

DRGANIA BELKI EULERA NA INERCYJNYM PODŁOŻU WŁASOWA-LEONTIEWA POD WPLYWEM IMPULSU SIŁY

Przedmiotem analizy w niniejszej pracy są drgania belki Bernoulliego-Eulera spoczywającej na podłożu inercyjnym Własowa-Leontiewa wymuszone impulsem siły. W pierwszej kolejności w referacie podano w skrócie teoretyczne podstawy dotyczące trójparametrowego, inercyjnego podłoża Własowa. Następnie przedstawiono rozwiązanie analityczne drgań sprężystej belki Bernoulliego-Eulera na takim podłożu poddanej działaniu impulsu siły. Otrzymane rozwiązanie zaprogramowano korzystając z pakietu Mathematica. Badano wpływ parametrów podłoża na ugięcia belki wywołane impulsem siły przyłożonym w środku rozpiętości belki lub w pobliżu podpory. Wyniki analizy zilustrowano graficznie przedstawiając szereg wykresów.

WSTĘP

Zadanie interakcji konstrukcji budowlanych z podłożem gruntowym pod wpływem obciążeń udarowych jest szczególnie ważne w przypadku nawierzchni lotniskowych oraz drogowych i kolejowych. Podłoże gruntowe ma za zadanie przejąć obciążenia działające na te konstrukcje.

Teorie dotyczące obciążeń udarowych i impulsowych sięgają początku mechaniki teoretycznej i technicznej. Klasyczna teoria uderzenia i rachunku impulsów sił, punktów materialnych i ciał sztywnych wykorzystuje zasadnicze prawa i zasady mechaniki, to jest prawo zachowania pędu, prawo zachowania krętu a także definicję współczynnika restytucji Newtona. W teorii klasycznej wyróżnia się trzy typy zderzeń: sprężyste, plastyczne i sprężysto-plastyczne [1-15]. W dziewiętnastym wieku powstały teorie, takie jak teoria Hertza czy teoria falowa, które poszerzają grupę zadań możliwych do rozwiązania o inne zadania mechaniki stosowanej.

W literaturze istnieje również wiele prac dotyczących różnego typu modeli podłoża odkształcanych oraz ich interakcji z konstrukcjami budowlanymi. Modele podłoża, opisujące związek między reakcją i osiadaniem gruntu, można klasyfikować w różny sposób. Stosując podstawowe dwa podejścia do zadania modelowania ośrodka gruntowego można wyróżnić dwie grupy modeli podłoża: modele analogowe oraz modele masywu gruntowego. Pierwsze z nich obejmują proste, powierzchniowe układy mechaniczne, które nie zależą od geometrii i od cech materiałowych współpracujących z konstrukcją budowlaną gruntów. W przypadku tych modeli wymagane jest jedynie, możliwie dokładne odzwierciedlenie ugięć obciążonej powierzchni. W drugim przypadku definiuje się trójwymiarowe modele ośrodka ciągłego, opisujące zachowanie gruntów, na których posadowiona jest konstrukcja budowlana. Zależność między reakcją i osiadaniem podłoża uzyskuje się na podstawie analitycznego lub numerycznego rozwiązania zagadnienia równowagi modelu pod działaniem obciążenia na małym obszarze powierzchni. W obu tych grupach można wyodrębnić modele podłoża nieinercyjnych oraz inercyjnych.

