

## Józef BORKOWSKI, Janusz MROCZKA

KATEDRA METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

### Błędy metody LIDFT dla klasycznych okien danych

dr inż. Józef BORKOWSKI

Adiunkt w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Zajmuje się algorytmami i narzędziami cyfrowego przetwarzania sygnałów i badaniem uwarunkowań metrologicznych algorytmów DSP. Specjalizuje się w metodach precyzyjnych pomiarów widma w szczególności z użyciem procesorów sygnałowych



e-mail: Jozef.Borkowski@pwr.wroc.pl

prof. dr hab. inż. Janusz MROCZKA

Kierownik Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Zajmuje się metodologią obserwacji i eksperymentu, algorytmizacją problemu odwrotnego, modelowaniem matematycznym pól fizycznych, analizą spektralną i polaryzacyjną promieniowania rozproszonego, reprezentacjami czasowo-częstotliwościowymi w przetwarzaniu danych.



e-mail: Janusz.Mroczka@pwr.wroc.pl

#### Streszczenie

Praca przedstawia rozwinięcie metody liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT) wykorzystujące klasyczne okna danych oraz technikę uzupełniania zerami, dobrze znane z analizy widma z użyciem algorytmu FFT. Wykorzystanie klasycznych okien danych w miejsce specjalnie dedykowanego dla metody LIDFT okna parametrycznego daje bardziej różnorodne możliwości wykorzystania metody LIDFT w analizie sygnału wieloczęstotliwościowego

**Słowa kluczowe:** uzupełnianie zerami, interpolacja DFT, analiza sygnału wieloczęstotliwościowego, estymacja widma, LIDFT

### Errors of the LIDFT method for classic data windows

#### Abstract

Development of the discrete Fourier transform linear interpolation method (LIDFT) with using classical data windows and zero padding technique well-known from spectrum analysis with FFT is presented in the paper. Using classical data windows instead of parametric data window special dedicated for LIDFT method gives wide-range possibilities of the using LIDFT method in the multifrequency signal analysis.

**Keywords:** padding zeros, DFT interpolation, multi-frequency signal analysis, spectrum estimation, LIDFT

## 1. Wprowadzenie

Metoda liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT) aproksymuje charakterystykę częstotliwościową okna odpowiednimi funkcjami liniowymi uzyskując liniowe równanie macierzowe, z którego otrzymuje się amplitudy, częstotliwości i fazy składowych oscylacji ([1]-[3]). Wprowadzenie do metody LIDFT klasycznych okien danych i techniki uzupełniania zerami jeszcze wyraźniej pokazuje, że metoda LIDFT stanowi połączenie zalet dwóch grup metod stosowanych do analizy amplitud, częstotliwości i faz składowych oscylacji w sygnale wieloczęstotliwościowym. Jedna grupa stosuje okno danych ([4]), dyskretną transformatę Fouriera i interpolację lokalnych maksimów otrzymanego widma (dobre porównanie tych metod znajduje się np. w [5]-[7]). Druga grupa metod bazuje na metodzie Prony-ego i metodach korelacyjnych wykorzystujących właściwości macierzy autokorelacyjnej ([8]-[10]).

## 2. Model sygnału i uzupełnianie zerami

Po spróbkowaniu sygnału  $y(t)$  ( $t \rightarrow t_n = nT$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ ), zakładamy, że sygnał dyskretny  $y_n = y(t = nT)$  ma postać:

$$y_n = y(t = nT) = \sum_{i=1}^P B_i e^{j2\pi f_i nT} = \sum_{i=1}^P B_i e^{j2\pi \lambda_i / N} \quad (1)$$

gdzie:  $\lambda_i = f_i \cdot NT$  jest unormowaną częstotliwością (w [bins]),  $B_i$  – amplitudą  $i$ -tej oscylacji zespolonej  $B_i e^{j2\pi \lambda_i / N}$  i że celem pomiaru jest wyznaczenie parametrów  $\lambda_i$  i  $B_i$ . Dla modelu sygnału:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2)$$

mamy:  $B_i = A_i e^{j\varphi_i} / 2j$ ,  $z_i = e^{j\omega_i}$ ,  $P=2M$ ,  $B_{P-i+1} = B_i^*$ ,  $z_{P-i+1} = z_i^*$ .  
Równanie:

$$F_\lambda = F(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi \lambda n / N} \quad (3)$$

wyznacza dyskretnoczasową transformatę Fouriera (DtFT) dla ciągłej wartości unormowanej częstotliwości  $\lambda = f \cdot NT$  (w [bins]) i z zastosowaniem okna danych  $w_n$ . Gdy  $\lambda = 0, \dots, N-1$  równ. (3) wyznacza dyskretną transformatę Fouriera (DFT), która jest spróbkowanym DtFT. DtFT może być wyrażona zależnością:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^P B_i \cdot W(\lambda - \lambda_i) \quad (4)$$

gdzie  $W(\lambda)$  jest DtFT okna danych  $w_n$ :

$$W(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j2\pi \lambda n / N} \quad (5)$$

Zwykle do obliczenia DFT stosujemy algorytm FFT:

$$F_n = F(\lambda = n) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i w_i e^{-j2\pi n i / N} = FFT_n \{y_i w_i\} \quad (6)$$

gdzie:  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

Zauważmy, że jeśli mamy próbki sygnału oraz okna danych numerowane w zakresie  $i = -N/2, \dots, N/2-1$  zamiast  $i = 0, 1, \dots, N-1$  (wzory na okna danych są wówczas często prostsze - [4]), to możemy skorzystać z zależności:

$$F_n = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} y_i w_i e^{-j2\pi i n / N} = (-1)^n FFT_n \{y_i w_i\} \quad (7)$$

Technika uzupełniania zerami oznacza obliczanie DFT ciągu  $N \cdot R$ -elementowego  $\{y_0 w_0, \dots, y_{N-1} w_{N-1}, 0, \dots, 0\}$  (oznaczymy w skrócie przez  $\{y_i w_i, 0_R\}$ ) zamiast ciągu  $\{y_0 w_0, \dots, y_{N-1} w_{N-1}\} = \{y_i w_i\}$ . Dla takiego,  $R$ -krotnego uzupełniania zerami zależność (6) przyjmuje postać:

$$F_{n/R} = F(\lambda = n/R) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i w_i e^{-j2\pi i n / NR} = FFT_n \{y_i w_i, 0_R\} \quad (8)$$

gdzie:  $n = 0, 1, \dots, NR-1$ .

Jeśli, podobnie jak we wzorze (7) zdefiniujemy zakres numeracji próbek oraz okna  $i = -N/2, \dots, N/2-1$ , to otrzymujemy zależność analogiczną do równania (7):

$$F_{n/R} = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} y_i w_i e^{-j2\pi i n / NR} = e^{j\pi n / R} FFT_n \{y_i w_i, 0_R\} \quad (9)$$

### 3. Klasyczne okna danych w metodzie LIDFT

Praca [1] wprowadza parametryczne okno danych – specjalne okno dla metody LIDFT, którego zadaniem jest minimalizacja błędu aproksymacji okna danych funkcjami liniowymi, a nie samego przecieku widma, jak ma to miejsce w klasycznych oknach danych. Stosowanie takiego specjalnego okna stwarza jednak ograniczenia dokładności metody LIDFT ([3]), dlatego w niniejszej pracy zmodyfikowano metodę LIDFT umożliwiając wykorzystanie w niej klasycznych okien danych i uzyskując poprawę dokładności estymacji. Szczegółowe dane ilościowe przedstawiono dla okna trójkątnego zdefiniowanego dla zakresu  $n = 0, 1, \dots, N-1$  zależnością:

$$w_n = \begin{cases} n/(N/4) & \text{for } n = 0, \dots, N/2 \\ w_{N-n} & \text{for } n = N/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (10)$$

lub dla zakresu  $n = -N/2, \dots, N/2-1$  zależnością:

$$w_n = 2 - |n|/(N/4) \quad \text{for } n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (11)$$

Charakterystykę częstotliwościową okna otrzymujemy z równań (5), (10):

