

A Modified Mayr-Pentegov Model of the Electric Arc with Dynamically Variable Parameters

Author

Antoni Sawicki

Keywords

electric arc, Mayr-Pentegov model, voltage – current characteristics

Abstract

The need to develop the theory of electric arc modelling with dynamically variable parameters is demonstrated. The Mayr-Pentegov model modification allowed mapping the effect of changes in static and dynamic parameters of the plasma column on the voltage-current characteristics of the arc. As examples, two variants of static voltage-current characteristics with an unspecified and determined ignition voltage value are considered. In simulations of electrical processes in an AC circuit with the modified electric arc model, slow and fast changes in the column length were used. The effect of these changes on the static characteristics parameters was approximated by power functions. The calculations resulted in obtaining dynamic voltage-current characteristics with correct shapes over a wide range of current changes.

DOI: 10.12736/issn.2300-3022.2020201

Received by the editor: 1.10.2020

Received in revised form: 6.11.2020

Accepted: 11.11.2020

Published online: 21.06.2021

1. Introduction

Based on the association of the preliminary assumptions introduced by two electric arc modelling pioneers, Mayr [1] and Pentegov [2], a new universal mathematical model can be obtained [3, 4]. Its properties depend on the plasma column parameters. These parameters, in turn, depend on the effect of various physical factors (temperature, pressure, the flushing gas mass stream, magnetic field intensity, the distance between electrodes, etc.). In the literature [5, 6], the effect of gradual changes in the universal model parameters on the arc's dynamic characteristics was examined. Parameters with constant or quasi-static values correspond to them. However, in some cases of electrotechnological devices and electrical apparatus, changes in the arc parameters may be very quick and usually non-periodic. Taking into account the high rates of these changes allows for a more accurate representation of physical phenomena in the simulations of processes in electrical circuits. Despite the application of periodic current forcing, non-periodic voltage waveforms and the arc's open-loop dynamic voltage-current characteristics are then obtained. At the same time, efforts to represent these phenomena more accurately lead to the increased complexity of the arc's mathematical models. Compared to the linear Mayr and Pentegov models, the new universal model is non-linear. Its approximation capabilities are

much broader than those of the Voronin model [7, 8], which can only accommodate changes in the column length and/or cross-section. A certain convenience in determining the Pentegov and Mayr-Pentegov mathematical model parameters is the use of static voltage-current characteristics. On this basis, the arc column voltage can be determined and used to develop the damping function [4, 9]. A great help in creating different versions of the arc's mathematical model are properly selected variants of:

- 1) functions approximating the effect of changes in the column's physical parameters on the mathematical model parameters [5]
- 2) functions approximating the static voltage-current characteristics [3, 6, 9].

Changes in plasma-creating gas parameters (pressure, flow, temperature) can lead to changes in the arc column length and/or cross-section. Displacement of the electrodes, sliding of the ceramic elements into the inter-electrode area, or the effect of the external transverse magnetic field usually lead to a change in the arc column length.

A full analysis of the arc's mathematical models with different variants of functions approximating changes in selected physical quantities is very laborious, and the results are extensive and characterized by similarity. The author presents two examples of

a modified Mayr-Pentegov model with dynamic changes in the plasma column length.

2. Mapping changes in dynamic parameters in the Mayr-Pentegov model

The proposed arc model with variable parameters uses Mayr's assumption. According to this assumption, a change in the thermal plasma enthalpy Q exponentially affects changes in conductance g

$$\exp\left(\frac{Q(i, p_a)}{Q_p}\right) = \frac{g(i, p_a)}{G_p} \quad (1)$$

In equation (1), the constant Q_p – stands for the subtangent of the curve $g(Q)$, and G_p – the intersection of the curve with the ordinate axis $g(0) = G_p$, i – current, p_a – vector of physical parameters. Its differentiation can produce the equation

$$\frac{dQ(i, p_a)}{Q_p} = \frac{dg(i, p_a)}{g(i, p_a)} \quad (2)$$

which after transformations takes the form

$$g(i, p_a) \frac{dQ(i, p_a)}{dt} = Q_p \frac{dg(i, p_a)}{dt} = Q_p \left[\frac{\partial g(i_\theta, p_a)}{\partial i_\theta^2} \frac{di_\theta^2}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] \quad (3)$$

In further considerations, selected assumptions of the Pentegov model can be used for mathematical mapping of the electric arc column's dynamic characteristics [2, 10]. In the original model, instead of a real arc, a hypothetical arc is considered where the arc column conductance is determined as a function of a fictitious (virtual) state current $i_\theta(t)$, variable with a specific time constant $\theta = \text{const}$. The Pentegov model represents a non-linear two-terminal network, which is energetically balanced, thermally first-order inertial, stationary, and electrically non-inertial.

Figure 1 shows fragments of static and dynamic voltage-current characteristics of the arc. The specific arc resistance corresponds to operating point A' on the dynamic characteristic and point B' on the static characteristic. Changes in the arc resistance correspond to the displacement of the points on the corresponding characteristics to positions A'' and B'' . According to Fig. 1, the straight line passing through points A' and B' corresponds to the resistance

$$\text{tg} \alpha = \frac{u}{i} = \frac{U(i_\theta, p_a)}{i_\theta} = R_{st}(i_\theta, p_a) \quad (4)$$

where: $U(i, p_a)$ – static voltage-current characteristics of the arc. Multiplying both sides of equation (4) by i^2 produces a formula for the electrical power supplied

$$P_e = ui = R_{st}(i_\theta, p_a) i^2 = \frac{U(i_\theta, p_a)}{i_\theta} i^2 \quad (5)$$

Whereas the dissipated electric power is determined by

$$P_\theta = U(i_\theta, p_a) i_\theta \quad (6)$$

Powers P_e and P_θ correspond to the areas of the rectangles shown in Fig. 1.

On the basis of equation (4), the instantaneous column conductance can be formulated as

$$\frac{i}{u} = \frac{i_\theta}{U(i_\theta, p_a)} = g(i_\theta, p_a) \quad (7)$$

From the column power balance equation

$$\frac{dQ(i_\theta, p_a)}{dt} + U(i_\theta, p_a) i_\theta = ui \quad (8)$$

where: dQ/dt – a derivative of the change of the internal energy of plasma, a first-order differential equation is obtained

$$Q_p \left[\frac{\partial g(i_\theta, p_a)}{\partial i_\theta^2} \frac{di_\theta^2}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] + i_\theta^2 = i^2 \quad (9)$$

As can be seen, unlike the Pentegov model, it is non-linear. It can be more conveniently formulated

$$\frac{di_\theta^2}{dt} = \frac{1}{\partial g(i_\theta, p_a)} \left[\frac{i^2 - i_\theta^2}{Q_p} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] \quad (10)$$

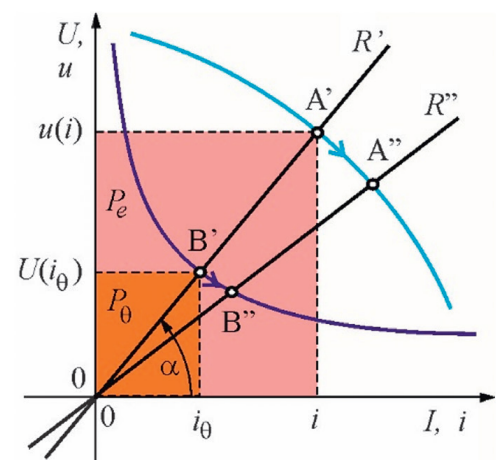


Fig. 1. Fragments of static and dynamic voltage-current characteristics with rectangular areas P_θ and P_e marked (blue line – a fragment of the dynamic characteristics, navy blue line – a fragment of the static characteristics, tangent of inclination of straight lines R' R'' passing through the operating points correspond to the arc resistances)

It should be integrated against time to develop an electric arc macro model using a controlled voltage source

$$i_{\theta}^2 = \int_0^t \frac{1}{\frac{\partial g(i_{\theta}, p_a)}{\partial i_{\theta}^2}} \left[\frac{i^2 - i_{\theta}^2}{Q_p} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_{\theta}, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] d\tau + i_{\theta 0}^2 \quad (11)$$

Due to the better stability of numerical calculations, it is sometimes better to formulate the mathematical model equation in an integral form

$$i_{\theta}^2 = i_{\theta 0}^2 \exp \left\{ \int_0^t \frac{1}{i_{\theta}^2 \frac{\partial g(i_{\theta}, p_a)}{\partial i_{\theta}^2}} \left[\frac{i^2 - i_{\theta}^2}{Q_p} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_{\theta}, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] d\tau \right\} \quad (12)$$

A controlled current source is then used to develop the electric arc macro model.

If the arc parameters are constant or quasi-static, then $dp_{ai}/dt \cong 0$. Then equations (10) and (11) come down to the well-known Mayr-Pentegov model [3]. It can be written as a differential form

$$\theta(i_{\theta}, p_a) \frac{di_{\theta}^2}{dt} + i_{\theta}^2 = i^2 \quad (13)$$

while in the integral form it will be

$$i_{\theta}^2 = i_{\theta 0}^2 \exp \left[\int_0^t \frac{i^2 - i_{\theta}^2}{i_{\theta}^2 \theta(i_{\theta}, p_a)} d\tau \right] \quad (14)$$

where the nonlinear damping function has the form

$$\theta(i_{\theta}, p_a) = Q_p \frac{dg(i_{\theta}, p_a)}{di_{\theta}^2} \quad (15)$$

3. Functions approximating the static characteristics of the electric arc

Due to the non-linearities, various combinations of power, rational, exponential, and other functions are used to approximate the voltage-current characteristics of the arc. [4, 5, 13]. In the cases in question, relatively simple, three-component functions were used. Each of them corresponds to a particular part of the characteristic: decreasing, constant, and increasing. This allows mapping the electrical properties of the arc over a wide range of current variations. The mutual interaction between these components can be reduced by introducing weight functions [15, 16]. However, this leads to a significant complexity of the approximation function, which can make the analytical transformations needed for the Mayr-Pentegov model difficult, and the and complicate the macro model construction.

However, this leads to a significant complexity of the approximation function, which can make the analytical transformations needed for the Mayr-Pentegov model difficult, and the macro model development complicated.