Do modeli nieinercyjnych zaliczyć można najstarszy, a zarazem najprostszy, podstawowy model analogowy ośrodka gruntowego jakim jest schemat podłoża sprężystego Winklera. W modelu tym odkształcenie powierzchni gruntu w każdym punkcie jest proporcjonalne do przyłożonego w tym punkcie obciążenia oraz jest niezależne od odkształceń i naprężeń w innych punktach podłoża. Zatem schemat ten zakłada całkowity brak ciągłości w podłożu gruntowym. Model podłoża sprężystego ma zastosowanie na przykład do wyznaczania przemieszczeń i naprężeń w nawierzchniach kolejowych, nie odzwierciedla on jednak rozkładu przemieszczeń i naprężeń w gruncie, na którym posadowiona jest budowla. Innym modelem, skrajnie różnym od podłoża Winklera, na podstawie którego można wyznaczyć również naprężenia i przemieszczenia w gruncie, jest należący do grupy modeli masywu gruntowego, model półprzestrzeni sprężystej Boussinesqa. W tym przypadku zakładamy ciągłość gruntu. Z badań doświadczalnych wynika jednak, że choć przemieszczenia podłoża gruntowego występują nie tylko w miejscu przyłożenia obciążenia, ale także w jego sąsiedztwie, to zanikają znacznie szybciej niż to wynika z rozwiązań modelu półprzestrzeni sprężystej. W związku z tym wielu badaczy podejmowało próby opracowania schematu obliczeniowego podłoża, pośredniego między modelami Winklera i Boussinesqa. Schematy obliczeniowe podłoża z dodatkowymi elementami wywołującymi interakcję między sprężynami Winklera opracowali między innymi Wieghardt, Filonienko-Borodicz, Murawski i Świtka, Hetényi, Pasternak, Kerr, Saito i Murakami i wielu innych. Z kolei np. Reissner, Gorbunow-Posadow, Żemoczkin, oraz Własow i Leontiew, dążąc do lepszego odwzorowania przemieszczeń i naprężeń w gruncie, narzucili ograniczenia na ich rozkład w półprzestrzeni sprężystej. Przegląd modeli podłoża można znaleźć między innymi w pracach [16-21].

Pomimo licznych opracowań dotyczących uderzenia niewiele znaleźć można w literaturze prac dotyczących impulsów sił na belkach lub płytach spoczywających na podłożach odkształcalnych. Przedmiotem analizy w tej pracy jest belka spoczywająca na trójparametrowym podłożu inercyjnym Własowa-Leontiewa, poddana działaniu impulsu siły.

Pomimo licznych opracowań dotyczących uderzenia niewiele znaleźć można w literaturze prac dotyczących impulsów sił na belkach lub płytach spoczywających na podłożach odkształcalnych.

Przedmiotem analizy w tej pracy jest belka spoczywająca na trójparametrowym podłożu inercyjnym Własowa-Leontiewa, poddana działaniu impulsu siły.

1. MODEL PODŁOŻA INERCYJNEGO WŁASOWA-LEONTIEWA

W ogólnym przypadku model podłoża inercyjnego Własowa opisany jest następującym równaniem, między innymi [11]

$$p(x, y, t) = k_0 w(x, y, t) - 2c_0 \nabla^2 w(x, y, t) + m_0 \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

w którym k_0 , c_0 i m_0 są współczynnikami podłoża.

W zagadnieniu liniowym (belka) wyrażenie (1) redukuje się do postaci

$$p(x,t) = k_0 w(x,t) - 2c_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

W wyrażeniach (1) i (2) współczynnik k_0 odpowiada współczynnikowi sprężystości występującemu w modelu Winklera, c_0 uwzględnia ścinanie Pasternaka w warstwie sprężystej, natomiast m_0 uwzględnia inercję podłoża. W przypadku belki o szerokości b , spoczywającej na warstwie podłoża o grubości H współczynniki te określone są wzorami:

$$k_0 = \frac{E_0 s_{11}}{1 - \nu_0^2}, \quad c_0 = \frac{E_0 r_{11}}{4(1 + \nu_0)}, \quad m_0 = \tilde{m}_0 b \int_0^H \psi^2(z) dz, \quad (3)$$

gdzie:

$$E_0 = \frac{E_{gr}}{1 - \nu_{gr}^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_{gr}}{1 - \nu_{gr}^2}, \quad \tilde{m}_0 = \frac{\gamma_0}{g}, \quad (4)$$