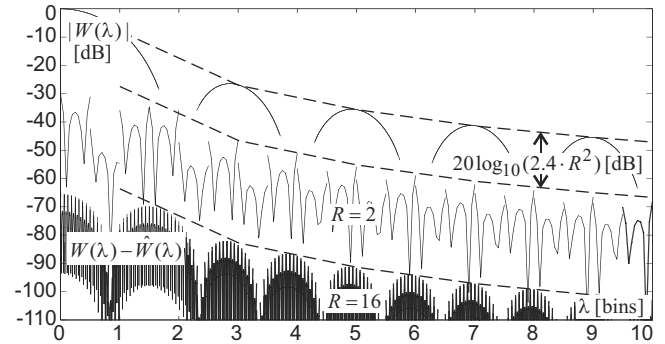
$$W(\lambda) = \frac{4}{N} e^{-j\pi\lambda} \left( \frac{\sin \pi\lambda/2}{\sin \pi\lambda/N} \right)^2 \quad (12)$$

Dla klasycznego okna danych i techniki uzupełniania zerami metoda LIDFT zakłada aproksymację charakterystyki częstotliwościowej  $W(\lambda)$  z równania (5) funkcjami liniowymi  $\hat{W}(\lambda) = a_n \lambda + b_n$  dla  $\lambda \in \langle n/R, (n+1)/R \rangle$ .

Zespolone wartości  $a_k, b_k$  otrzymujemy przez minimalizację błędu średniokwadratowego  $Q$ , który się różni od zdefiniowanego w [1] tylko przez uwzględnienie wartości  $R$ :

$$Q = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda \quad (13)$$

gdzie  $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$  dla  $\lambda \in \langle k/R, (k+1)/R \rangle$ . Wartość  $Q$  jest energią sygnału błędu aproksymacji.



Rys. 1. Wykres  $|W(\lambda)|$  i  $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$  dla okna trójkątnego.

Fig. 1. Graph of  $|W(\lambda)|$  and  $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$  for triangle window.

Postępując podobnie jak w [1], tj. minimalizując wartość  $Q$  przez przyrównanie pierwszych pochodnych do zera znajdujemy zależności na liczby  $a_k, b_k$  i otrzymujemy uogólnienie równań z [1] dla wartości  $R \geq 1$ :

$$Q = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n w_n^2 \quad (14)$$

$$c_n = 1 - 3 \left( \frac{\sin x_n / x_n - \cos x_n}{x_n} \right)^2 - \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 \quad (15)$$

$$x_n = \pi n / NR, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (16)$$

Zwiększenie  $R$  dwukrotnie zmniejsza wartość  $c_n$  16 razy, a tym samym, na podstawie równania (14) zmniejsza 16 razy (o  $10 \log_{10} 16 \approx 12$ dB) średniokwadratowy błąd  $Q$  aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej okna funkcjami liniowymi.

W klasycznych oknach danych najważniejsza jest jego charakterystyka częstotliwościowa  $W(\lambda)$  zdefiniowana równaniem (5). W metodzie LIDFT ta charakterystyka może być uzupełniona przez wykres charakterystyki częstotliwościowej błędu aproksymacji  $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$  (rys. 1). Dla  $R \geq 2$  można przyjąć, że obwiednia tego błędu jest ok.  $(2.4 \cdot R^2)$ -krotnie mniejsza niż obwiednia przecieku widma okna trójkątnego (rys. 1). To oznacza, że zwiększenie  $R$  dwukrotnie zmniejsza błąd aproksymacji okna funkcjami liniowymi 4-krotnie na charakterystyce amplitudowej (czyli o 12dB).

### 4. Algorytm LIDFT z techniką uzupełniania zerami

Algorytm metody LIDFT uzyskujemy podobnie jak w [1] z tym, że aproksymację widma stosujemy dla  $N \cdot R$  wartości widma uzyskanych w wyniku obliczenia DFT z  $N$  próbek pomnożonych przez okno danych i uzupełnionych  $N \cdot (R-1)$  zerami. Celem estymacji jest określenie parametrów  $2M$  składowych sinusoidalnych. Wygodnie jest przyjąć, że  $N \cdot R$  jest całkowitą potęgą liczby 2, ponieważ można wówczas stosować popularny algorytm radix-2 FFT. Szczegóły wyprowadzenia równań końcowych metody LIDFT można znaleźć w [2]. Uwzględniając w nim dodatkowo równania (9), (16) otrzymujemy liniowe równanie macierzowe  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{Y}$  uwzględniające technikę uzupełniania zerami:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \cdot \begin{bmatrix} B_k \\ B_k \gamma_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1} \quad (17)$$