Besides, more numerical computation operations can later extend the duration of computer simulations. Based on the literature [2, 4], various approximation examples may be considered. A rational solution to the problem of choosing an approximating function can be a very frequently used relationship

$$U(I, p) = \frac{P_M}{I} + U_C + R_p I \quad (16)$$

where: p – vector of parameters, of which: P_M – corresponds to the arc power, especially significant in the low-current range, like in the Mayr model; U_C – corresponds to the arc column voltage, like in the Cassie's model; R_p – corresponds to the arc resistance which is important in the high-current range. Function (16) can be used with the assumption of an unspecified ignition voltage. For the needs of the Mayr-Pentegov model [4], the static conductance function is introduced in the form of

$$G(I^2, p) = \frac{I}{U(I, p)} = \frac{I^2}{P_M + U_C I + R_p I^2} = \frac{I^2}{P_M + U_C \sqrt{I^2} + R_p I^2} \quad (17)$$

and its derivative with respect to the square of the current

$$\frac{dG(I^2, p)}{dI^2} = \frac{2P_M + U_C I}{2(P_M + U_C I + R_p I^2)^2} \quad (18)$$

A more extensive variant of the approximation of static voltage-current characteristics takes into account the ignition voltage:

$$U(I, p) = \frac{P_M I}{I^2 + I_M^2} + U_C + R_p I \quad (19)$$

Because usually the ignition current is very small and the resistance is also small R_p , then the last component of the sum (19) can be omitted, and then approximately the coordinates of the extreme point on the static characteristic have values

$$I_g \cong I_M, \quad U_g \cong \frac{P_M}{2I_M} + U_C \quad (20)$$

In fact, ignition occurs with a slightly lower current and a slightly higher voltage.

The static conductivity of the column can be calculated from the formula

$$G(I^2, p_a) = \frac{I(I^2 + I_M^2)}{P_M I + U_C (I^2 + I_M^2) + R_p (I^2 + I_M^2) I} = \frac{\sqrt{I^2 (I^2 + I_M^2)}}{P_M \sqrt{I^2} + U_C (I^2 + I_M^2) + R_p (I^2 + I_M^2) \sqrt{I^2}} \quad (21)$$

Its derivative with respect to the square of the current is given by the relationship

$$\frac{dG}{dI^2} = \frac{2P_M I^3 + U_C (I^2 + I_M^2)^2}{2I(P_M + R_p(I^2 + I_M^2)) + U_C(I^2 + I_M^2)^2} \quad (22)$$

Dependencies (16)–(18) are special cases of formulas (19)–(22) in the state $I_M = 0$ A. However, such a distinction is important because – as mentioned before – it causes differences in the difficulties of creating macro models and differences in the duration of numerical calculations.

We assume that the individual factors (parameters) in functions (16) and (19) depend on the column length l_c in the following way:

$$P_M(l_c) = P_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} \quad (23)$$

$$U_C(l_c) = U_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} \quad (24)$$

$$R_p(l_c) = R_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} \quad (25)$$

where: P_l , U_l , R_l – constant coefficients. Exponents n_{pl} , n_{ul} , and n_{rl} should be greater than zero. Current I_M was not dependent on the arc length, as it was assumed in accordance with (20) that simultaneous changes in P_M and U_C affect the ignition voltage.

With the variable parameter as the column length l_c , then the conductance formula (17) may be re-written as

$$G(I, l_c) = \frac{I^2}{P_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + U_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} + I + R_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} I^2} \quad (26)$$

It corresponds to the derivative of the conductance with respect to the arc length

$$\frac{\partial G(I, l_c)}{\partial l_c} = - \frac{I^2 \left[P_l n_{pl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}-1} + I \left(U_l n_{ul} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}-1} + I R_l n_{rl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}-1} \right) \right]}{l_c \left[P_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + I \left(U_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} + I R_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} \right) \right]^2} \quad (27)$$

Similarly, based on (21), the column conductance depending on its length l_c may be formulated as

$$G(I, l_c) = \frac{I(I^2 + I_M^2)}{P_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + I + U_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} \cdot (I^2 + I_M^2) + R_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} \cdot (I^2 + I_M^2) I} \quad (28)$$

In this case, the derivative of the conductance with respect to the arc length will be much more extensive

$$\frac{\partial G(I, l_c)}{\partial l_c} = - \frac{I(I^2 + I_M^2) \left[I P_l n_{pl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}-1} + U_l n_{ul} (I^2 + I_M^2) \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}-1} + I R_l n_{rl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}-1} (I^2 + I_M^2) \right]}{l_c \left[I P_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + U_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} (I^2 + I_M^2) + I R_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} (I^2 + I_M^2) \right]^2} \quad (29)$$

4. Results of simulation tests

To verify the created model's construction and the performance of the mathematical models and arc macro models developed in a computer program, multiple simulation tests were performed. Earlier, however, a simple electric circuit was configured of a current source generating a current waveform with specified amplitude I_m and frequency f , connected to an arc with controlled length. The macro-model of the element representing the near-electrode voltage drops was inserted in series with the plasma column macro model. Then the arc voltage is determined by

$$u_a = u + U_{AC} \operatorname{sgn}(i) \quad (30)$$

Aggregated drop $U_{AC} = 18$ V is assumed here. Such a simple solution is possible if the differential model (10) is used. If the integral model (12) is used, then the macro model with a current source should be modified accordingly [17]. Problems related to mapping near-electrode voltage drops are usually ignored in the modelling of long, i.e. high-voltage, arcs. After the calculation was initiated, the arc was linearly stretched. This process, after a specified time, was additionally superimposed with a quasi-step length increase. Time course of the length changes can be described as $l_c = 5 \cdot 10^{-3} + 10^{-2} (t + (1 - \exp(-(2t)^{40})))$, m.

As variants of the forcing in electrical circuits, sources of sinusoidal and trapezoidal periodic currents with amplitudes $I_{m1} = 80$ A i $I_{m2} = 160$ A and of two frequencies $f_1 = 25$ Hz and $f_2 = 50$ Hz were used. Trapezoidal and reduced frequency currents are used in welding, e.g. for aluminium welding (TIG method).

Figures 2 and 3 show the characteristics of the stretched arc, described by (11), (10)–(12), (23)–(25), (26), and (27). Figure 2 illustrates the use of a sinusoidal current source with amplitude $I_{m1} = 80$ A and frequency $f = 50$ Hz. Whereas Fig. 3 – shows the use of a sinusoidal forcing with amplitude $I_{m1} = 160$ A and frequency $f = 50$ Hz. In the calculations needed to create these drawings, various parameters of functions approximating the static voltage-current characteristics were used, which in turn affect the changes in the parameters of mathematical models during arc stretching. The following symbols have been adopted in the time course graphs: blue line – arc voltage, red line – arc length.

Figures 4 and 5 show the characteristics of the stretched arc, described by (11), (19)–(21), (23)–(25), (28), and (29). Figure 4 illustrates the use of a sinusoidal current source with amplitude $I_{m1} = 80$ A and frequency $f = 50$ Hz. Whereas Fig. 5 – shows the use

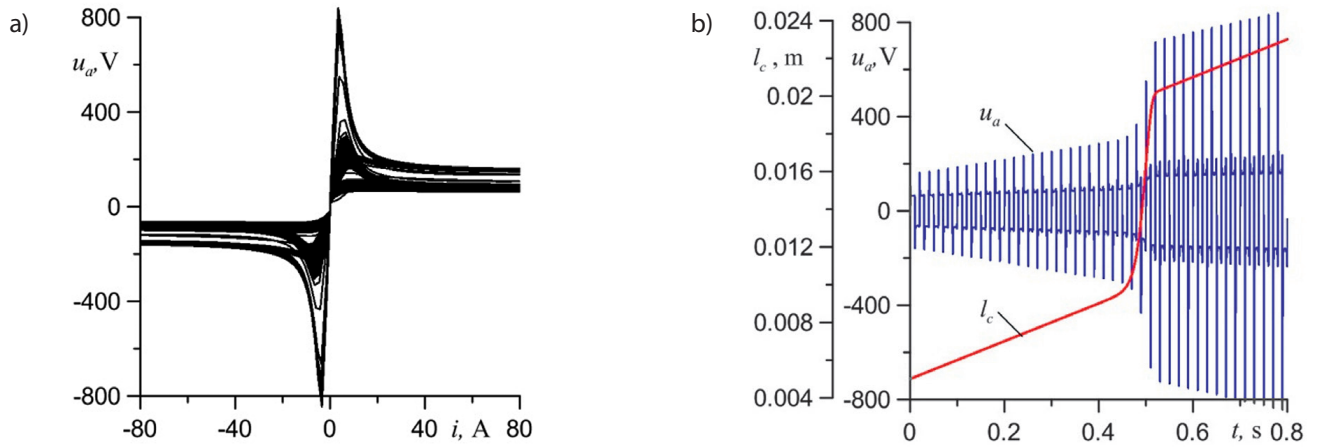


Fig. 2. Dynamic characteristics of the model of a stretched arc with an unspecified ignition voltage ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_i = 100$ W, $n_{pl} = 0.8$, $U_i = 10$ V, $n_{ul} = 0.8$, $R_i = 0.05 \Omega$, $n_{rl} = 0.05$, $Q_p = 0.2$ J): a) voltage-current characteristics; b) waveforms of column length and arc voltage changes

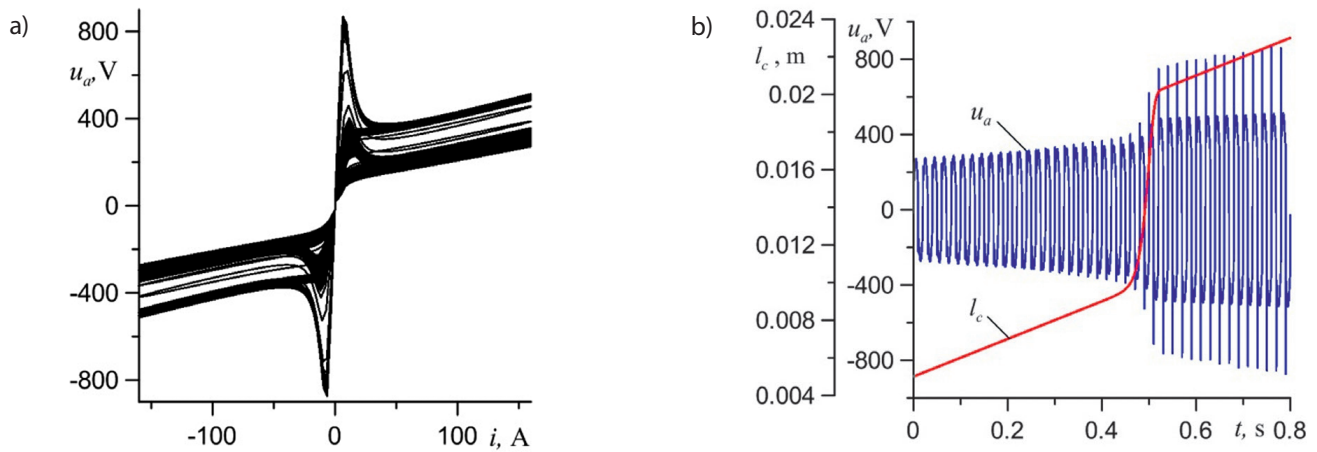


Fig. 3. Dynamic characteristics of the model of a stretched arc with an unspecified ignition voltage $l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_i = 150$ W, $n_{pl} = 0.8$, $U_i = 20$ V, $n_{ul} = 0.8$, $R_i = 0.8 \Omega$, $n_{rl} = 0.2$, $Q_p = 0.2$ J): a) voltage-current characteristics; b) waveforms of column length and arc voltage changes