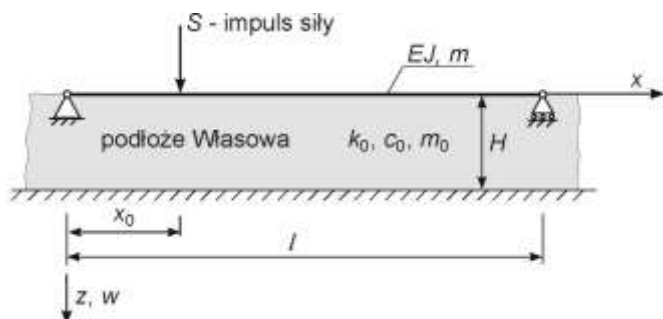
$$s_{11} = b \int_0^H \left[\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \right]^2 dz, \quad r_{11} = b \int_0^H \psi^2(z) dz.$$

We wzorach (3) i (4) przyjęto następujące oznaczenia:

- E_{gr} – moduł Younga gruntu,
- ν_{gr} – liczba Poissona gruntu,
- \tilde{m}_0 – gęstość gruntu,
- γ_0 – ciężar właściwy gruntu.

2. BELKA EULERA NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM WŁASOWA-LEONTIEWA OBCIĄŻONA IMPULSEM SIŁY. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE ZADANIA

Przeanalizujemy drgania swobodnie podpartej, sprężystej belki Bernoulliego-Eulera spoczywającej na warstwie trójparametrowego podłoża Własowa-Leontiewa, wymuszone impulsem siły (rysunek 1).



Rys. 1. Schemat dynamiczny belki Bernoulliego-Eulera na inercyjnej warstwie sprężystej Własowa

Po uwzględnieniu odporu gruntu (2), równanie ruchu belki przedstawionej na rysunku 1 zapisujemy w następującej postaci

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2c_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (m + m_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_0 w = P \delta(x - x_0) \delta(t - t_0), \quad (5)$$

gdzie: EJ – sztywność belki na zginanie,
 S - oznacza impuls siły,
 m – masa belki na jednostkę długości,
 m_0 – masa współdrżającego podłoża na jednostkę długości.

Warunki brzegowe w przypadku analizowanej belki są następujące:

$$\begin{aligned} w(x,t)|_{x=0} &= 0, & w(x,t)|_{x=l} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Rozwiązanie równania (5) zakładamy w postaci funkcji odpowiadającej n -tej postaci drgań własnych i spełniającej warunki brzegowe (6)

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_n x, \quad (7)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Prawa strona równania może być zapisana w następujący sposób:

$$q(x,t) = S \delta(x - x_0, t - t_0) = S \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \quad (8)$$

Delta-funkcję Diraca rozłożymy w pojedynczy rozbieżny szereg sinusowy Fouriera

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (9)$$

Stosując do rozwiązania zadania metodę rozdzielonych zmiennych Fouriera otrzymujemy liniowe niejednorodne równanie różniczkowe na wyznaczenie nieznanych funkcji $f_n(t)$

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = \frac{2S}{(m + m_0)l} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \delta(t - t_0), \quad (10)$$

gdzie $\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4 EJ + 2c_0 \lambda_n^2 + k_0}{m + m_0} = \frac{n^4 \pi^4 EJ + 2n^2 \pi^2 c_0 l^2 + k_0 l^4}{(m + m_0)l^4}$

jest kwadratem częstości kołowej drgań własnych belki na inercyjnym podłożu sprężystym Własowa o współczynnikach podłoża równym k_0 , c_0 i m_0 .

Wprowadzając zastępczy współczynnik podłoża ξ_n i częstość belki bez podłoża ω_{0n} , mamy:

$$\xi_n = \sqrt{1 + \frac{2c_0 \lambda_n^2 + k_0}{m + m_0}} = \sqrt{1 + \frac{2n^2 \pi^2 c_0 + k_0 l^2}{(m + m_0) l^2}}, \quad (11)$$

$$\omega_{0n} = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{m + m_0}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m + m_0}}.$$

Częstość kołową belki zatem możemy zapisać w następujący sposób:

$$\omega_n = \omega_{0n} \sqrt{1 + \frac{2c_0 \lambda_n^2 + k_0}{\omega_{0n}^2 (m + m_0)}} = \omega_{0n} \sqrt{1 + \frac{2n^2 \pi^2 c_0 + k_0 l^2}{\omega_{0n}^2 (m + m_0) l^2}} = \xi_n \omega_{0n}. \quad (12)$$

Rozwiązaniem analitycznym równania (10) jest funkcja:

$$f_n(t) = [H(t - t_0) - H(-t_0)] \times \frac{2S}{(m + m_0) l \omega_n} \sin \frac{n \pi x_0}{l} \sin \omega_n (t - t_0), \quad (13)$$

gdzie $H(t - t_0)$ jest funkcją Heaviside'a.