gdzie:

$$r_m = e^{j\pi m/R} FFT_m \left\{ w_n^2 \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2, 0_R \right\} \quad (18)$$

$$s_m = 6j e^{j\pi m/R} FFT_m \left\{ w_n^2 \left( \frac{\cos x_n - \sin x_n/x_n}{x_n} \right) \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right), 0_R \right\} \quad (19)$$

$$t_m = 36 e^{j\pi m/R} FFT_m \left\{ w_n^2 \left( \frac{\cos x_n - \sin x_n/x_n}{x_n} \right)^2, 0_R \right\} \quad (20)$$

$$u_m = e^{j\pi m/R} FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\sin x_n}{x_n} e^{jx_n}, 0_R \right\} \quad (21)$$

$$v_m = 6j e^{j\pi m/R} FFT_m \left\{ y_n w_n^2 \frac{\cos x_n - \sin x_n/x_n}{x_n} e^{jx_n}, 0_R \right\} \quad (22)$$

$$i, k, m \in \langle 0, \dots, NR-1 \rangle \quad (23)$$

Równania (16–23) wyznaczają algorytm LIDFT z wykorzystaniem techniki uzupełniania zerami, którego etapy są następujące:

1. Próbkujemy sygnał  $y(t)$  i otrzymujemy ciąg  $y_n$  (zgodnie z równaniem (16) numerowanych dla  $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ ).

2. Wybieramy  $w_n$  (okno danych),  $R$  i obliczamy  $r_m$ ,  $s_m$ ,  $t_m$ ,  $u_m$ ,  $v_m$  ( $m = 0, 1, \dots, NR-1$ ) wg równań (18–23).

3. Wybieramy zbiór  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_M\}$  co oznacza, że sygnał zawiera  $M$  składowych sinusoidalnych o unormowanych częstotliwościach  $\lambda_{i_n} \in \langle (i_n - 1)/R, i_n/R \rangle$  w [bins]. Biorąc pod uwagę składowe sprzężone przyjmujemy  $i, k \in S_1 = \{i_1, \dots, i_M\} = \{i_1, \dots, i_M, NR - i_1 + 1, \dots, NR - i_M + 1\}$ .

4. Na podstawie wartości  $i$ ,  $k$  określonych w pkt. 3 obliczamy  $B_k$ ,  $C_k = B_k \gamma_k$  z równania (17). Wartości  $\gamma_k$  otrzymujemy z  $\gamma_k = C_k / B_k$ , a następnie unormowane częstotliwości składowych sinusoidalnych z równania  $\lambda_k = (k - \frac{1}{2} + \text{Re } \gamma_k) / R$ .

Amplitudę  $A_k$  i fazę  $\varphi_k$  każdej składowej oblicza się z równania  $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$ .

5. Badamy wartości  $\text{Im } \gamma_k$ ,  $\text{Re } \gamma_k$  i, jeśli to konieczne, powtarzamy pkt. 3-5 dla lepiej dobranego zbioru  $S$  zmniejszając wartości  $\text{Im } \gamma_k$  oraz  $\text{Re } \gamma_k$ . W idealnym przypadku  $\text{Im } \gamma_k = 0$  oraz  $|\text{Re } \gamma_k| \leq 0.5$ .

Wstępna lokalizacja składowych w widmie (wybór zbioru  $S$ ) i zastosowane okno danych (wybór wartości  $w_n$ ) są nazywane warunkami początkowymi metody LIDFT ([1]). Jednakże przy uwzględnieniu techniki uzupełniania zerami i klasycznych okien danych należy wziąć pod uwagę następujące zmiany w stosunku do metody przedstawionej w [1]. Po pierwsze wymagana jest  $R$ -krotnie dokładniejsza wstępna lokalizacja składowych w widmie ( $\lambda_k \in \langle (k-1)/R, k/R \rangle$  zamiast  $\lambda_k \in \langle k-1, k \rangle$ ), co dla dużych wartości  $R$  będzie często warunkiem niemożliwym do spełnienia. Jednak w pkt. 5 pokażemy, że nawet dla dużych wartości  $R$  możemy poprzestać na dotychczasowym warunku  $\lambda_k \in \langle (k-1), k \rangle$ , a nawet jeszcze mniej wymagającej lokalizacji składowych w widmie. Po drugie należy odpowiedzieć na pytanie w jaki sposób wybrać jedno z klasycznych okien danych oraz wartość  $R$  aby uzyskać założoną dokładność estymacji. Wykorzystać tu można charakterystykę błędu aproksymacji okien