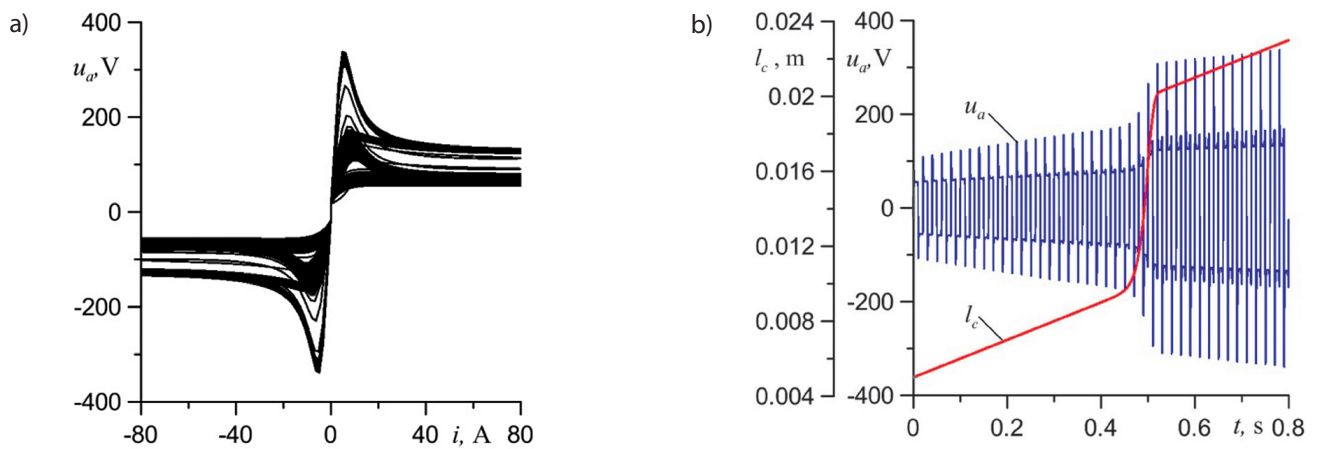


Fig. 4. Dynamic characteristics of the model of a stretched arc with a determined ignition voltage ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_i = 80$ W, $n_{pl} = 0.8$, $U_i = 8$ V, $n_{ul} = 0.8$, $R_i = 0.05 \Omega$, $n_{rl} = 0.1$, $Q_p = 0.2$ J, $I_M = 4$ A): a) voltage-current characteristics; b) waveforms of column length and arc voltage changes

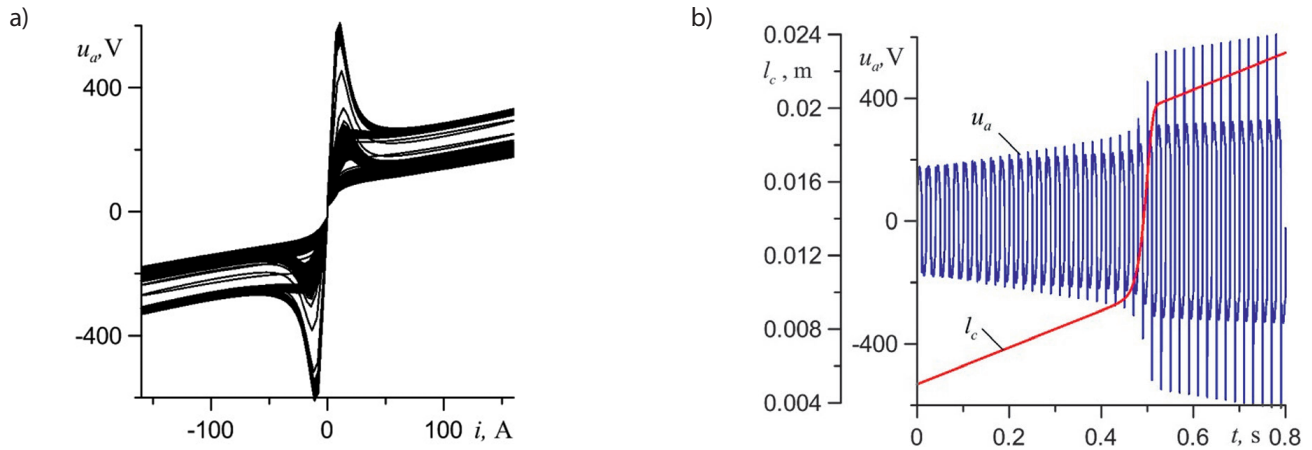


Fig. 5. Dynamic characteristics of the model of a stretched arc with a determined ignition voltage ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_I = 160$ W, $n_{pl} = 0.9$, $U_I = 12$ V, $n_{ul} = 0.8$, $R_I = 0.5 \Omega$, $n_H = 0.2$, $Q_p = 0.6$ J, $I_M = 5$ A): a) voltage-current characteristics; b) waveforms of column length and arc voltage changes

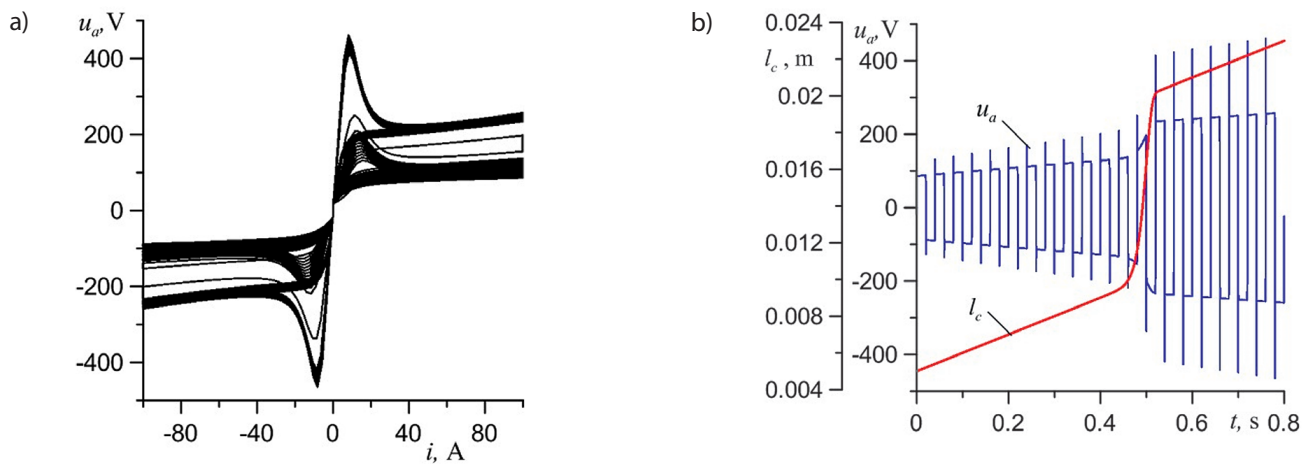


Fig. 6. Dynamic characteristics of the model of a stretched arc with a determined ignition voltage ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_I = 80$ W, $n_{pl} = 0.8$, $U_I = 12$ V, $n_{ul} = 0.8$, $R_I = 0.05 \Omega$, $n_H = 0.9$, $Q_p = 0.08$ J, $I_M = 2$ A): a) voltage-current characteristics; b) waveforms of column length and arc voltage changes

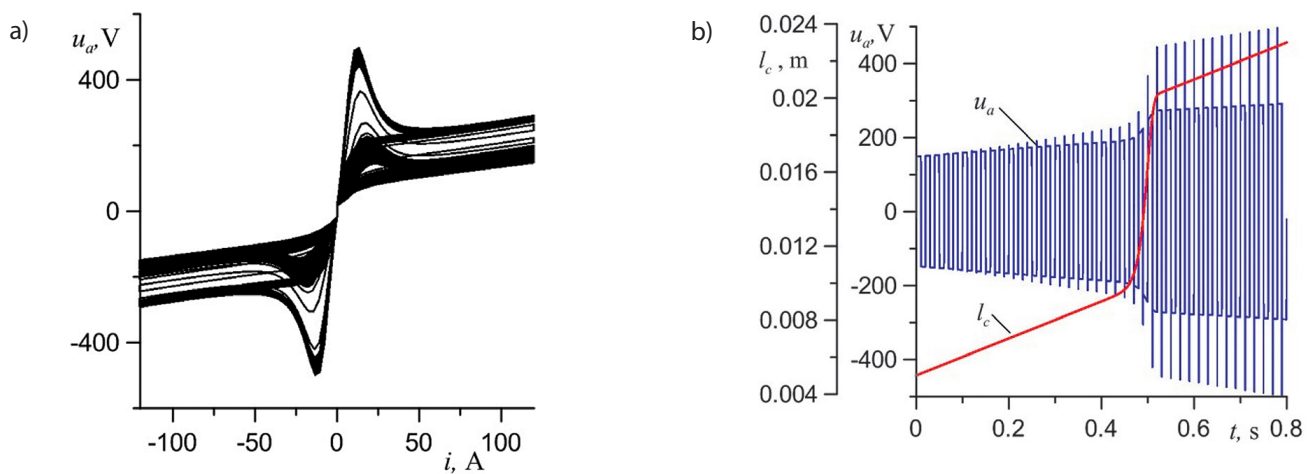


Fig. 7. Dynamic characteristics of the model of a stretched arc with a determined ignition voltage ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_I = 100$ W, $n_{pl} = 0.9$, $U_I = 12$ V, $n_{ul} = 0.8$, $R_I = 0.5 \Omega$, $n_H = 0.2$, $Q_p = 0.08$ J, $I_M = 3$ A): a) voltage-current characteristics; b) waveforms of column length and arc voltage changes

of a sinusoidal forcing with amplitude $I_{m1} = 160$ A and frequency $f = 50$ Hz. As before, in the calculations needed to create these drawings, various parameters of functions approximating the static voltage-current characteristics were used, which in turn affect the changes in the parameters of mathematical models during arc stretching.

Figures 6 and 7 show the characteristics of the stretched arc, described by (11), (19)–(21), (23)–(25), (28), and (29). Fig. 6 shows the use of a trapezoidal current source with amplitude $I_{m1} = 100$ A, rise and fall slope $2 \cdot 10^5$ A/s, and frequency $f = 25$ Hz. Whereas Fig. 7 – shows the use of trapezoidal forcing with amplitude $I_{m1} = 120$ A, rise and fall slope $48 \cdot 10^4$ A/s, and frequency $f = 50$ Hz. As before, in the calculations needed to create these drawings, various parameters of functions approximating the static voltage-current characteristics were used, which in turn affect the changes in the parameters of mathematical models during arc stretching.