Po wstawieniu (13) do (7) otrzymujemy ostateczne rozwiązanie zadania:

$$w(x, t) = H(t - t_0) \frac{2S}{(m + m_0) l} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{n \pi x_0}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \omega_n (t - t_0). \quad (14)$$

Na podstawie uzyskanego rozwiązania analitycznego zadania (14) wykonano przykład obliczeniowy. Do tego celu posłużono się pakietem Mathematica.

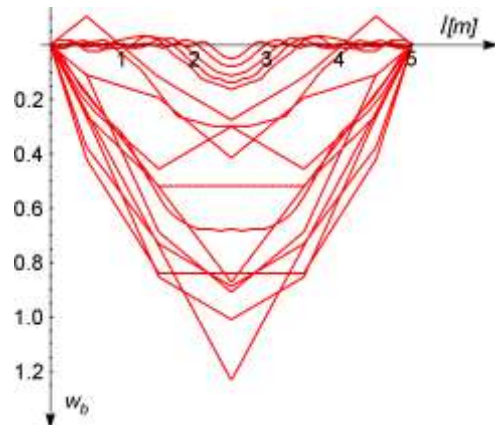
3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przebadano ugięcia belki Bernoulliego-Eulera przegubowo podpartej na końcach, na którą podziałano impulsem w różnych odległościach od lewej podpory (w 1/4, 1/3 i w 1/2 rozpiętości przęsła). Na rysunkach przedstawiono przykładowe wykresy ugięć punktu środkowego przęsła oraz wykresy odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001 T_1$ do $0,25 T_1$, gdzie $T_1 = 2\pi/\omega_1$ oznacza pierwszy, podstawowy okres drgań własnych belki. W obliczeniach uwzględniono 111 wyrazów szeregu. Wykresy przedstawiono w postaci bezwymiarowej zgodnie z następującym wzorem:

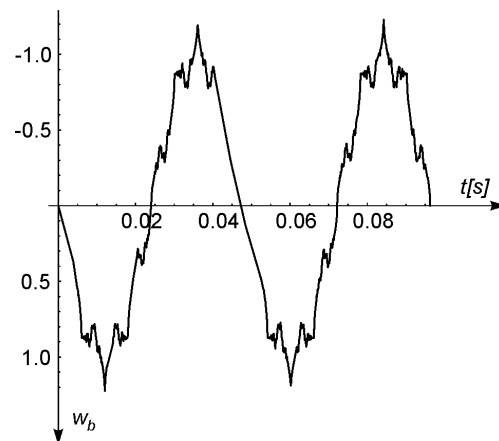
$$w_b(x, t) = w(x, t) \frac{\pi^2 \sqrt{m EJ}}{2 S l}. \quad (15)$$

W przykładzie przyjęto następujące własności geometryczne i mechaniczne: długość przęsła belki $l = 5$ m, wymiary prostokątnego przekroju poprzecznego $b \times h = 0,25 \times 0,47$ m, masa belki $m = 282$ kg/m, moduł Younga materiału belki $E = 34$ GPa. Przebadano wpływ parametrów k_0 i c_0 oraz bezwładności podłoża

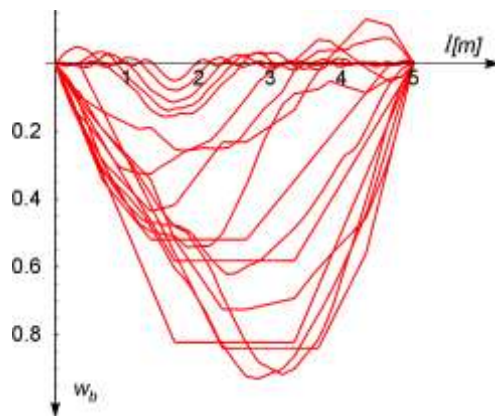
m_0 na ugięcia belki. Współczynniki opisujące podłoże Własowa przyjęto według [19]. Obliczenia przeprowadzono przy założeniu obciążenia jednostkowym impulsem siły.