funkcjami liniowymi podobnie jak na rys. 1 dla okna trójkątnego. To zagadnienie przedstawimy na przykładzie w pkt. 5.

## 5. Przykład zastosowania metody LIDFT z oknem trójkątnym i techniką uzupełniania zerami

Dla pokazania możliwości zastosowania techniki uzupełniania zerami i klasycznego okna danych w metodzie LIDFT przeanalizujemy sygnał złożony z  $M=3$  składowych sinusoidalnych o parametrach zdefiniowanych w tabeli 1.

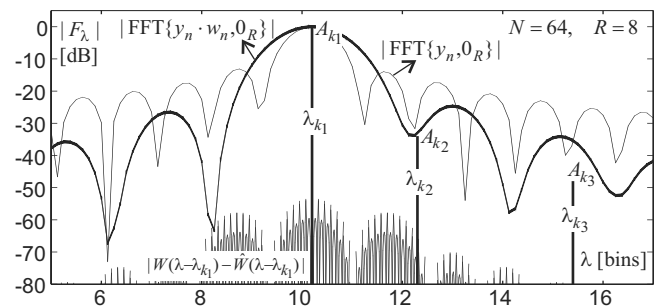
Tab. 1. Parametry sygnału analizowanego w pkt. 5.

Tab. 1. Parameters of the signal analyzed in Section 5.

$i$	$\lambda_{k_i} = f_{k_i} \cdot NT$ [bins]	$A_{k_i}$	$\varphi_{k_i}$ [rad]
1	10.2	1	0.5
2	12.3	0.02	1.0
3	15.4	0.004	1.5

$$y_n = \sin(2\pi 10.2n/N + 0.5) + 0.02 \sin(2\pi 12.3n/N + 1.0) + 0.004 \sin(2\pi 15.4n/N + 1.5) \quad \text{dla } n = -32, \dots, 31$$

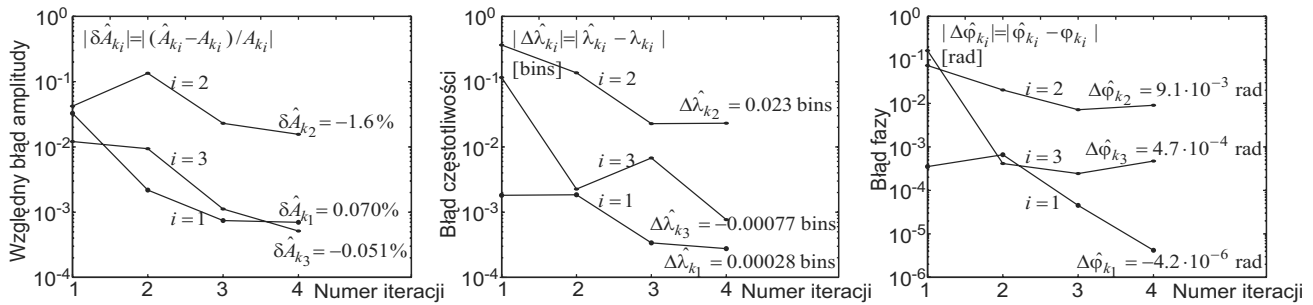
Uzupełnienie zerami 64 próbek tego sygnału do 512 próbek, zastosowanie okna trójkątnego i algorytmu FFT nie daje możliwości poprawnej estymacji składowych sinusoidalnych, szczególnie drugiej i trzeciej (rys. 2).



Rys. 2. Sygnał wieloczęstotliwościowy (3 sinusoidy) zdefiniowany w pkt. 5 i widmo uzyskane algorytmem FFT dla 64 próbek sygnału pomnożonych przez okno trójkątne i uzupełnionych zerami do 512 próbek.