The paper presents selected examples of the simulation calculation results. The obtained graphs allow the readers to compare them with the graphs available in the literature [5, 6, 8], which were obtained with the use of the stretched arc models described by the formulas given by Pentegov and Sidorec [10, 18] and by Voronin [7]. This can be the basis for determining the degree of mutual similarity of the dynamic characteristics. The author's further research will aim to demonstrate the high suitability of the modified Mayra–Pentegov model of the electric arc for the mapping of physical arcs with dynamically variable parameters.

5. Conclusions

1. The modification of the Mayr–Pentegov universal mathematical model allows taking into account the effect of dynamic changes in the parameters of physical disturbances on the shapes of the dynamic voltage-current characteristics of the arc.
2. The modified Mayr–Pentegov mathematical model allows the use of any static voltage-current characteristics, and therefore the representation of the electrical properties of such variants of the physically disrupted arcs that occur in industrial devices.
3. The introduction of the disturbed in time parameters at the initial stage of developing the mathematical model of the arc warrants that the energy balance equation will be met at each subsequent stage of using the model.

REFERENCES

1. Mayr O., Über die theorie der lichtbogen und seiner loschung [Theory of the Arc and its Quenching], *Elektrotechnische Zeitschrift*, Vol. 64, 1943, pp. 645–652.
2. Пентегов И.В., Математическая модель столба динамической электрической дуги, *Автоматическая сварка* 1976, No. 6 (279), pp. 8–12 [Pentegov I.V., A Mathematical Model of a Column of a Dynamic Electric Arc., *Automatic welding*, No. 6 (279), 1976, pp. 8–12].
3. Sawicki A., The Universal Mayr–Pentegov Model of the Electric Arc, *Przegląd Elektrotechniczny [Electrical Review]*, Vol. 94, No. 12, 2019, pp. 208–211 (DOI:10.15199/48.2019.12.47).
4. Sawicki A., Model Mayra–Pentegowa łuku elektrycznego z wybranymi charakterystykami napięciowo-prądowymi statycznymi [Mayr–Pentegov Model of the Electric Arc with Selected Static Voltage-Current Characteristics], *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa*, No. 3, 2020, pp. 44–50.
5. Sawicki A., Modelowanie wpływu zaburzeń zewnętrznych charakterystyk statycznych o nieokreślonym i określonym napięciu zapłonu na charakterystyki dynamiczne łuku w obwodzie ze źródłem prądu [Modelling the Effect of External Disturbances in Static Characteristics of Unspecified and Determined Ignition Voltages on Dynamic Characteristics of Arc in a Circuit with the Current Source]. Cz. 1. Podstawowe zależności analityczne [Part 1. Primary Analytical Correlations], *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa*, No. 2, 2019, pp. 46–51 (DOI: 10.17729/ebis.2019.2/6)].
6. Sawicki A., Modelowanie wpływu zaburzeń zewnętrznych charakterystyk statycznych o nieokreślonym i określonym napięciu zapłonu na charakterystyki dynamiczne łuku w obwodzie ze źródłem prądu [Modelling the Effect of External Disturbances in Static Characteristics of Unspecified and Determined Ignition Voltages on Dynamic Characteristics of Arc in a Circuit with the Current Source]. Cz. 2. Wyniki badań symulacyjnych [Simulation Test Results], *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa*, No. 3, 2019, pp. 38–40, 2 (DOI: 10.17729/ebis.2019.3/8)].
7. Воронин А.А., Повышение эффективности контактно-дугогасительных систем сильноточных коммутационных аппаратов с удлиняющейся дугой, Автореф. дис. к.т.н., Самара 2009 [Voronin A.A., Improving the efficiency of contact-extinguishing systems of high-current switching devices with an extending arc, Abstract of thesis, Samara 2009].
8. Sawicki A., Improvements of Hybrid Models of the Electric Arc of Variable Geometrical Parameters, 2018 Conference on Electrotechnology: Processes, Models, Control and Computer Science (EPMCCS), IEEE Xplore Digital Library (DOI: 10.1109/EPMCCS.2018.8596459).
9. Sawicki A., Modele matematyczne różniczkowe i całkowite w makromodelowaniu łuku elektrycznego z wykorzystaniem źródeł sterowanych napięciowych i prądowych [Mathematical Differential and Integral Models in Macromodelling of the Electric Arc Using Controlled Voltage and Current Sources. Cz. 2. Wybrane modele matematyczne łuku z jawnie zdefiniowanymi charakterystykami napięciowo-prądowymi statycznymi [Part 2. Selected Mathematical Models of the Arc with Explicitly Defined Static Voltage-Current Characteristics] *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa*, No. 1, 2020, pp. 21–25.
10. Пентегов И.В., Сидорец В.Н., Сравнительный анализ моделей динамической сварочной дуги, *Автомат. Сварка*, 1989, No. 2 (431), pp. 33–36 [Pentegov I.V. and Sydorets V.N.: Comparative Analysis of Models of the Dynamic Welding Arc, *The Paton Welding Journal*, No. 12, 2015, pp. 45–48 (in Russian)].

11. Janowski T., Jaroszyński L., Stryczewska H.D., Modification of the Mayr's electric arc model for gliding arc analysis, XXVI International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Nagoya, Japan 2001/7/17, pp. 341–342.
12. Jaroszyński L., Stryczewska H.D., Computer simulation of the electric discharge in glidarc plasma reactor, Conference: 3rd International Conference: Electromagnetic devices and processes in environment protection, ELMECO-3, June 2000.
13. Marciniak L., Implementacje modeli łuku ziemnozwarciowego w programach PSCAD i Matlab/Simulink [Implementation of the Earth Fault Arc Models in PSCAD and Matlab / Simulink], *Przełqd Elektrotechniczny*, No. 9a, 2012, pp. 126–129.
14. Marciniak L., Model of the Arc Earth-Fault for Medium Voltage Networks, *Central European Journal of Engineering*, No. 2, 2011, pp. 168–173.
15. Marciniak L., Modele dynamiczne łuku zwarciowego dla sieci z małym prądem zwarcia doziemnego [Dynamic Models of the Short-Circuit Arc for Grids with a Small Earth Fault Current], *Archives of Energetics*, XXXVII, 2007, pp. 357–367.
16. Sawicki A., Haltof. M., Modelowanie wpływu zaburzeń zewnętrznych na charakterystyki dynamiczne łuku elektrycznego [Modelling the Effect of External Disturbances on Dynamic Characteristics of the Electric Arc], *Przełqd Elektrotechniczny*, Vol. 92, No. 12, 2016, pp. 161–164 (DOI:10.15199/48.2016.12.41).
17. Верещаго Е.Н., Костюченко В.И., Имитационная модель электрической дуги, *Электротехника* 2014, No. 6, pp. 36–42 [Vereshchago E.N., Kostyuchenko V.I.: Simulation Model of the Electric Arc, *Russian Electrical Engineering*, Vol. 85, No. 6, 2014, pp. 376–381 (in Russian)] (DOI: 10.3103/S106837121406011X).
18. Пентегов И.В., Сидорец В.Н., Вопросы моделирования динамики сварочной дуги как элемента электрической цепи, *Автомат. Сварка*, No. 10 (379), 1984, pp. 18–22 [Pentegov I.V. and Sydorets V.N., Questions of modelling the dynamics of the welding arc as an element of the electrical circuit, *The Paton Welding Journal*, No. 12, 2015, pp. 18–22 (in Russian)].

Antoni Sawicki

Association of Polish Electricians, Częstochowa Branch

e-mail: sawicki.a7@gmail.com

Graduated from the Faculty of Electrical Engineering at Częstochowa University of Technology (1977). He defended his doctoral thesis at the Moscow Power Engineering Institute (1988). At the same institute, he defended his habilitation thesis (2000). Author and co-author of more than 300 scientific publications, including 7 monographs and 2 textbooks. Has participated in more than 50 national and international conferences. Author of 17 patents. He was the manager and executor of five scientific grants. Member of the Presidium of the Polish Committee of Electrotechnology. Corresponding member of the Russian Academy of Electrical Sciences (2012–2015), currently its full member. He worked at the Częstochowa University of Technology for 42 years. He was the head of a unit, director of an institute, head of a department. He also promoted one doctor of engineering. His scientific achievements include publications in the field of dynamics of nonlinear systems and the theory of arc and plasma heating.

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 6–13. When referring to the article please refer to the original text.

PL

Zmodyfikowany model Mayra–Pentegowa łuku elektrycznego z dynamicznie zmiennymi parametrami

Autor

Antoni Sawicki

Słowa kluczowe

łuk elektryczny, model Mayra–Pentegowa, charakterystyka napięciowo-prądowa

Streszczenie

Wskazano na potrzebę rozwijania teorii modelowania łuków elektrycznych z dynamicznie zmiennymi parametrami. Zmodyfikowanie modelu Mayra–Pentegowa pozwoliło odwzorować wpływ zmian statycznych i dynamicznych parametrów kolumny plazmowej na charakterystyki napięciowo-prądowe łuku. Jako przykłady rozpatrzono dwa warianty charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych z nieokreśloną i określoną wartością napięcia zapłonu. W symulacjach procesów elektrycznych w obwodzie prądu przemiennego ze zmodyfikowanym modelem łuku elektrycznego zastosowano powolne i szybkie zmiany długości kolumny. Wpływ tych zmian na parametry charakterystyk statycznych aproksymowano funkcjami potęgowymi. Jako wyniki obliczeń otrzymano charakterystyki napięciowo-prądowe dynamiczne o prawidłowych kształtach w szerokim zakresie zmian natężenia prądu.

