M_{xx} dy = 0,01 \text{ kNm}$
	w panelu (plyta)	$\int M_{xx} dy = 11,25 \text{ kNm}$
	siła ściskająca (półka górna)	$F_{x,Ed,1} \cdot r_1 = 5,1 \cdot 0,1265 = 0,64 \text{ kNm}$
	siła ściskająca (środek)	$F_{x,Ed,2} \cdot r_2 = 196,15 \cdot 0,3609 = 70,78 \text{ kNm}$
	siła ściskająca (półka dolna)	$F_{x,Ed,3} \cdot r_3 = 250,88 \cdot 0,6105 = 153,16 \text{ kNm}$
	SUMA	$M_{y,Ed} = 235,85 \text{ kNm}$
Naprężenia normalne	kształtownik	$\sigma_x = 78,40 \text{ MPa}$
	półka betonowa	$\sigma_x = 1,305 \text{ MPa}$
Siła rozwarstwiająca		$V_L = 125,43 \text{ kN/m}$

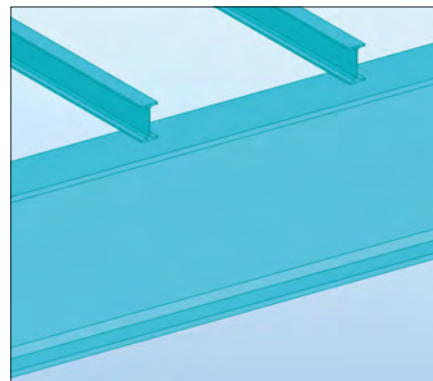
Metoda (opisana jako pierwsza), w której płyta betonowa jest modelowana jako panel, a belka stalowa jako pręt odsunięty za pomocą funkcji offsetu, wydaje się być najkorzystniejsza, ponieważ nie wymaga skomplikowanego modelu konstrukcji i dużej mocy obliczeniowej komputera, a daje dość dokładne wyniki wystarczające na potrzeby obliczeń inżynierskich.

### Wnioski

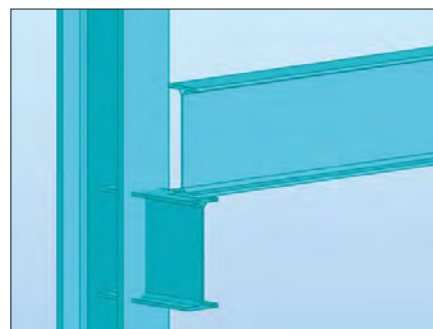
Wszystkie metody dają zbliżone wyniki. Złożone modele konstrukcji są bardziej pracochłonne i wymagają dłuższego czasu obliczeń programu. Co prawda lepiej oddają rzeczywistą pracę konstrukcji, jednak dokładność wyników nie rekompensuje zwiększonego trudu włożonego w ich wykonanie. Zatem pierwsza metoda, w której płyta betonowa jest modelowana jako panel, a belka stalowa jako pręt odsunięty za pomocą funkcji offsetu, wydaje się być najkorzystniejsza, ponieważ nie wymaga skomplikowanego modelu konstrukcji i dużej mocy obliczeniowej komputera, a daje dość dokładne wyniki wystarczające na potrzeby obliczeń inżynierskich.

### Inne sposoby wykorzystania funkcji offsetu

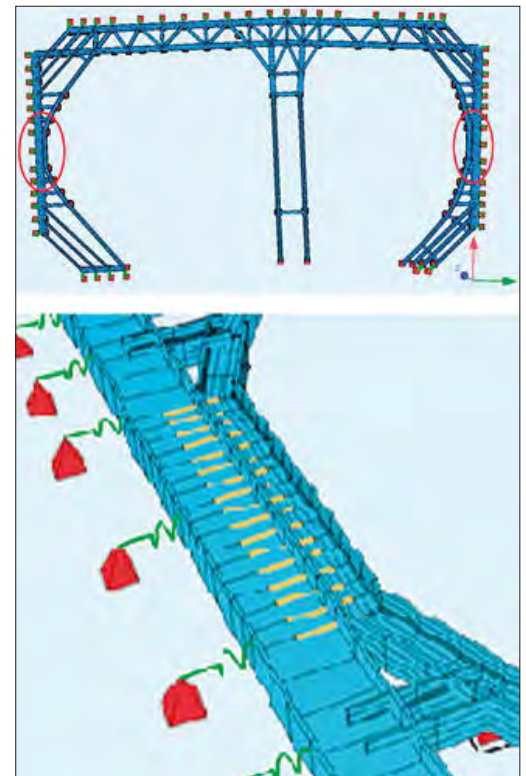
Funkcja offsetu ma zastosowanie nie tylko w przypadku konstrukcji zespolonych. W przypadku definiowania połączenia mimośrodowego połączenia prętów także wykorzystujemy funkcję offsetu. Na rys.16–18 przedstawiono kilka innych przykładów zastosowania funkcji przesunięcia.



Rys. 16. Połączenie rygla z płatwią



Rys. 17. Połączenie wspomnika z belką podsuwnicową



Rys. 18. Konstrukcja stropu tymczasowego

### Podsumowanie

Funkcja offsetu jest bardzo użytecznym narzędziem dla projektanta. Jednak mimo jej licznych zalet należy używać tej funkcji świadomie i znać jej ograniczenia, które mogą wpłynąć bezpośrednio na obliczenia programu komputerowego. Trzeba pamiętać, że do projektanta należy interpretacja wyników, które mogą bardziej lub mniej odbiegać od rzeczywistego wytrzymałości konstrukcji.

### Bibliografia

[1] Autodesk Robot Structural Analysis 2010 – Podręcznik użytkownika.

### Abstract. METHODS OF MODELING OFFSETS BASED ON COMPOSITE BEAM EXAMPLE.

Methods of modeling offsets is presented. Calculations are based on example of composite concrete-steel beam. Design principia, diagrams of inner forces, examples of other application offsets are reported in the paper.

**Keywords:** composite beam, offset