Fig. 2. Multifrequency signal (3 sinusoids) defined in Section 5 and spectrum given by FFT algorithm for 64 signal samples multiplied by triangle window and zero padded to 512 samples.

Przy zastosowaniu dla tego sygnału metody LIDFT zakładamy nieznaną dokładną lokalizację składowych, a tylko przyjmijmy na początek stały ich odstęp co 3 [bins] w zakresie od 10 do 16 bins. Wybór tych trzech wartości (10, 13, 16 bins), wybór okna trójkątnego oraz  $R=8$  to określenie warunków początkowych metody LIDFT, zgodnie z pkt. 3 algorytmu przedstawionym po równaniu (23). Po kolejnym zastosowaniu algorytmu LIDFT korygujemy lokalizację składowych w widmie o wartości  $(\text{round}(\text{Re } \hat{\gamma}_k)) / R$ , aż do momentu kiedy  $|\text{Re } \hat{\gamma}_k| \leq 0.5$  dla wszystkich składowych. Wyniki czterech kolejnych realizacji algorytmu LIDFT dla wszystkich trzech składowych sinusoid są przedstawione na rys. 3, wraz z definicjami błędów. Wstępna lokalizacja składowych dla pierwszej iteracji wynosi (w [bins]):  $\{80/R, 104/R, 128/R\}$ , dla drugiej:  $\{82/R, 96/R, 125/R\}$ , dla trzeciej:  $\{82/R, 100/R, 124/R\}$  i dla czwartej:  $\{82/R, 99/R, 124/R\}$ . Analiza wyników z rys. 3 pokazuje, że zadawalające wyniki można uzyskać poprzestając np. na dwóch lub trzech iteracjach, jednak pełne możliwości metody LIDFT można uzyskać po wszystkich iteracjach.



Rys. 3. Wyniki czterech iteracji metody LIDFT dla sygnału wieloczęstotliwościowego (3 sinusoidy) zdefiniowanego w pkt. 5.

Fig. 3. Results of four iterations of LIDFT method for multifrequency signal (3 sinusoids) defined in Section 5.

## 6. Błędy metody LIDFT

Błędy metody LIDFT z uwzględnieniem techniki uzupełniania zerami porównamy z błędami w klasycznej metodzie uzupełniania zerami stosowanej przy obliczaniu DFT (najczęściej algorytmem FFT). Dla metody tej maksymalny błąd estymacji amplitudy składowej oscylacji jest wyrażony zależnością ([11]):

$$\max \delta_Z |B_k| \approx \delta_{1Z} |B_k| + \delta_{2Z} |B_k| \quad (24)$$

gdzie:

$$\delta_{1Z} |B_k| \approx 0.206 / R^2 \quad (25)$$

$$\delta_{2Z} |B_k| \approx \frac{|B_i|}{|B_k|} \frac{1}{N} |W(\lambda_k - \lambda_i)| \quad (26)$$

Sumaryczny błąd wyrażony równaniem (24) jest sumą błędów metody uzupełniania zerami  $\delta_{1Z} |B_k|$  spowodowanego niedokładnym wyznaczeniem lokalnego maksimum DFT (co jest powodowane dyskretnym charakterem otrzymanego widma) oraz błędów  $\delta_{2Z} |B_k|$  spowodowanego zjawiskiem „przecieku” widma, tj. zniekształceniem tego lokalnego maksimum przez listki boczne pochodzące od innych składowych. Zwiększenie wartości  $R$  będącego parametrem metody uzupełniania zerami pozwala na zmniejszenie tylko składowej  $\delta_{1Z} |B_k|$ . Natomiast składowa  $\delta_{2Z} |B_k|$  jest zależna od charakterystyki częstotliwościowej okna danych i stanowi istotne ograniczenie dokładności metody interpolacji DFT techniką uzupełniania zerami. Podobna sytuacja występuje w innych metodach interpolacji widma wymagających dobrej separacji składowych w widmie.