Data wpływu do redakcji: 1.10.2020

Data wpływu do redakcji po recenzjach: 6.11.2020

Data akceptacji artykułu: 11.11.2019

Data publikacji online: 21.06.2021

1. Wstęp

Na podstawie skojarzenia założeń wstępnych, wprowadzonych przez dwóch pionierów modelowania łuku elektrycznego: Mayra [1] i Pentegowa [2], można otrzymać nowy uniwersalny model matematyczny [3, 4]. Jego właściwości zależą od wartości parametrów kolumny plazmowej. Z kolei te parametry zależą od działania na nią różnych czynników fizycznych (temperatury, ciśnienia, strumienia masy omywającego gazu, natężenia pola magnetycznego, odległości między elektrodami i in.). W publikacjach [5, 6] rozpatrzono wpływ stopniowych zmian parametrów modelu uniwersalnego na charakterystyki dynamiczne łuku. Odpowiadają im parametry o wartościach stałych lub quasi-statycznie zmiennych. Jednak w niektórych przypadkach pracy urządzeń elektrotechnologicznych i aparatów elektrycznych zmiany parametrów łuku mogą przebiegać bardzo szybko i najczęściej nieokresowo. Uwzględnienie dużych szybkości tych zmian umożliwia dokładniejsze odwzorowanie zjawisk fizycznych w wykonywanych symulacjach procesów w obwodach elektrycznych. Pomimo zastosowania okresowego wymuszenia prądowego uzyskiwane są wtedy nieokresowe przebiegi czasowe

napięcia i niezamknięte pętle charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych łuku. Jednocześnie starania o dokładniejsze odwzorowanie tych zjawisk prowadzą do wzrostu złożoności modeli matematycznych łuku. W porównaniu z liniowymi modelami Mayra i Pentegowa nowy model uniwersalny jest nieliniowy. Jego możliwości aproksymacyjne są znacznie szersze niż modelu Woronina [7, 8], w którym można uwzględnić tylko zmiany długości i/lub przekroju poprzecznego kolumny. Pewnym ułatwieniem w wyznaczaniu parametrów modeli matematycznych Pentegowa i Mayra–Pentegowa jest wykorzystanie charakterystyki napięciowo-prądowej statycznej. Na jej podstawie można wyznaczać napięcie na kolumnie łuku i można ją zastosować do utworzenia funkcji tłumienia [4, 9]. Dużą pomocą w tworzeniu różnych wersji modelu matematycznego łuku są rozpatrzone w literaturze odpowiednie dobrane warianty:

- 1) funkcji aproksymujących wpływ zmian parametrów fizycznych kolumny na parametry modeli matematycznych [5]
- 2) funkcji aproksymujących charakterystyki napięciowo-prądowe statyczne [3, 6, 9].

Zmiany parametrów gazu plazmotwórczego (ciśnienia, prędkości przepływu, temperatury) mogą prowadzić do zmian długości lub przekroju poprzecznego kolumny łukowej. Przesunięcia elektrod, wsuwane elementy ceramiczne w obszar międzyelektrodowy lub działania zewnętrznego poprzecznego pola magnetycznego zwykle prowadzą do zmiany długości kolumny łuku. Pełne przeanalizowanie modeli matematycznych łuku z różnymi wariantami funkcji aproksymujących zmiany wybranych wielkości fizycznych jest bardzo pracochłonne, a otrzymane wyniki są obszerne i charakteryzują się podobieństwem. Autor przedstawia dwa przykłady zmodyfikowanego modelu Mayra–Pentegowa z dynamicznymi zmianami długości kolumny plazmowej.

2. Odwzorowanie zmian dynamicznych parametrów w modelu Mayra–Pentegowa

Proponowany model łuku ze zmiennymi parametrami korzysta z założenia Mayra. Według tego założenia zmiana entalpii plazmy termicznej Q wpływa w sposób wykładniczy na zmiany konduktancji g

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 6–13. When referring to the article please refer to the original text.

PL

$$\exp\left(\frac{Q(i, p_a)}{Q_p}\right) = \frac{g(i, p_a)}{G_p} \quad (1)$$

W zależności (1) stała Q_p – oznacza podstyczną wykresu funkcji $g(Q)$, a G_p – punkt przecięcia wykresu z osią rzędnych $g(0) = G_p$, i – natężenie prądu, p_a – wektor parametrów fizycznych. Stąd po zróżniczkowaniu można otrzymać zależność

$$\frac{dQ(i, p_a)}{Q_p} = \frac{dg(i, p_a)}{g(i, p_a)} \quad (2)$$

która po przekształceniach przyjmuje postać

$$\begin{aligned} g(i, p_a) \frac{dQ(i, p_a)}{dt} &= Q_p \frac{dg(i, p_a)}{dt} = \\ &= Q_p \left[\frac{\partial g(i_\theta, p_a)}{\partial i_\theta^2} \frac{di_\theta^2}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

W dalszych rozważaniach do matematycznego odwzorowania charakterystyk dynamicznych kolumny łuku elektrycznego można wykorzystać wybrane założenia modelu Pentegowa [2, 10]. W oryginalnym modelu zamiast rzeczywistego łuku rozpatruje się taki łuk hipotetyczny, w którym konduktancję kolumny łuku określa się jako funkcję fikcyjnego (wirtualnego) prądu stanu $i_\theta(t)$, zmieniającego się z określoną stałą czasową $\theta = \text{const}$. Model Pentegowa odwzorowuje nieliniowy dwójnik, który jest: energetycznie zbilansowany, cieplnie inercyjny I rzędu, stacjonarny i elektrycznie bezinercyjny.

Na rys. 1 przedstawiono fragmenty charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych i dynamicznych łuku. Konkretniej rezystancji łuku odpowiada punkt pracy A' na charakterystyce dynamicznej i punkt B' na charakterystyce statycznej. Zmianom rezystancji łuku odpowiadają przesunięcia punktów na odpowiednich charakterystykach do pozycji A'' i B'' . Zgodnie z rys. 1 prostej przechodzącej przez punkty A' i B' odpowiada rezystancja

$$tg\alpha = \frac{u}{i} = \frac{U(i_\theta, p_a)}{i_\theta} = R_{st}(i_\theta, p_a) \quad (4)$$

gdzie: $U(I, p_a)$ – charakterystyka napięciowo-prądowa statyczna łuku. Po pomnożeniu obu stron równania (4) przez i^2 otrzymujemy wzór na moc elektryczną dostarczoną

$$P_e = ui = R_{st}(i_\theta, p_a) i^2 = \frac{U(i_\theta, p_a)}{i_\theta} i^2 \quad (5)$$

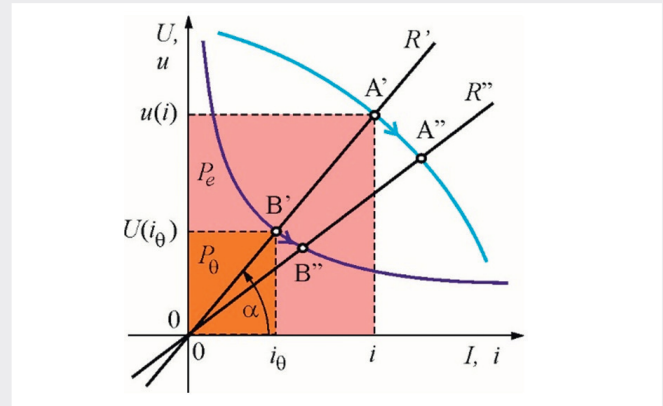
Natomiast moc elektryczną rozproszoną określa zależność

$$P_\theta = U(i_\theta, p_a) i_\theta \quad (6)$$

Mocom P_e i P_θ odpowiadają pola powierzchni prostokątów pokazane na rys. 1.

Na podstawie zależności (4) można napisać wzór na konduktancję chwilową kolumny

$$\frac{i}{u} = \frac{i_\theta}{U(i_\theta, p_a)} = g(i_\theta, p_a) \quad (7)$$



Rys. 1. Fragmenty charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych i dynamicznych z zaznaczonymi obszarami prostokątnymi P i P_e (linia niebieska – fragment charakterystyki dynamicznej, linia granatowa – fragment charakterystyki statycznej, tangensy nachylenia prostych R' i R'' , przechodzących przez punkty robocze, odpowiadają wartościom rezystancji łuku)

Wychodząc z równania bilansu mocy w kolumnie

$$\frac{dQ(i_\theta, p_a)}{dt} + U(i_\theta, p_a) i_\theta = ui \quad (8)$$

gdzie: dQ/dt – pochodna zmiany energii wewnętrznej plazmy, otrzymuje się równanie różniczkowe I rzędu

$$Q_p \left[\frac{\partial g(i_\theta, p_a)}{\partial i_\theta^2} \frac{di_\theta^2}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] + i_\theta^2 = i^2 \quad (9)$$

Jak widać, w odróżnieniu od modelu Pentegowa, jest ono nieliniowe. Można je zapisać w wygodniejszej postaci

$$\frac{di_\theta^2}{dt} = \frac{1}{\frac{\partial g(i_\theta, p_a)}{\partial i_\theta^2}} \left[\frac{i^2 - i_\theta^2}{Q_p} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] \quad (10)$$

Należy je scałkować względem czasu, aby utworzyć makromodel łuku elektrycznego z wykorzystaniem sterowanego źródła napięcia

$$i_\theta^2 = \int_0^t \frac{1}{\frac{\partial g(i_\theta, p_a)}{\partial i_\theta^2}} \left[\frac{i^2 - i_\theta^2}{Q_p} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] d\tau + i_{\theta 0}^2 \quad (11)$$

Ze względu na lepszą stabilność obliczeń numerycznych niekiedy korzystniej jest zapisać równanie modelu matematycznego w postaci całkowej

$$i_\theta^2 = i_{\theta 0}^2 \exp \left\{ \int_0^t \frac{1}{\frac{\partial g(i_\theta, p_a)}{\partial i_\theta^2}} \left[\frac{i^2 - i_\theta^2}{Q_p} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(i_\theta, p_{ai})}{\partial p_{ai}} \frac{dp_{ai}}{dt} \right] d\tau \right\} \quad (12)$$

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 6–13. When referring to the article please refer to the original text.

PL

Wtedy do utworzenia makromodelu łuku elektrycznego wykorzystuje się sterowane źródło prądowe.

Jeśli parametry łuku są stałe lub ich zmiana zachodzi quasi-stacycznie, to $dp_{ai}/dt \cong 0$. Wtedy równania (10) i (11) sprowadzają się do znanego modelu Mayra–Pentegowa [3]. Można go zapisać w postaci różniczkowej

$$\theta(i_{\theta}, p_a) \frac{di_{\theta}^2}{dt} + i_{\theta}^2 = i^2 \quad (13)$$

natomiast w postaci całkowej będzie

$$i_{\theta}^2 = i_{\theta 0}^2 \exp \left[\int_0^t \frac{i^2 - i_{\theta}^2}{i_{\theta}^2 \theta(i_{\theta}, p_a)} d\tau \right] \quad (14)$$

gdzie nieliniowa funkcja tłumienia ma postać

$$\theta(i_{\theta}, p_a) = Q_p \frac{dg(i_{\theta}, p_a)}{di_{\theta}^2} \quad (15)$$

3. Funkcje aproksymujące charakterystyki statyczne łuku elektrycznego

Ze względu na występujące nieliniowości do aproksymacji charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych łuku wykorzystuje się różne skojarzenia funkcji potęgowych, wymiernych, wykładniczych i in. [4, 5, 13]. W rozpatrywanych przypadkach zastosowano stosunkowo proste funkcje składające się z trzech składników. Każdy z nich odpowiada poszczególnym częściom charakterystyki: malejącej, stałej i rosnącej. To umożliwia odwzorowania właściwości elektrycznych łuku w szerokim zakresie zmian natężenia prądu. Zmniejszeniu wzajemnej interakcji między tymi zadanymi składnikami można uzyskać przez wprowadzenie funkcji wagowych [15, 16]. Jednak wtedy otrzymuje się znaczne skomplikowanie funkcji aproksymacyjnej, co może utrudnić wykonanie przekształceń analitycznych potrzebnych do utworzenia modelu Mayra–Pentegowa i skomplikować budowę makromodelu.