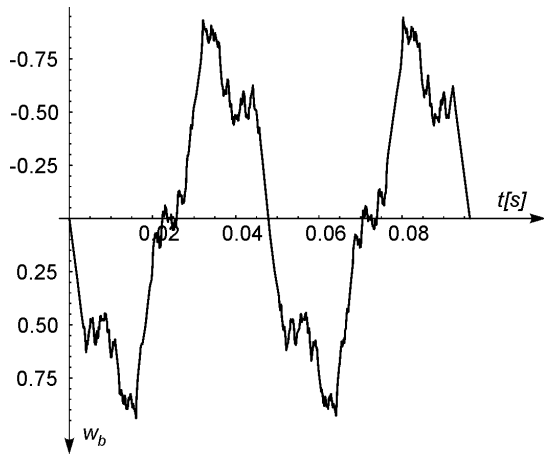
Rys. 2. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001 T_1$ do $0,25 T_1$, przy obciążeniu impulsem w środku rozpiętości belki i współczynnikach podłoża równych zero. Widoczna trójkątna postać odkształcenia belki w chwili $t = \frac{1}{4} T_1$



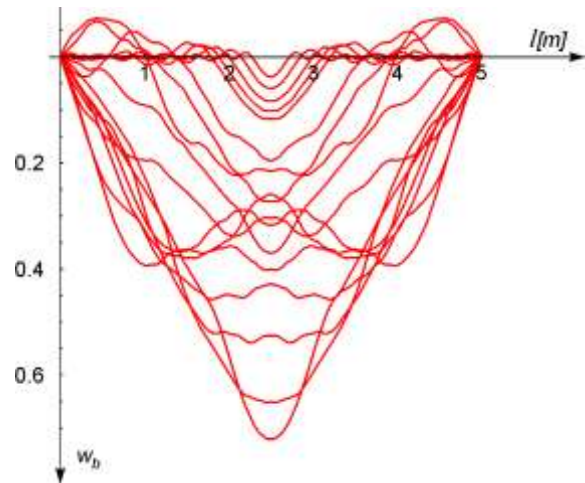
Rys. 3. Wykres ugięcia punktu w środku rozpiętości belki w czasie, przy współczynnikach podłoża równych zero, obciążenie przyłożone w środku belki



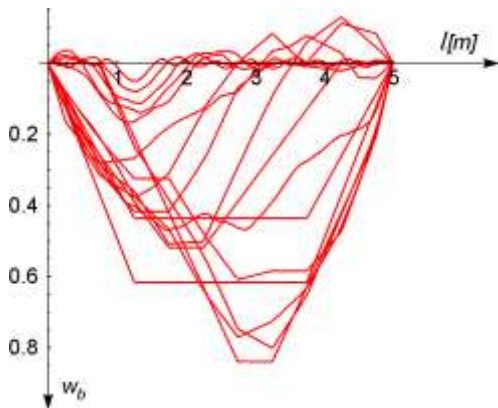
Rys. 4. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001 T_1$ do $0,25 T_1$, przy obciążeniu impulsem w $\frac{1}{3}$ rozpiętości belki od lewej podpory i współczynnikach podłoża równych zero



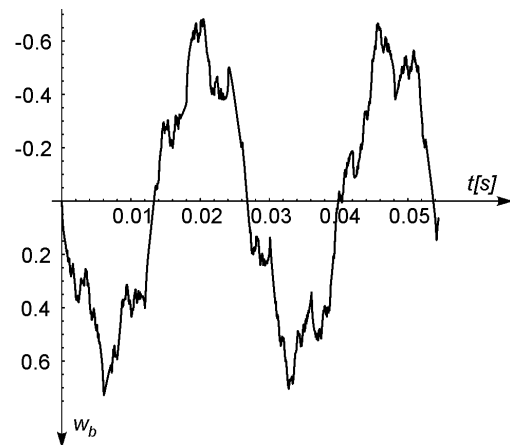
Rys. 5. Wykres ugięcia środka belki w czasie, przy współczynnikach podłoża równych zeru, obciążenie przyłożone w $\frac{1}{3}$ rozpiętości belki od lewej podpory