Badania symulacyjne przeprowadzone dla metody LIDFT dla składowych w widmie wystarczająco odległych od siebie (dla których pominąć można dodatkowe efekty wynikające z ograniczenia rozdzielczości częstotliwościowej metody) wykazały, że maksymalny błąd estymacji amplitudy jest również sumą dwóch składowych (analogicznie jak dla klasycznej metody uzupełniania zerami):

$$\max \delta |B_k| \approx \delta_1 |B_k| + \delta_2 |B_k| \quad (27)$$

gdzie:

$$\delta_1 |B_k| \approx 0.0823 / R^2 \quad (28)$$

$$\delta_2 |B_k| \leq 0.4 \frac{|B_i|}{|B_k|} \frac{1}{N} |\Delta \tilde{W}(\lambda_k - \lambda_i)| \quad (29)$$

a  $\Delta \tilde{W}(\lambda)$  jest obwiednią błędów aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej okna funkcjami liniowymi, która jest odwrotnie proporcjonalna do  $R^2$  (rys. 1).

Widać tu istotną różnicę w stosunku do wyników uzyskanych dla klasycznej metody uzupełniania zerami z równań (24)-(26) polegającą na tym, że nie tylko składowa  $\delta_1 |B_k|$  jest odwrotnie

proporcjonalna do  $R^2$ , ale również składowa  $\delta_2 |B_k|$ , a więc i wartość błędów sumarycznych z równ. (27) można znacząco zmniejszyć zwiększając wartość  $R$ .

## 7. Podsumowanie

Przedstawione rozwinięcie metody LIDFT wykorzystujące technikę uzupełniania zerami i klasyczne okna danych znacząco poszerza możliwości analizy sygnału zawierającego wiele oscylacji składowych. Błędy metody LIDFT można znacząco zmniejszać przez zwiększenie liczby uzupełnianych zer. Zastosowanie klasycznych okien danych umożliwia wykorzystanie obszernej ich teorii uzupełnionej o przedstawione zależności dotyczące błędów aproksymacji przecieku widma funkcjami liniowymi. To rozwiązanie jest korzystniejsze niż dotychczasowe wymagające specjalnego okna dla metody LIDFT wprowadzonego w pierwszej wersji metody w [1]. Konieczność znaczącego zwiększenia liczby próbek transformaty Fouriera jest rekompensowana stosowaniem szybkiego algorytmu FFT. Zachowując takie same warunki jak w pierwotnej wersji metody LIDFT dotyczące wstępnej lokalizacji składowych w widmie konieczne są obliczenia iteracyjne, jeśli chce się osiągnąć pełną dokładność metody LIDFT. Jednakże przeprowadzone symulacje pokazują, że wystarcza wówczas kilka iteracji.

## 8. Literatura

- [1] J. Borkowski, „LIDFT – The DFT linear interpolation method,” IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 49, pp. 741-745, Aug. 2000.
- [2] J. Borkowski, J. Mroczka, „Application of the discrete Fourier transform linear interpolation method in the measurement of volume scattering function at small angle,” Opt. Eng., vol. 39, no. 6, pp. 1576-1586, June 2000.
- [3] J. Borkowski, J. Mroczka, „Metrological analysis of the LIDFT method,” IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 51, pp. 67-71, Feb. 2002.
- [4] F. J. Harris, „On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform,” Proc. IEEE, vol. 66, pp. 51-83 (1978).
- [5] J. Schoukens, R. Pintelon, H. V. Hamme, „The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study,” IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 41, pp. 226-232, Apr. 1992.
- [6] L. Zhu, H. Ding and K. Ding, „Phase regression approach for estimating the parameters of a noisy multifrequency signal,” IEEE Proc.-Vis. Image Signal Process., Vol. 151, No. 5, Oct. 2004.
- [7] D. Agrez, „Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multifrequency signal,” IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 51, pp. 287-292, Apr. 2002.
- [8] S. M. Kay, Modern Spectrum Analysis, Prentice-Hall, New York, 1987.
- [9] L. Marple, Digital Spectrum Analysis with Applications. Prentice-Hall, New York, 1987.
- [10] S. K. Mitra, J. F. Kaiser (ed.), Handbook for Digital Signal Processing, Wiley, New York, 1993.
- [11] J. Borkowski, J. Mroczka, Analiza metrologiczna interpolacji DFT metodą uzupełniania zerami, Kongres Metrologii 2007, AGH, Kraków 2007.