Poza tym większa liczba operacji obliczeń numerycznych może później wydłużyć czas trwania symulacji komputerowych. Na podstawie literatury [2, 4] można rozważyć różne przykłady aproksymacji. Racjonalnym rozwiązaniem problemu wyboru funkcji aproksymującej może być bardzo często stosowana zależność

$$U(I, p) = \frac{P_M}{I} + U_C + R_p I \quad (16)$$

gdzie: p – wektor parametrów, wśród których: P_M – odpowiada mocy łuku, szczególnie znaczącej w zakresie słaboprądowym, analogicznie jak w modelu Mayra; U_C – odpowiada napięciu na kolumnie łuku, analogicznie jak w modelu Cassiego; R_p – odpowiada rezystancji łuku, która odgrywa znaczącą rolę w zakresie silnoprądowym. Funkcja (16) może być wykorzystywana z założeniem nieokreśloności napięcia zapłonu. Na potrzeby stosowania modelu Mayra–Pentegowa [4] wprowadza się funkcję konduktancji statycznej w postaci

$$G(I^2, p) = \frac{I}{U(I, p)} = \frac{I^2}{P_M + U_C I + R_p I^2} = \frac{I^2}{P_M + U_C \sqrt{I^2} + R_p I^2} \quad (17)$$

i jej pochodną względem kwadratu prądu

$$\frac{dG(I^2, p)}{dI^2} = \frac{2P_M + U_C I}{2(P_M + U_C I + R_p I^2)^2} \quad (18)$$

Bardziej rozbudowany wariant aproksymacji charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych uwzględnia napięcie zapłonu:

$$U(I, p) = \frac{P_M I}{I^2 + I_M^2} + U_C + R_p I \quad (19)$$

Ponieważ zwykle prąd zapłonu jest bardzo mały i mała jest też wartość rezystancji R_p , to ostatni składnik sumy (19) można pominąć i wtedy w przybliżeniu współrzędne punktu ekstremalnego na charakterystyce statycznej mają wartości

$$I_g \cong I_M, \quad U_g \cong \frac{P_M}{2I_M} + U_C \quad (20)$$

W rzeczywistości zapłon występuje z nieco mniejszą wartością prądu i z nieco wyższą wartością napięcia.

Konduktancję statyczną kolumny można obliczyć ze wzoru

$$G(I^2, p_a) = \frac{I(I^2 + I_M^2)}{P_M I + U_C(I^2 + I_M^2) + R_p(I^2 + I_M^2)I} = \frac{\sqrt{I^2(I^2 + I_M^2)}}{P_M \sqrt{I^2} + U_C(I^2 + I_M^2) + R_p(I^2 + I_M^2)\sqrt{I^2}} \quad (21)$$

Jej pochodną względem kwadratu prądu określa zależność

$$\frac{dG}{dI^2} = \frac{2P_M I^3 + U_C(I^2 + I_M^2)^2}{2I(P_M + R_p(I^2 + I_M^2)) + U_C(I^2 + I_M^2)^2} \quad (22)$$

Zależności (16)–(18) stanowią szczególne przypadki wzorów (19)–(22) w stanie $I_M = 0$ A. Jednak takie rozróżnienie jest istotne, gdyż – jak wcześniej wspomniano – wpływa to na powstawanie różnic w trudnościach tworzenia makromodeli i różnic w czasach trwania obliczeń numerycznych.

Zakładamy, że poszczególne współczynniki (parametry) w funkcjach (16) i (19) zależą od długości kolumny l_c w następujący sposób:

$$P_M(l_c) = P_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0} \right)^{n_{pl}} \quad (23)$$

$$U_C(l_c) = U_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0} \right)^{n_{ul}} \quad (24)$$

$$R_p(l_c) = R_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0} \right)^{n_{rl}} \quad (25)$$

gdzie: P_l, U_l, R_l – stałe współczynniki. Wartości wykładników potęgowych n_{pl}, n_{ul} i n_{rl} powinny być większe od zera. Wartości prądu I_M nie uzależniono od długości łuku, gdyż zgodnie z (20) przyjęto, że jednocześnie zmiany P_M i U_C wpływają na napięcie zapłonu.

Jeśli uwzględnić, że zmiennym parametrem jest długość kolumny l_c , to wzór (17) na konduktancję można zapisać

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 6–13. When referring to the article please refer to the original text.

PL

$$G(I, l_c) = \frac{I^2}{P_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + U_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} + I + R_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} I^2} \quad (26)$$

Odpowiada mu pochodna konduktancji względem długości łuku

$$\frac{\partial G(I, l_c)}{\partial l_c} = \frac{I^2 \left[P_l n_{pl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}-1} + U_l n_{ul} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}-1} + I R_l n_{rl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}-1} \right]}{l_c \left[P_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + U_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} + I R_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} \right]^2} \quad (27)$$

Podobnie na podstawie (21) można zapisać wzór na konduktancję kolumny zależną od długości l_c

$$G(I, l_c) = \frac{I(I^2 + I_M^2)}{P_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + U_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} \cdot (I^2 + I_M^2) + R_l \cdot \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} \cdot (I^2 + I_M^2) I} \quad (28)$$

W tym przypadku pochodna konduktancji względem długości łuku będzie znacznie bardziej rozbudowana

$$\frac{\partial G(I, l_c)}{\partial l_c} = \frac{I(I^2 + I_M^2) \left[I P_l n_{pl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}-1} + U_l n_{ul} (I^2 + I_M^2) \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}-1} + I R_l n_{rl} \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}-1} (I^2 + I_M^2) \right]}{l_c \left[I P_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{pl}} + U_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{ul}} (I^2 + I_M^2) + I R_l \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^{n_{rl}} (I^2 + I_M^2) \right]^2} \quad (29)$$

4. Wyniki badań symulacyjnych

W celu sprawdzenia poprawności budowy utworzonego modelu i efektywności działania opracowanych w programie komputerowym modeli matematycznych oraz makromodeli

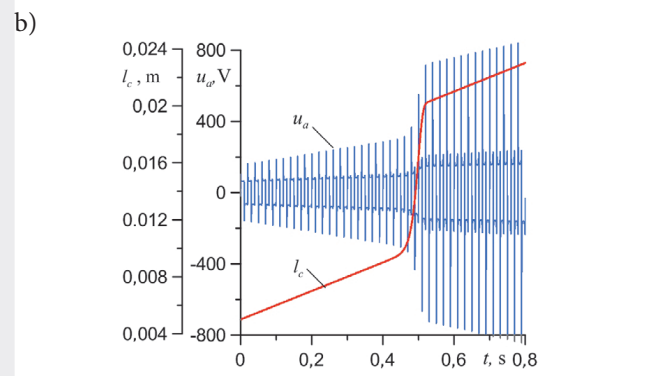
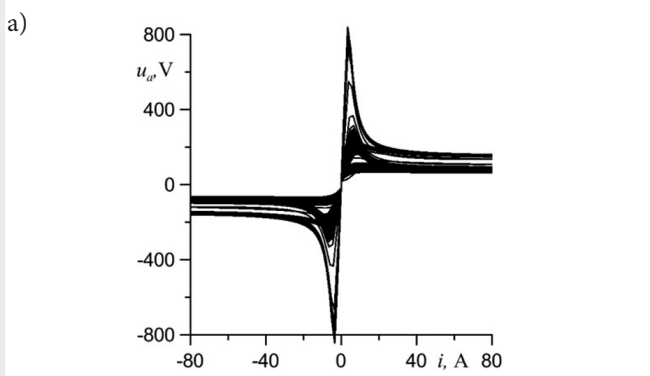
łuku wykonano wielokrotne badania symulacyjne. Wcześniej jednak utworzono prosty obwód elektryczny składający się ze źródła prądowego generującego przebieg prądu o zadanej amplitudzie I_m i częstotliwości f , połączonego z łukiem o sterowanej długości. W szereg z makromodelem kolumny plazmowej włączono makromodel elementu odwzorowującego przyelektrodowe spadki napięcia. Wtedy napięcie na łuku określa zależność

$$u_a = u + U_{AC} \operatorname{sgn}(i) \quad (30)$$

Tutaj założono sumaryczny spadek $U_{AC} = 18$ V. Takie proste rozwiązanie jest możliwe, jeśli wykorzystamy model różniczkowy (10). Jeśli użyjemy modelu całkowego (12), to należy odpowiednio zmodyfikować makromodel ze źródłem prądowym [17]. Problemy związane z odwzorowaniem przyelektrodowych spadków napięcia są zwykle pomijane w modelowaniu łuków długich, a więc wysokonapięciowych. Po zainicjowaniu obliczeń łuk był liniowo rozciągany. Na ten proces, po zadanym czasie, był dodatkowo nałożony quasi-skokowy przyrost długości. Przebieg czasowy zmian długości można opisać zależnością $l_c = 5 \cdot 10^{-3} + 10^{-2} (t + (1 - \exp(-(2t)^{40}))$), m. Jako warianty wymuszenia w obwodach elektrycznych zastosowano źródła prądu okresowego sinusoidalnego i trapezoidalnego o amplitudach $I_{m1} = 80$ A i $I_{m2} = 160$ A oraz o dwóch częstotliwościach $f_1 = 25$ Hz i $f_2 = 50$ Hz. Prądy trapezoidalne i o obniżonej częstotliwości są wykorzystywane m.in. w spawalnictwie, np. do spawania aluminium (metoda TIG).

Na rys. 2 i 3 przedstawiono charakterystyki łuku rozciąganego, opisanego zależnościami (11), (10)–(12), (23)–(25), (26) i (27). Na rys. 2 zobrazowano zastosowanie źródła prądu sinusoidalnego o amplitudzie $I_{m1} = 80$ A i częstotliwości $f = 50$ Hz. Natomiast na rys. 3 – zastosowanie wymuszenia sinusoidalnego o amplitudzie $I_{m1} = 160$ A i częstotliwości $f = 50$ Hz. W obliczeniach potrzebnych do utworzenia tych rysunków zastosowano różne parametry funkcji aproksymujących charakterystyki napięciowo-prądowe statyczne, które z kolei wpływają na zmiany parametrów modeli matematycznych podczas rozciągania łuku. Na wykresach przebiegów czasowych przyjęto oznaczenia: linia niebieska – napięcie łuku, linia czerwona – długość łuku.