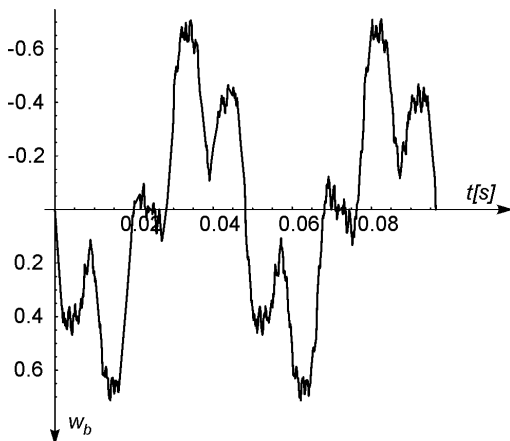
Rys. 8. Postacie odkształconej dynamicznie osi belki spoczywającej na warstwie Własowa przy obciążeniu impulsem w środku rozpiętości przęsła



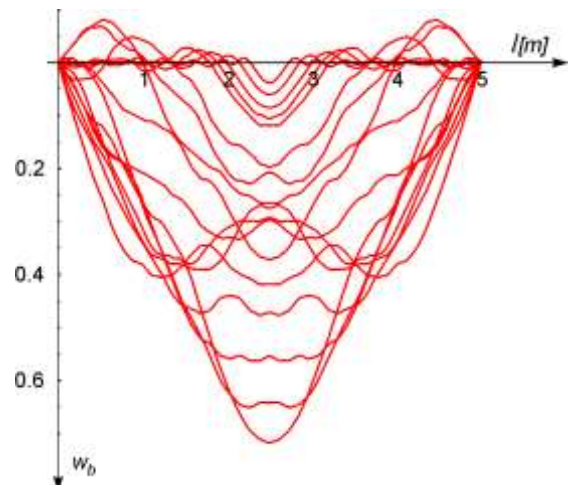
Rys. 6. Postacie odkształconej dynamicznie belki w chwilach od $0,001 T_1$ do $0,25 T_1$, przy obciążeniu impulsem w $\frac{1}{4}$ rozpiętości belki od lewej podpory i współczynnikach podłoża równych zeru



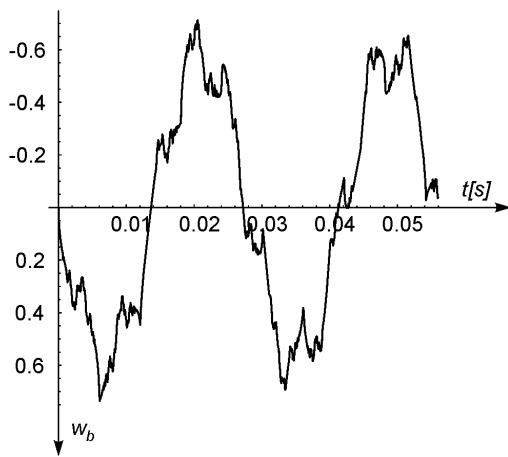
Rys. 9. Wykres ugięcia środka belki na podłożu Własowa w czasie przy obciążeniu impulsem w środku rozpiętości przęsła



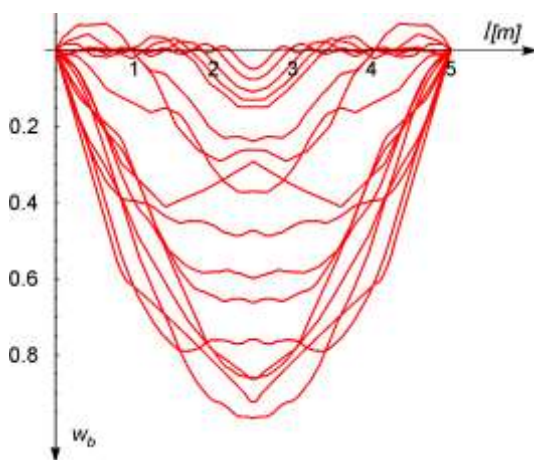
Rys. 7. Wykres ugięcia środka belki w czasie, przy współczynnikach podłoża równych zeru, obciążenie przyłożone w $\frac{1}{4}$ rozpiętości belki od lewej podpory



