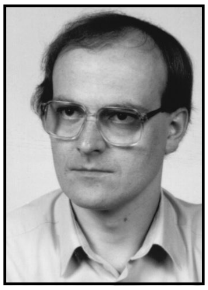
Józef BORKOWSKI, Janusz MROCZKA
KATEDRA METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Analiza metrologiczna interpolacji DFT metodą uzupełniania zerami

dr inż. Józef BORKOWSKI

Adiunkt w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Zajmuje się algorytmami i narzędziami cyfrowego przetwarzania sygnałów i badaniem uwarunkowań metrologicznych algorytmów DSP. Specjalizuje się w metodach precyzyjnych pomiarów widma w szczególności z użyciem procesorów sygnałowych

e-mail:Jozef.Borkowski@pwr.wroc.pl



prof. dr hab. inż. Janusz MROCZKA

Kierownik Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Zajmuje się metodologią obserwacji i eksperymentu, algorytmizacją problemu odwrotnego, modelowaniem matematycznym pól fizycznych, analizą spektralną i polaryzacyjną promieniowania rozproszonego, reprezentacjami czasowo-częstotliwościowymi w przetwarzaniu danych.

e-mail:Janusz.Mroczka@pwr.wroc.pl

Streszczenie

Praca przedstawia analizę metrologiczną metody estymacji parametrów sygnału będącego sumą składowych sinusoidalnych wykorzystującej technikę okien danych i dyskretnego przekształcenia Fouriera (DFT) przy uzupełnianiu próbek sygnału próbkami zerowymi – tzw. metody uzupełniania zerami (ang. *padding zeros*). Przeprowadzona analiza metrologiczna prezentuje zależności na maksymalne błędy estymacji amplitud i częstotliwości składowych oscylacji sinusoidalnych w zależności od liczby dodawanych próbek zerowych i charakterystyki częstotliwościowej na przykładzie okna trójkątnego.

Słowa kluczowe: uzupełnianie zerami, interpolacja DFT, analiza sygnału wieloczęstotliwościowego, estymacja widma

Metrological analysis of the DFT padding zeros interpolation method

Abstract

The paper presents the metrological analysis the parameters estimation method of signal being the sum of sinusoid components, used data windows technique and discrete Fourier transform (DFT) with padding signal proboes by zeros probes – so-called padding zeros method. Realized metrological analysis describes the dependences for maximum estimation errors of amplitudes and frequencies of component sinusoidal oscillaations as a function of the number of zero samples, frequency characteristic of data window on the triangle window example.

Keywords: padding zeros, DFT interpolation, multi-frequncy signal analysis, spectrum estimation

1. Wprowadzenie

Technika okien danych i dyskretnego przekształcenia Fouriera (DFT) jest powszechnie stosowaną metodą obliczania widma sygnału i jednym z jej zastosowań jest estymacja amplitud, częstotliwości i faz składowych oscylacji sinusoidalnych. Najczęściej wykorzystywanym w tym celu algorytmem obliczeniowym jest algorytm szybkiego przekształcenia Fouriera – FFT, który jest szybką metodą obliczania DFT. W niniejszej pracy analizujemy interpolacyjny efekt metody uzupełniania zerami polegający na otrzymaniu w wyliczanym widmie dodatkowych punktów widma, co pozwala na precyzyjniejsze określenie położenia maksimów lokalnych widma, a tym samym częstotliwości, amplitud i faz składowych sygnału. Istnieją inne metody interpolacji maksimów lokalnych widma uzyskanego w wyniku DFT (np. [1]-[3]), które wykorzystują analizę kształtu listka głównego stosowanego okna danych lub aproksymację listka głównego okna uniwersalną funkcją, np. krzywą wielomianową. Metody te zakładają pełną separację składowych w widmie, co często jest założeniem trudnym do spełnienia. Próbą przezwyciężenia tego problemu jest metoda liniowej interpolacji DFT (LIDFT) wykorzystująca aproksymację charakterystyki częstotliwościowej okna danych funkcjami liniowymi ([4]-[6]). Przy porównywaniu właściwości metrologicznych tych metod pojawiła się potrzeba odniesienia uzyskiwanych wyników do metody interpolacji widma techniką uzupełniania zerami, jako jednej z najprostszych i najbardziej skutecznych metod, z uwzględnieniem faktu wzajemnej interferencji składowych w widmie. Niniejsza praca służy właśnie temu celowi.

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że uzupełnianie zerami jest często stosowane wyłącznie w celu umożliwienia zastosowania określonego typu algorytmu FFT, gdy liczba próbek otrzymanych z przetwornika A/C nie spełnia wymagań stosowanej wersji algorytmu FFT (np. dla algorytmu FFT typu radix-2 liczba próbek musi być całkowitą potęgą liczby 2), a efekt interpolacyjny metody nie jest ważny. Ta numeryczna właściwość metody, choć cenna, nie jest tutaj istotnym elementem ani celem analizy.

2. Podstawowe zależności matematyczne

Zakładamy, że model sygnału jest dany zależnością:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^{M} B_i e^{j\omega_i t} + \sum_{i=1}^{M} B_i^* e^{-j\omega_i t} \tag{1}$$

a celem pomiaru jest wyznaczenie M, A_i, $f_i = \omega_i / 2\pi$, φ_i dla $i = 1,\ldots,M$. Ze wzoru (1) wynika również, że sumę M oscylacji sinusoidalnych można przedstawić jako sumę $P = 2M$ oscylacji zespolonych (parami sprzężonych) o amplitudach $B_i = A_i e^{j\varphi_i} / 2j$. W wyniku próbkowania w przetworniku A/C z częstotliwością próbkowania $f_s = 1/T$ uzyskujemy N próbek y_n dla $t = nT$, gdzie $n = 0,\ldots,N-1$ i zależność (1) przyjmuje postać:

$$y_n = y(t = nT) = \sum_{i=1}^{P} B_i e^{j2\pi f_i nT} = \sum_{i=1}^{P} B_i e^{j2\pi n\lambda_i / N} \tag{2}$$

gdzie $\lambda_i = f_i \cdot NT$ jest unormowaną częstotliwością (w [bins]), B_i – zespoloną amplitudą oscylacji $B_i e^{j2\pi n\lambda_i / N}$, a celem estymacji jest wyznaczenie parametrów λ_i oraz B_i.

Równanie:

$$F_\lambda = F(\lambda = f / NT) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi n\lambda / N} \quad (3)$$

definiuje dyskretno-czasową transformatę Fouriera (DtFT) dla ciągłej unormowanej częstotliwości $\lambda = f / NT$ i przy zastosowaniu okna danych w_n. Dla $\lambda = 0,1,\ldots,N-1$ wzór (3) definiuje dyskretne przekształcenie Fouriera (DFT), które jest spróbkowanym DtFT. Podstawowe własności okna danych w_n charakteryzuje jego charakterystyka częstotliwościowa – DtFT okna danych:

$$W(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda / N} \quad (4)$$

na podstawie której definiuje się takie parametry okna jak szerokość listka głównego, tłumienie maksymalnego listka bocznego, nachylenie charakterystyki opadania obwiedni listków bocznych, itp. Na podstawie (2)-(4) otrzymujemy:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{P} B_i \cdot W(\lambda - \lambda_i) \quad (5)$$

Zwykle do obliczania DFT stosujemy algorytm FFT:

$$F_n = F(\lambda = n) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i w_i e^{-j2\pi ni / N} = \mathrm{FFT}_n\{y_i w_i\} \quad (6)$$

gdzie $n = 0,\ldots,N-1$.

Metoda uzupełniania zerami wykorzystuje obliczanie DFT ciągu $N \cdot R$-elementowego $\{y_0 w_0,\ldots,y_{N-1}w_{N-1},0,\ldots,0\}$ (oznaczmy w skrócie przez $\{y_i w_i, 0_R\}$), zamiast ciągu $\{y_0 w_0,\ldots,y_{N-1}w_{N-1}\} = \{y_i w_i\}$. Dla takiej, R-krotnej metody uzupełniania zerami, zależność (6) przyjmuje postać:

$$F_{n/R} = F(\lambda = n / R) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i w_i e^{-j2\pi ni / NR} = \mathrm{FFT}_n\{y_i w_i, 0_R\} \quad (7)$$

gdzie $n = 0,\ldots,NR-1$.

Głównym celem metody uzupełniania zerami jest otrzymanie R-krotnie większej ilości próbek DtFT – znamy wówczas widmo sygnału dla $\lambda = 0,1/R,\ldots,N-1/R$ (z krokiem $1/R$ [bins]) zamiast dla $\lambda = 0,\ldots,N-1$ (z krokiem 1 [bins]). Należy jednak pamiętać, że szerokość listka głównego pozostaje niezmieniona (znamy go jedynie w większej liczbie punktów). Dla dużych wartości R czas obliczania FFT znacząco wzrasta (około $R \cdot (1 + \log_N R)$ razy), ale przy obecnych możliwościach układów obliczających FFT (np. procesorów sygnałowych) jest to akceptowalne, jeśli tylko poprawi to znacząco dokładność analizy widma.

Dalsze analizy ilościowe przedstawimy dla okna trójkątnego, zdefiniowanego zależnością ([7]):

$$w_n = \begin{cases} n/(N/4) & dla \quad n = 0,\ldots,N/2 \\ w_{N-n} & dla \quad n = N/2,\ldots,N-1 \end{cases} \quad (8)$$

i o charakterystyce częstotliwościowej otrzymanej z (4):

$$W(\lambda) = \frac{4}{N} e^{-j\pi\lambda} \left(\frac{\sin \pi\lambda/2}{\sin \pi\lambda/N}\right)^2 \quad (9)$$

Zakładamy również, że stosowane okno danych jest oknem unormowanym:

$$W(0) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n = N \quad (10)$$

Przedstawione zależności matematyczne stanowią podstawę do przedstawienia definicji błędów estymacji w punkcie 3.

3. Definicje błędów metod interpolacji

W wyniku analizy funkcji $F(\lambda)$, uzyskanej z równania (3), uzyskujemy nie dokładne wartości B_i, λ_i, ale ich estymatory $\hat{B}_i$, $\hat{\lambda}_i$. Błąd estymacji amplitudy $|B_i|$ oraz częstotliwości λ_i zdefiniujmy jako $\delta|B_i| = |((|\hat{B}_i| - |B_i|)/|B_i|)|$ oraz $\Delta\lambda_i = |\hat{\lambda}_i - \lambda_i|$. Jeśli sygnał składa się z dwóch oscylacji o amplitudach zespolonych B_k, B_i, częstotliwościach unormowanych λ_k, λ_i oraz $\lambda = |\lambda_k - \lambda_i|$, to dla znanych metod interpolacji DFT mamy:

$$\delta|B_k| = \delta_1|B_k| + \delta_2|B_k| = \delta_1|B_k| + \frac{|B_i|}{|B_k|} f\left(\frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|}\right) \quad (11)$$

$$\Delta\lambda_k = \Delta_1\lambda_k + \Delta_2\lambda_k = \Delta_1\lambda_k + \frac{|B_i|}{|B_k|} g\left(\frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|}\right) \quad (12)$$

gdzie funkcje g, f (często $f(x) = x$), zależą od zastosowanej metody interpolacji (w tym również okna danych), $\delta_1|B_k|$, $\Delta_1\lambda_k$ są błędami stosowanej metody interpolacji widma, a $\delta_2|B_k|$, $\Delta_2\lambda_k$ są błędami spowodowanymi interferencją obu składowych (przeciek widma). Dla przypadku sygnału wieloczęstotliwościowego w zależnościach (11), (12) należy uwzględnić dodatkowo fakt, że składowe $\delta_2|B_k|$, $\Delta_2\lambda_k$ są sumą błędów pochodzących od pozostałych oscylacji.

We wszystkich metodach interpolacji DFT (z wyjątkiem metody LIDFT) zakłada się, że poprzez odpowiedni dobór okna danych składowe są dobrze odseparowane od siebie, tzn. $|B_i W(\lambda)| << |B_k W(0)|$, a więc $\delta_2|B_k| \approx 0$ i $\Delta_2\lambda_k \approx 0$, co w wielu przypadkach może nie być prawdziwe. W punkcie 4 przedstawiamy wartości maksymalne tych błędów dla interpolacji DFT metodą uzupełniania zerami.

4. Błędy interpolacji DFT metodą uzupełniania zerami

W przypadku, zdefiniowanego już w punkcie 3, sygnału składającego się z dwóch oscylacji zespolonych (B_k, λ_k), (B_i, λ_i), $\lambda = |\lambda_k - \lambda_i|$, załóżmy, że $\lambda_k \in <(k-1)/R, k/R>$ (w [bins]), i po obliczeniu $F_{n/R}$ z równania (7) dla $n = 0,\ldots,NR-1$ przyjmujemy, że $|\hat{B}_k| = \max_n |F_{n/R}|$ dla n bliskich k i $\hat{\lambda}_k = n/R$ (przy dobrej separacji składowych $n = k-1$ lub $n = k$). Wartości $\delta_1|B_k|$, $\Delta_1\lambda_k$ z (11), (12) osiągają maksimum dla $\lambda_k = (k-0.5)/R$, a stąd możemy określić maksima błędów zdefiniowanych w (11) i (12) dla interpolacji uzupełnianiem zerami w klasycznej analizie DFT:

$$\max \delta_Z \mid B_k \mid \approx \left| \frac{|W(1/2R)|}{|W(0)|} - 1 \right| + \frac{|B_i|}{|B_k|} \frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|} \tag{13}$$

$$\max \Delta_Z \lambda_k \approx \frac{1}{2R} \quad \text{dla} \quad |B_i W(\lambda)| << |B_k W(0)| \tag{14}$$

gdzie przyjęcie $f(x) = x$ dla funkcji f z (11) wynika z równania $|\hat{B}_k| = \max_n |F_{n/R}|$ i liniowości DFT.

Uwzględniając następujące rozwinięcie w szereg MacLaurina względem λ:

$$\frac{4}{N}\left(\frac{\sin \pi\lambda/2}{\sin \pi\lambda/N}\right)^2 = N + \left(\frac{\pi^2}{3N} - \frac{\pi^2 N}{12}\right)\lambda^2 + \ldots \tag{15}$$

oraz warunek $W(0) = N$ uzyskujemy z równań (9), (15):

$$\left| \frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|} - 1 \right| \approx \left| \frac{\pi^2}{3N^2} - \frac{\pi^2}{12} \right| \lambda^2 \tag{16}$$

i stąd dla $N >> 1$:

$$\left| \frac{|W(\lambda)|}{|W(0)|} - 1 \right| \approx \frac{\pi^2}{12} \lambda^2 \approx 0.823 \cdot \lambda^2 \tag{17}$$

Dla $\lambda = 1/2R$ w zależności (13) wzory (13) i (14) dla okna trójkątnego przyjmują postać:

$$\max \delta_Z \mid B_k \mid \approx \delta_{1Z} \mid B_k \mid + \delta_{2Z} \mid B_k \mid \tag{18}$$

gdzie:

$$\delta_{1Z} \mid B_k \mid \approx 0.206 / R^2 \tag{19}$$

$$\delta_{2Z} \mid B_k \mid \approx \frac{|B_i|}{|B_k|} \frac{1}{N} |W(\lambda_k - \lambda_i)| \tag{20}$$

oraz

$$\max \Delta_Z \lambda_k = \Delta_{1Z} \lambda_k + \Delta_{2Z} \lambda_k \tag{21}$$

gdzie:

$$\Delta_{1Z} \lambda_k \approx 0.5 / R \tag{22}$$

$$\Delta_{2Z} \lambda_k \le \Delta_{1Z} \lambda_k \quad \text{dla} \quad |B_i W(\lambda)| << |B_k W(0)| \tag{23}$$

Możliwe jest dokładniejsze wyznaczenie tych błędów poprzez symulacje numeryczne, np. określenie funkcji $g(x)$ z (12) dla okna trójkątnego, ale zgrubne granice określone przez (19), (20) są wystarczające do ich porównania z wynikami uzyskanymi w metodzie LIDFT ponieważ dokładniejsza estymacja wartości amplitudy składowej sinusoidalnej skutkuje dokładniejszą estymacją jej częstotliwości.

Jak wspomniano w punkcie 3, błędy $\delta_{1Z} \mid B_k \mid$, $\Delta_{1Z} \lambda_k$ są błędami stosowanej tu metody interpolacji widma, tzn. metody uzupełniania zerami, które wynikają z dyskretnego charakteru widma wyznaczanego zależnością (7) co skutkuje niedokładnym wyznaczeniem maksimum listka głównego danej składowej, nawet wówczas, gdyby nie był on zniekształcony przeciekiem widma pochodzącym od innych składowych. Natomiast $\delta_{2Z} \mid B_k \mid$, $\Delta_{2Z} \lambda_k$ są błędami spowodowanymi właśnie zniekształceniem listka głównego danej składowej przez przeciek widma pochodzący od innych składowych.. Uogólniając te wnioski na inne metody interpolacji zakładające brak interferencji składowych w widmie (przez zastosowanie okna danych o odpowiednim tłumieniu listków bocznych) możemy znacząco zmniejszyć wartość błędu $\delta_{1Z} \mid B_k \mid$ z równania (19) zachowując proporcjonalną zależność błędu $\delta_{2Z} \mid B_k \mid$ z równania (17) od wartości $(|B_i| / |B_k|) \cdot |W(\lambda_k - \lambda_i)| / N$. Tym samym zwiększenie liczby dodawanych próbek zerowych (zwiększenie wartości R) pozwala na zmniejszenie tylko składowej błędu $\delta_{1Z} \mid B_k \mid$ bez zmniejszenia składowej błędu $\delta_{2Z} \mid B_k \mid$, co jest szczególnie istotne, gdy składowa błędu $\delta_{2Z} \mid B_k \mid$ jest dominująca w błędzie całkowitym $\delta_Z \mid B_k \mid$ z równania (18).

5. Podsumowanie

Przedstawiona analiza metrologiczna interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (DFT) metodą uzupełniania zerami wskazuje, że błąd estymacji amplitudy i częstotliwości składowych sinusoidalnych sygnału wieloczęstotliwościowego (złożonego z sumy wielu sinusoid) jest w ogólności sumą dwóch składowych. Pierwsza z nich jest zależna od zastosowanej metody interpolacji i w metodzie uzupełniania zerami można tę składową błędu znacząco zmniejszyć zwiększając liczbę dodawanych próbek zerowych do próbek otrzymanych z przetwornika A/C. Druga składowa błędu wynika z wzajemnej interferencji składowych w widmie spowodowanej zjawiskiem „przecieku" widma, który zależy od zastosowanego okna danych. Ten składnik błędu jest niezależny od stosowanej metody interpolacji i nawet znaczące zwiększenie liczby dodawanych próbek w metodzie uzupełniania zerami nie zmniejsza wartości tej składowej błędu.

Przedstawione w pracy szczegółowe zależności przedstawiono przy założeniu zastosowania okna trójkątnego, jednak w przypadku innych okien danych, po odpowiedniej modyfikacji można uzyskać szczegółowe wyniki dla tych okien i podobne wnioski ogólne. Wskazują one, że zaniedbywanie zjawiska „przecieku" widma w analizie własności metrologicznych różnych metod interpolacji widma wynikowego DFT może być zbytnim uproszczeniem i w wielu przypadkach prowadzić do błędnych wniosków.

6. Literatura

[1] J. Schoukens, R. Pintelon, H. V. Hamme, "The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 41, pp. 226-232, Apr. 1992.

[2] L. Zhu, H. Ding and K. Ding, "Phase regression approach for estimating the parameters of a noisy multifrequency signal," IEEE Proc.-Vis. Image Signal Process., Vol. 151, No. 5, Oct. 2004.

[3] D. Agrez, "Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multifrequency signal," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 51, pp. 287-292, Apr. 2002.

[4] J. Borkowski, "LIDFT – The DFT linear interpolation method," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 49, pp. 741-745, Aug. 2000.

[5] J. Borkowski, J. Mroczka, „Application of the discrete Fourier transform linear interpolation method in the measurment of volume scattering function at small angle," Opt. Eng., vol. 39, no. 6, pp. 1576-1586, June 2000.

[6] J. Borkowski, J. Mroczka, "Metrological analysis of the LIDFT method," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 51, pp. 67-71, Feb. 2002.

[7] F. J. Harris, "On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform". Proc. IEEE , vol. 66, pp. 51-83 (1978).

Artykuł recenzowany