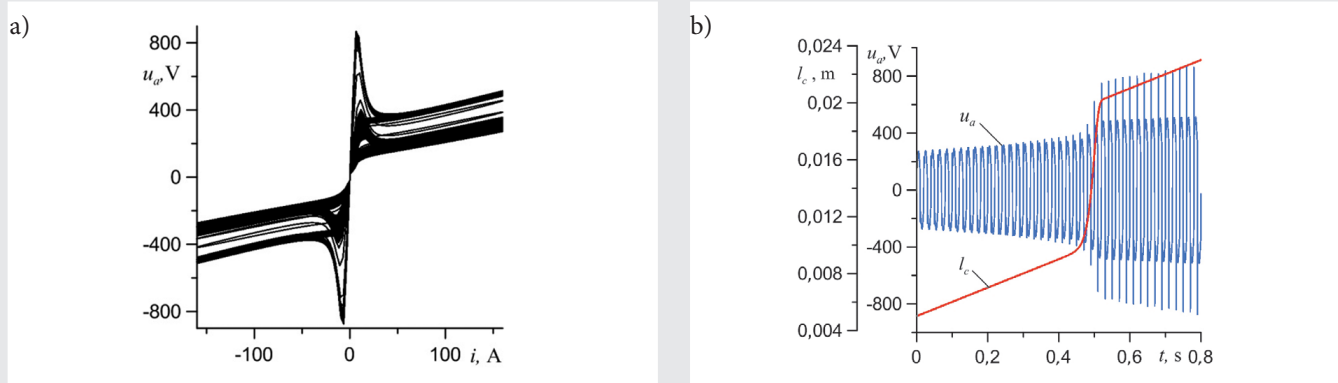
Na rys. 4 i 5 przedstawiono charakterystyki łuku rozciąganego, opisanego zależnościami (11), (19)–(21), (23)–(25), (28) i (29). Na rys. 4 odtworzono zastosowanie źródła prądu sinusoidalnego o amplitudzie $I_{m1} = 80$ A i częstotliwości $f = 50$ Hz.



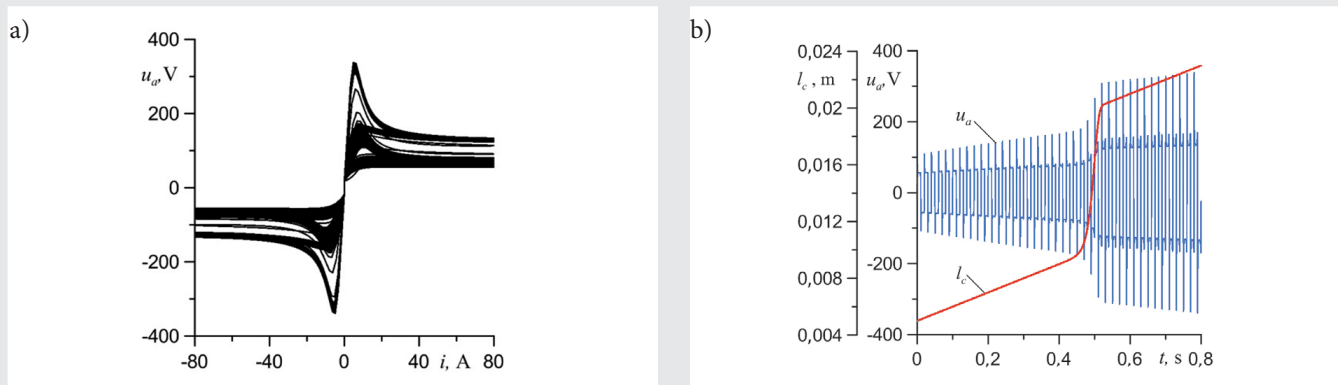
Rys. 2. Charakterystyki dynamiczne modelu łuku rozciąganego o nieokreślonej wartości napięcia zapłonu ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_l = 100$ W, $n_{pl} = 0,8$, $U_l = 10$ V, $n_{ul} = 0,8$, $R_l = 0,05$ Ω , $n_{rl} = 0,05$, $Q_p = 0,2$ J): a) charakterystyki napięciowo-prądowe; b) przebiegi zmian długości kolumny i napięcia na łuku

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 6-13. When referring to the article please refer to the original text.

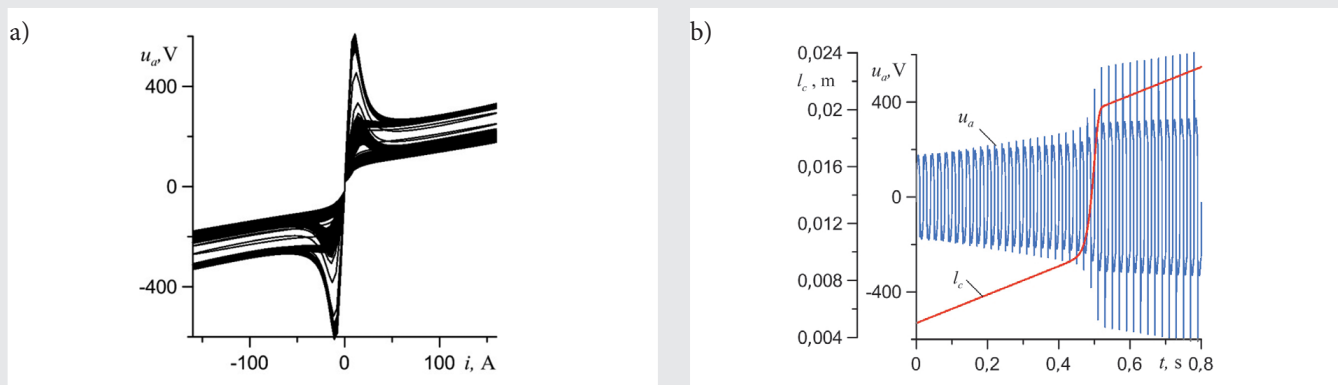
PL



Rys. 3. Charakterystyki dynamiczne modelu łuku rozciąganego o nieokreślonej wartości napięcia zapłonu $l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_l = 150$ W, $n_{pl} = 0,8$, $U_l = 20$ V, $n_{ul} = 0,8$, $R_l = 0,8 \Omega$, $n_{rl} = 0,2$, $Q_p = 0,2$ J): a) charakterystyki napięciowo-prądowe; b) przebiegi zmian długości kolumny i napięcia na łuku



Rys. 4. Charakterystyki dynamiczne modelu łuku rozciąganego o określonej wartości napięcia zapłonu ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_l = 80$ W, $n_{pl} = 0,8$, $U_l = 8$ V, $n_{ul} = 0,8$, $R_l = 0,05 \Omega$, $n_{rl} = 0,1$, $Q_p = 0,2$ J, $I_M = 4$ A): a) charakterystyki napięciowo-prądowe; b) przebiegi zmian długości kolumny i napięcia na łuku



Rys. 5. Charakterystyki dynamiczne modelu łuku rozciąganego o określonej wartości napięcia zapłonu ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_l = 160$ W, $n_{pl} = 0,9$, $U_l = 12$ V, $n_{ul} = 0,8$, $R_l = 0,5 \Omega$, $n_{rl} = 0,2$, $Q_p = 0,6$ J, $I_M = 5$ A): a) charakterystyki napięciowo-prądowe; b) przebiegi zmian długości kolumny i napięcia na łuku

Natomiast na rys. 5 – zastosowanie wymuszenia sinusoidalnego o amplitudzie $I_{m1} = 160$ A i częstotliwości $f = 50$ Hz. Tak jak poprzednio, w obliczeniach potrzebnych do utworzenia tych rysunków zastosowano różne parametry funkcji aproksymujących charakterystyki napięciowo-prądowe

statyczne, które z kolei wpływają na zmiany parametrów modeli matematycznych podczas rozciągania łuku. Na rys. 6 i 7 przedstawiono charakterystyki łuku rozciąganego, opisanego zależnościami (11), (19)–(21), (23)–(25), (28) i (29). Na rys. 6 zaprezentowano zastosowanie źródła prądu

trapezoidalnego o amplitudzie $I_{m1} = 100$ A, stromości zbocza narastania i opadania $2 \cdot 10^5$ A/s i częstotliwości $f = 25$ Hz. Natomiast na rys. 7 – zastosowanie wymuszenia trapezoidalnego o amplitudzie $I_{m1} = 120$ A, stromości zbocza narastania i opadania $48 \cdot 10^4$ A/s i częstotliwości $f = 50$ Hz. Tak jak

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 6–13. When referring to the article please refer to the original text.

PL

poprzednio, w obliczeniach potrzebnych do utworzenia tych rysunków zastosowano różne parametry funkcji aproksymujących charakterystyki napięciowo-prądowe statyczne, które z kolei wpływają na zmiany parametrów modeli matematycznych podczas rozciągania łuku.

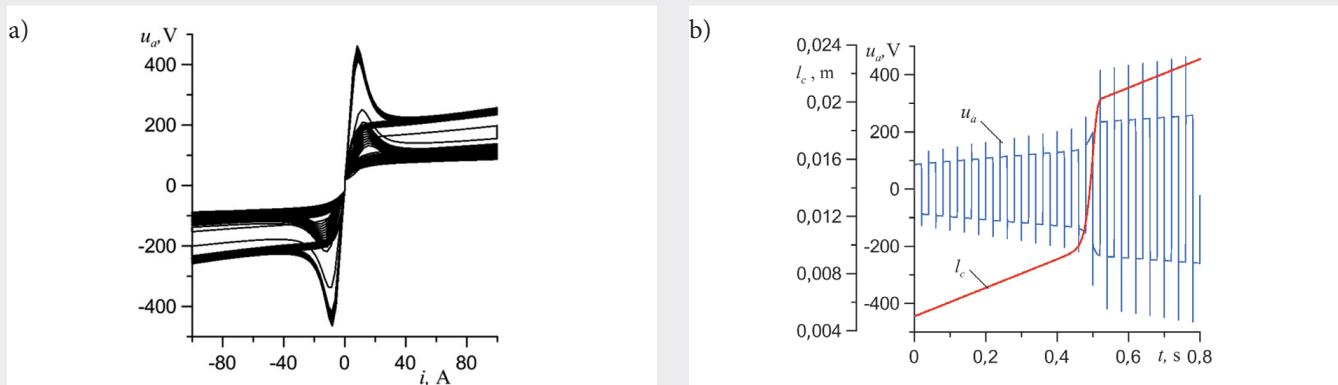
W artykule zamieszczono wybrane przykłady wyników obliczeń symulacyjnych. Uzyskane wykresy pozwalają czytelnikom na ich porównanie z wykresami dostępnymi w literaturze [5, 6, 8], które uzyskano z wykorzystaniem modeli łuku rozciągane opisanymi za pomocą wzorów podanych przez Pentegowa i Sidoreca [10, 18] oraz przez Woronina [7]. Może to być podstawą do określenia stopnia wzajemnego podobieństwa charakterystyk dynamicznych. Dalsze badania autora będą zmierzały w kierunku wykazania wysokiej przydatności zmodyfikowanego modelu Mayra–Pentegowa łuku elektrycznego do odwzorowania łuków fizycznych z dynamicznie zmiennymi parametrami.