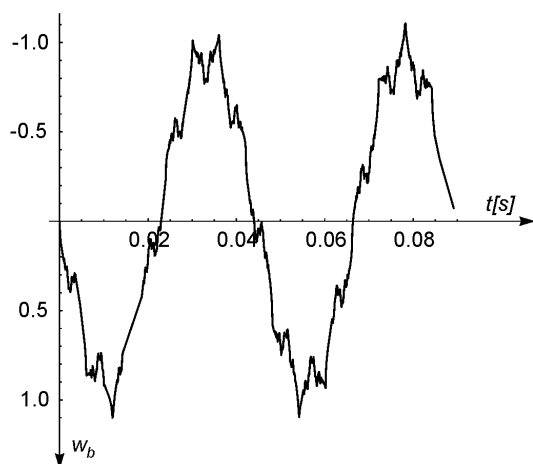
Rys. 10. Postacie odkształconej dynamicznie osi belki na podłożu Własowa obciążonej impulsem siły w połowie rozpiętości przęsła przy współczynniku ścinania równym zeru



Rys. 11. Wykres ugięcia środka belki w czasie, impuls siły przyłożony w środku belki na podłożu Własowa przy współczynniku ścinania równym zero



Rys. 12. Postacie odkształconej dynamicznie osi belki na podłożu Własowa przy współczynniku sprężystości równym zero, obciążonej impulsem siły w połowie rozpiętości przęsła



Rys. 13. Wykres ugięcia środka belki w czasie, impuls siły przyłożony w środku belki na podłożu Własowa przy współczynniku sprężystości równym zero

PODSUMOWANIE

Na podstawie przedstawionej analizy można określić jakościowy i ilościowy wpływ podłoża sprężystego Własowa na charakter

ugięć, odkształceń i naprężeń w belce. Rozwiązanie zadania mają charakter falowy, pomimo, że równanie ruchu nie jest hiperboliczne, a jest paraboliczne. Jak łatwo wykazać uzyskane rozwiązanie opisuje dość wolno zbieżny szereg typu $\sum \frac{1}{n^2}$. Charakter wykresu ugięć

belki silnie zależy od miejsca przyłożenia impulsu.

Ugięcia belki spoczywającej na podłożu są mniejsze niż ugięcia belki bez uwzględnienia warstwy Własowa. Wszystkie współczynniki charakteryzujące podłoże Własowa (współczynnik sprężystości, współczynnik ścinania, jak i inercja podłoża) mają wpływ na wielkość ugięć belki. W przypadku belki na podłożu drgania są złagodzone w stosunku do belki, która nie spoczywa warstwie Własowa. Mając wyznaczone ugięcia można sporządzić również wykresy sił wewnętrznych w belce.