5. Wnioski

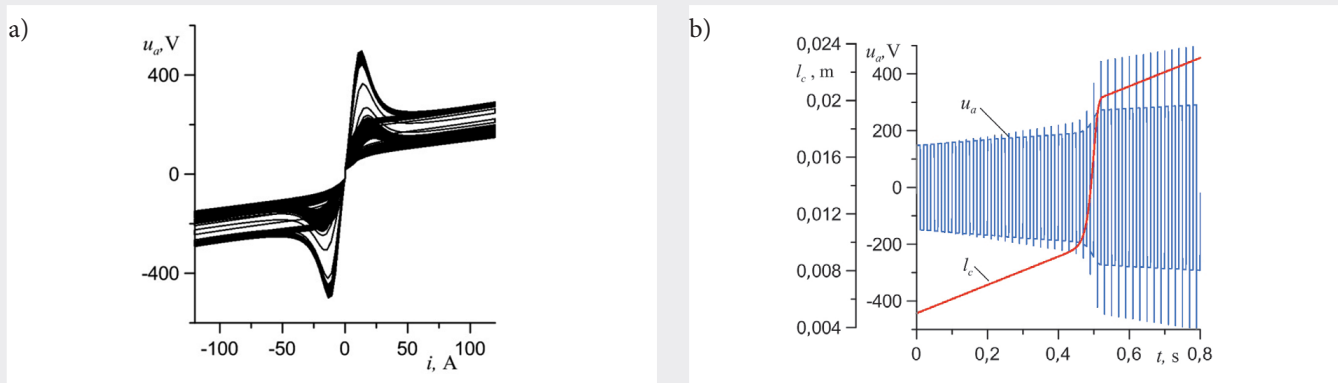
1. Wykonana modyfikacja uniwersalnego modelu matematycznego Mayra–Pentegowa umożliwia uwzględnienie wpływu dynamicznych zmian parametrów zaburzeń fizycznych na kształty charakterystyk napięciowo-prądowych dynamicznych łuku.
2. Zmodyfikowany model matematyczny Mayra–Pentegowa umożliwia wykorzystanie dowolnych charakterystyk napięciowo-prądowych statycznych, a więc powstaje możliwość odwzorowania właściwości elektrycznych takich wariantów łuków fizycznych zaburzonych, które występują w urządzeniach przemysłowych.
3. Przez wprowadzanie na początkowym etapie tworzenia matematycznego modelu łuku zaburzonego w czasie parametrów uzyskuje się gwarancję spełnienia równania bilansu energii na każdym późniejszym etapie wykorzystania modelu.

Bibliografia

1. Mayr O., Über die theorie der lichtbogen und seiner loschung, *Elektrotechnische Zeitschrift* 1943, Vol. 64, s. 645–652.
2. Пентегов И.В., Математическая модель столба динамической электрической дуги, *Автоматическая сварка* 1976, No. 6 (279), s. 8–12 [Pentegov I.V., A mathematical model of a column of a dynamic electric arc., *Automatic welding* 1976, No. 6 (279), s. 8–12].
3. Sawicki A., The universal Mayr–Pentegov model of the electric arc, *Przegląd Elektrotechniczny [Electrical Review]* 2019, R. 94, nr 12, s. 208–211 (DOI:10.15199/48.2019.12.47)
4. Sawicki A., Model Mayra–Pentegowa łuku elektrycznego z wybranymi charakterystykami napięciowo-prądowymi statycznymi, *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa* 2020, nr 3, s. 44–50.



Rys. 6. Charakterystyki dynamiczne modelu łuku rozciągane o określonej wartości napięcia zapłonu ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_1 = 80$ W, $n_{pl} = 0,8$, $U_1 = 12$ V, $n_{ul} = 0,8$, $R_l = 0,05$ Ω , $n_H = 0,9$, $Q_p = 0,08$ J, $I_M = 2$ A): a) charakterystyki napięciowo-prądowe; b) przebiegi zmian długości kolumny i napięcia na łuku



Rys. 7. Charakterystyki dynamiczne modelu łuku rozciągane o określonej wartości napięcia zapłonu ($l_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $P_1 = 100$ W, $n_{pl} = 0,9$, $U_1 = 12$ V, $n_{ul} = 0,8$, $R_l = 0,5$ Ω , $n_H = 0,2$, $Q_p = 0,08$ J, $I_M = 3$ A): a) charakterystyki napięciowo-prądowe; b) przebiegi zmian długości kolumny i napięcia na łuku

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 6–13. When referring to the article please refer to the original text.

PL

5. Sawicki A., Modelowanie wpływu zaburzeń zewnętrznych charakterystyk statycznych o nieokreślonym i określonym napięciu zapłonu na charakterystyki dynamiczne łuku w obwodzie ze źródłem prądu. Cz. 1. Podstawowe zależności analityczne, *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa* 2019, nr 2, s. 46–51 [Modelling the Effect of External Disturbances in Static Characteristics of Unspecified and Determined Ignition Voltages on Dynamic Characteristics of Arc in a Circuit with the Current Source. Part. 1. Primary Analytical Correlations (DOI: 10.17729/ebis.2019.2/6)].
6. Sawicki A., Modelowanie wpływu zaburzeń zewnętrznych charakterystyk statycznych o nieokreślonym i określonym napięciu zapłonu na charakterystyki dynamiczne łuków w obwodzie z wymuszeniem prądowym. Cz. 2. Wyniki badań symulacyjnych, *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa* 2019, nr 3, s. 38–40 [Modelling the Effect of External Disturbances in Static Characteristics of Unspecified and Determined Ignition Voltages on Dynamic Characteristics of Arc in a Circuit with Current Excitation. Part. 2. Simulation Test Result (DOI: 10.17729/ebis.2019.3/8)].
7. Воронин А.А., Повышение эффективности контактно-дугогасительных систем силовых коммутационных аппаратов с удлиняющейся дугой, Автореф. дис. к.т.н., Самара 2009 [Voronin A.A., Improving the efficiency of contact-extinguishing systems of high-current switching devices with an extending arc, Abstract of thesis, Samara 2009].
8. Sawicki A., Improvements of Hybrid Models of the Electric Arc of Variable Geometrical Parameters, 2018 Conference on Electrotechnology: Processes, Models, Control and Computer Science (EPMCCS), IEEE Xplore Digital Library (DOI: 10.1109/EPMCCS.2018.8596459).
9. Sawicki A., Modele matematyczne różniczkowe i całkowe w makromodelowaniu łuku elektrycznego z wykorzystaniem źródeł sterowanych napięciowych i prądowych. Cz. 2. Wybrane modele matematyczne łuku z jawnie zdefiniowanymi charakterystykami napięciowo-prądowymi statycznymi, *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa* 2020, nr 1, s. 21–25.
10. Пентегов И.В., Сидорец В.Н., Сравнительный анализ моделей динамической сварочной дуги, *Автомат. Сварка*, 1989, No. 2 (431), s. 33–36 [Pentegov I.V. and Sydorets V.N.: Comparative analysis of models of dynamic welding arc, *The Paton Welding Journal* 2015, No. 12, s. 45–48 (in Russian)].
11. Janowski T., Jaroszyński L., Stryczewska H.D., Modification of the Mayr's electric arc model for gliding arc analysis, XXVI International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Nagoya, Japan 2001/7/17, s. 341–342.
12. Jaroszyński L., Stryczewska H.D., Computer simulation of the electric discharge in glidarc plasma reactor, Conference: 3rd International Conference: Electromagnetic devices and processes in environment protection, ELMECO-3, June 2000.
13. Marciniak L., Implementacje modeli łuku ziemnozwarciowego w programach PSCAD i Matlab/Simulink, *Przegląd Elektrotechniczny [Electrical Review]* 2012, nr 9a, s. 126–129.
14. Marciniak L., Model of the arc earth-fault for medium voltage networks, *Central European Journal of Engineering* 2011, nr 2, s. 168–173.
15. Marciniak L., Modele dynamiczne łuku zwarcia doziemnego, *Archives of Energetics* 2007, XXXVII, s. 357–367.
16. Sawicki A., Haltof M., Modelowanie wpływu zaburzeń zewnętrznych na charakterystyki dynamiczne łuku elektrycznego, *Przegląd Elektrotechniczny [Electrical Review]* 2016, R. 92, nr 12, s. 161–164 (DOI:10.15199/48.2016.12.41).
17. Верещаго Е.Н., Костюченко В.И., Имитационная модель электрической дуги, *Электротехника* 2014, nr 6, s. 36–42 [Vereshchago E.N., Kostyuchenko V.I.: A simulation model of electric arc, *Russian Electrical Engineering* 2014, vol. 85, nr 6, s. 376–381 (in Russian) (DOI: 10.3103/S106837121406011X)].
18. Пентегов И.В., Сидорец В.Н., Вопросы моделирования динамики сварочной дуги как элемента электрической цепи, *Автомат. Сварка* 1984, No. 10 (379), s. 18–22 [Pentegov I.V. and Sydorets V.N., Questions of modeling the dynamics of the welding arc as an element of the electrical circuit, *The Paton Welding Journal* 2015, No. 12, s. 18–22 (in Russian)].

Antoni Sawicki

dr hab. inż.

Stowarzyszenie Elektryków Polskich, Oddział Częstochowa

e-mail: sawicki.a7@gmail.com

Ukończył studia magisterskie na Wydziale Elektrycznym Politechniki Częstochowskiej (1977). Pracę doktorską obronił w Moskiewskim Instytucie Energetycznym (1988). Na tej samej uczelni obronił pracę habilitacyjną (2000). Jest autorem i współautorem ponad 300 publikacji naukowych, w tym 7 monografii i 2 skryptów. Uczestniczył w ponad 50 konferencjach krajowych i zagranicznych. W jego dorobku jest 17 patentów. Był kierownikiem i wykonawcą 5 grantów naukowych. Członek Prezydium Polskiego Komitetu Elektrotechnologii. Członek korespondent Rosyjskiej Akademii Nauk Elektrotechnicznych (2012–2015), obecnie jej członek rzeczywisty. Na Politechnice Częstochowskiej przepracował 42 lata. Pełnił funkcje kierownika zakładu, dyrektora instytutu, kierownika katedry. Wypromował także jednego doktora. W jego dorobku naukowym są publikacje z zakresu dynamiki układów nieliniowych oraz teorii nagrzewania łukowego i plazmowego.