BIBLIOGRAFIA

1. Szcześniak W., Ataman M., Selected problems of the classic theory of impact, *Logistyka* 6/2010, pp. 3305-3310.
2. Kozyra Z., Drgania belek i płyt wywołane uderzeniami, OWPW, Warszawa 2010.
3. Kozyra Z., Szcześniak W., Drgania niejednorodnej belki Timoshenki pod obciążeniem impulsowym, Konferencja „Komputerowe systemy wspomagania prac w nauce, przemyśle i transporcie”, Zakopane 8-10 grudnia 1999 r., str. 383-390.
4. Kozyra Z., Szcześniak W., Obciążenie impulsowe belek niejednorodnych, VII Polish-Ukrainian Seminar „Theoretical Foundations of Civil Engineering”, Dniepropietrowsk-Warszawa, 1999, 300-307.
5. Szcześniak W., Ataman M., Kozyra Z., O uderzeniu plastycznym układu czterech prętów przegubowych w sztywne podłoże, *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Vol. 12, t. 1, 2004, pp. 399-408.
6. Szcześniak W., Ataman M., O zderzeniach układów kul pomiędzy sobą i podłożem, *Theoretical Foundations of Civil Engineering* vol. 13, 2005, pp. 601-610.
7. Szcześniak W., Ataman M., Particular cases of problems of the classic theory of impact, *Logistyka* Nr 6/2010, pp. 3311-3318.
8. Ataman M., Szcześniak W., Płaskie struktury przegubowe obciążone impulsem siły, *Autobusy* 3/2013, str. 1457-1464.
9. Ataman M., Szcześniak W., Belka Eulera na podłożu sprężystym Winklera obciążona impulsem siły, *Logistyka* 3/2014 str. 114-121.
10. Ataman M., Szcześniak W., Ugięcia płyty Kirchhoffa spoczywającej na podłożu Winklera spowodowane obciążeniem impulsowym, *Logistyka* 3/2014 str. 122-130.
11. Ataman M., Szcześniak W., Belka Eulera na podłożu sprężystym Winklera obciążona impulsem siły. *Logistyka* 3/2014, str. 114-121.
12. Szcześniak W., Ataman M., Pojedynczy impuls na płycie Kirchhoffa, XVIII Polish-Russian-Slovak Seminar „Theoretical Foundation of Civil Engineering”, OWPW, Warszawa 2009, str. 157-164.
13. Szcześniak W., Ataman M., Grupy impulsów na płycie Kirchhoffa, XVIII Polish-Russian-Slovak Seminar „Theoretical Foundation of Civil Engineering”, OWPW, Warszawa 2009, str. 165-170.
14. Szcześniak W., Obciążenia impulsowe na belkach, 5th Ukrainian-Polish Seminar „Theoretical Foundations of Civil Engineering”, OWPW, Warszawa 1997, str. 377-385.
15. Szcześniak W., Drgania płyty pod wpływem obciążenia impulsowego, 5th Ukrainian-Polish Seminar „Theoretical Founda-

- tions of Civil Engineering”, OWPW, Warszawa 1997 str. 386-392.
16. Власов В.З., Леонтев Н.Н., Балки, плиты и оболочки на упругом основании, Г.И.Ф.М.Л., Москва, 1960.
 17. Ataman M., Drgania belek i płyt poprzecznie niejednorodnych na podłożach odkształcalnych wymuszone obciążeniami ruchomymi, OWPW, Warszawa 2010.
 18. Ataman M., Inercyjne, sprężyste modele podłoża odkształcalnego w zadaniach z mechaniki konstrukcji, Logistyka 6/2014, str. 1515-1522.
 19. Ataman M., Szcześniak W., Modified Vlasov-Leontiev model of elastic foundation, Computer Systems Aided Science and Engineering Work in Transport, Mechanics and Electrical Engineering, Monograph No121, Radom 2008, pp. 7-18.
 20. Jemielita G., Szcześniak W., Sposoby modelowania podłoża, Prace Naukowe PW, Budownictwo z. 120, OWPW, Warszawa, 1993.
 21. Wang Y.H., Tham L.G., Cheung Y.K., Beams and plates on elastic foundations: a review, Prog. Struct. Eng. Matter, 2005, 7, pp.174-182.

Vibration of beam resting on the inertial Vlasov-Leontiev foundation under impulse of force

The paper deals with vibrations of the beam resting on the inertial Vlasov-Leontiev foundation. Inertial model of foundation is defined by three parameters: k_0 , c_0 , and m_0 .

The beam is subjected to the impulse of force. Analytical solution of the problem is presented in the paper. Forced and natural vibrations of the beam are analysed.

Results presented in the figures are obtained by analytical method. Influence of several parameters to the dynamic response of the beam is analysed. Numerical examples are presented in the paper. The MATHEMATICA code was used for numerical calculations. Conclusions and several items of literature are presented in the paper also.

Autorzy:

prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej