

# Dyskretna optymalizacja dla strukturalnej klasyfikacji informacji za pomocą nakładkowych drzew logicznych

Marian A. Partyka, Maria Natarska

## Wstęp

Optymalizacja oznacza otrzymanie najlepszego rozwiązania problemu w sensie określonego kryterium przy jednoczesnym uwzględnieniu zadanych ograniczeń i założeń. Wśród metod wyznaczających rangę ważności parametrów konstrukcyjno-eksploatacyjnych i zmiennych decyzyjnych można wymienić np.: metodę wielowartościowych drzew logicznych, zmodyfikowany algorytm Quine'a-Mc Cluskeya minimalizacji wielowartościowych funkcji logicznych, graf zależności itd. Podejmowane działania wynikają z faktu istnienia wielu skomplikowanych procesów i urządzeń, których prawidłowa lub/i wydajniejsza praca zależy od wielu czynników [1–4].

W opracowaniu przedstawiono metodę zmodyfikowanego algorytmu Quine'a-Mc Cluskeya minimalizacji wielowartościowych nakładkowych drzew logicznych z uwzględnieniem kompromisu. Koncepcja drzewa nakładkowego polega na nałożeniu na siebie drzew decyzyjnych jako zbiorów rozwiązań spełniających ustalone kryterium z zachowaniem warunku, że musi być ten sam układ pięter dla nakładkowych drzew. Po tej operacji powstają drzewa z gałązkami wielokolorowymi.

Drzewo optymalne jest drzewem decyzyjnym, które posiada najmniejszą liczbę gałązek prawdziwych. Takie drzewa decyzyjne służą do wyznaczenia optymalnych układów parametrów konstrukcyjno-eksploatacyjnych obiektów technicznych.

Przedstawione powyżej własności drzew decyzyjnych przydają się do znalezienia rangi ważności parametrów konstrukcyjno-eksploatacyjnych od najważniejszego na dole do najmniej ważnego na górze [5, 6, 7]. Tego typu obliczenia, własności, modele rysunkowe można zastosować do drzew nakładkowych.

W opracowaniu jako przykład rzeczywisty wykorzystano wyniki pomiarów dla pompy zębatej z podciętą stopą zęba i uznano, że funkcją kryterialną celu jest sprawność całkowita pompy, natomiast za zmienne decyzyjne przyjęto następujące parametry:  $p_t$  (ciśnienie tłoczenia),  $n$  (prędkość obrotowa),  $Q_{rz}$  (wyporność rzeczywista),  $M$  (moment strat hydrauliczno-mechanicznych).

Aby zoptymalizować pracę pompy zębatej, dokonano obliczeń następujących sprawności: objętościowej ( $\eta_v$ ), hydrauliczno-mechanicznej ( $\eta_{hm}$ ) oraz całkowitej ( $\eta_c$ ). Optymalizacja sprawności pompy może przebiegać jako metoda monokryterialna lub wielokryterialna. Szczegółowe wzory obliczeniowe dla tych sprawności można znaleźć w [5].

W ujęciu decyzyjnym drzewa logiczne na każdym poziomie/piętrze zawierają daną zmienną decyzyjną przypisaną do danego parametru konstrukcyjnego i/lub eksploatacyjnego.

**Streszczenie:** Arytmetyczne i logiczne wartości decyzyjnych parametrów. Optymalne decyzyjne drzewa z minimalną liczbą prawdziwych gałązek. Algorytm Quine'a-Mc Cluskeya minimalizacji wielowartościowych funkcji logicznych. Modelowy konflikt w zbiorze kryterialnym i kompromis dla rozwiązania optymalnego.

## DISCRETE OPTIMIZATION FOR STRUCTURAL CLASSIFICATION OF INFORMATIONS BY MEANS OF MULTIPLE - DIMENSIONAL LOGIC TREES

**Abstract:** Arithmetic and logical values of decision parameters. Optimal decision trees with a minimum number of true branches. The Quine-Mc Cluskey minimization algorithm of multiple - valued logic functions. The model conflict in a set of criteria and compromise for optimal solution.

Gałązki drzew są kodowane ustalonymi wartościami logicznymi zmian wartości arytmetycznych parametrów konstrukcyjnych i/lub eksploatacyjnych odpowiednio od lewej do prawej strony i dla poszczególnych zmiennych przyjmują odpowiednio wartości:  $p_t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ;  $n, Q_{rz} = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $M = 0, 1, 2, 3$  [5].

W podpunktach 1.1, 2.1 tego opracowania zastosowano „ręczne” wyznaczenie optymalnego drzewa dla przedstawionego przykładu teoretycznego metodą drzewiastą. Metoda ta polega na rozrysowaniu wszystkich możliwych kombinacji pięterowych drzew (po sześć dla każdego kryterium oraz drzewa nakładkowego) z zaznaczeniem ścieżek prawdziwych (czerwone gałązki – kryterium I, niebieskie gałązki – kryterium II) i uproszczeniu, czyli redukcji pełnych wiązek gałązkowych, a następnie znalezieniu drzewa najlepszego (optymalnego) dla każdego kryterium w danym przykładzie, czyli drzewa z najmniejszą liczbą gałązek prawdziwych.

Jednak dla każdego kryterium trzeba rozrysować  $n!$  drzew, czyli dla trzech zmiennych  $3! = 6$ .

W paragrafach 1.2, 2.2 przedstawiono obliczenia dla tych samych danych co w podpunktach 1.1, 1.2 według algorytmu Quine'a-Mc Cluskeya.

Algorytm Quine'a-Mc Cluskeya jest metodą algorytmiczną minimalizacji wielowartościowych systemów logicznych i jest

Kryterium I																	
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_1$
0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	2	0	2	0	0
0	2	0	0	0	2	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	2	1	0	1	2	0	1	2	0	2	1	0	1	1	0	1	1
0	2	2	0	2	2	1	0	0	1	0	0	1	0	2	1	2	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	2	1	2	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	0	1	2	0	1	2	1	0	2	0	2	2	2	0
1	1	1	1	1	1	2	0	2	2	2	0	2	1	0	2	0	1

Kryterium II																	
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_1$
1	1	2	1	2	1	0	2	1	0	1	2	0	1	2	0	2	1
1	2	0	1	0	2	1	1	2	1	2	1	0	2	1	0	1	2
1	2	1	1	1	2	1	2	0	1	0	2	2	2	1	2	1	2
1	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1
2	0	1	2	1	0	1	2	2	1	2	2	1	2	0	1	0	2
2	1	0	2	0	1	2	1	0	2	0	1	1	2	1	1	1	2
2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2	1	2	2
2	1	2	2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	1	2	1	1
2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1

Tabela 1. Kombinacje prawdziwych (realizowalnych) ścieżek dla ustalonych dwóch kryteriów dla przykładu 1

używany w procesie wyznaczania rangi ważności ustalonych zmiennych (parametrów) [1].

W rozpatrywanym opracowaniu algorytm Quine’a-Mc Cluskeya minimalizacji indywidualnych cząstkowych wielowartościowych funkcji logicznych wyznacza liczbę gałązek na danym etapie z uwzględnieniem: krotności upraszczania ustalonej zmiennej logicznej, liczby gałązek, które nie upraszczają gałązek na wyższym piętrze i liczby gałązek dla upraszczających się wiązek gałązkowych na wyższym piętrze [1].

Opis zasady działania algorytmu w ujęciu decyzyjnym można sformułować następująco:

$$C_k - k_i * m_i + k_i + K_i \quad (1)$$

gdzie:

- $C_k$  – liczba literalów na  $k$ -tym piętrze hierarchicznym;
- $k_i$  – liczba wiązek upraszczających się  $i$ -tej zmiennej (na danym piętrze);
- $m_i$  – wielowartościowość  $i$ -tej zmiennej;
- $K_i$  – liczba gałązek niższego piętra, które nie upraszczają gałązek na wyższym piętrze  $i$ -tej zmiennej.

Opisane wyżej równanie (1) jest powtarzane etapowo dla kolejnych pięter z góry na dół drzewa decyzyjnego, tzn. od zmiennej najmniej ważnej do najważniejszej. Po drodze zmienne niegwarantujące minimum liczby gałązek na danym etapie obliczeniowym są eliminowane z dalszych obliczeń. W związku z tym nie trzeba rozpatrywać/obliczać wszystkich drzew decyzyjnych, gdyż po kolejnych etapach drzewa niezapewniające otrzymania drzewa optymalnego z najmniejszą

liczbą gałązek odpadają zgodnie z teorią permutacji. Gdyby tak nie było, to należałoby rozpatrzyć  $n!$  wszystkich układów pięterowych logicznych drzew decyzyjnych zgodnie z liczbą permutacji, co jest problemem NP zupełnym, czyli nie do zrealizowania w czasie realnym. Dlatego wzór (1) gwarantuje znalezienie drzew optymalnych bez generowania wszystkich możliwych permutacji, a nawet bez przeszukiwania gotowego wygenerowanego zbioru [1].

W podpunktach 1.3, 2.3 zostały nałożone dwa kryteria na jedno drzewo, czyli wykonano drzewa nakładkowe bez rozróżnienia kolorów gałązek (jednokolorowe).

### 1. Przykład teoretyczny drzew nakładkowych

Dane są dwa kryteria i występuje układ trzech zmiennych  $x_1, x_2, x_3$ , które przyjmują wartości 0, 1, 2. Występuje tutaj sytuacja bezkonfliktowa, ponieważ optymalne drzewo dla kryterium I, kryterium II oraz dla drzewa nakładkowego posiada identyczny układ pięter czyli  $x_1x_2x_3$  (od dołu do góry). Wszystkie kombinacje pięterowe logicznych drzew decyzyjnych zostały przedstawione w [5].

#### Przykład 1

Tabela 1 przedstawia kombinację prawdziwych (realizowalnych) ścieżek dla ustalonych dwóch kryteriów dla przykładu 1.

#### 1.1. Wyznaczanie optymalnego drzewa metodą drzewiastą

Dla analizowanego przykładu wyznaczono poszczególne układy pięterowe z liczbami gałązek prawdziwych po uproszczeniu (tabela 2).

	Kryterium I	Kryterium II	Nakładkowe
$x_1x_2x_3$	11	10	2
$x_1x_3x_2$	18	14	4
$x_2x_1x_3$	12	11	4
$x_2x_3x_1$	21	19	9
$x_3x_1x_2$	19	15	6
$x_3x_2x_1$	21	19	9

Tabela 2. Liczba gałęzi prawdziwych dla analizowanego przykładu 1

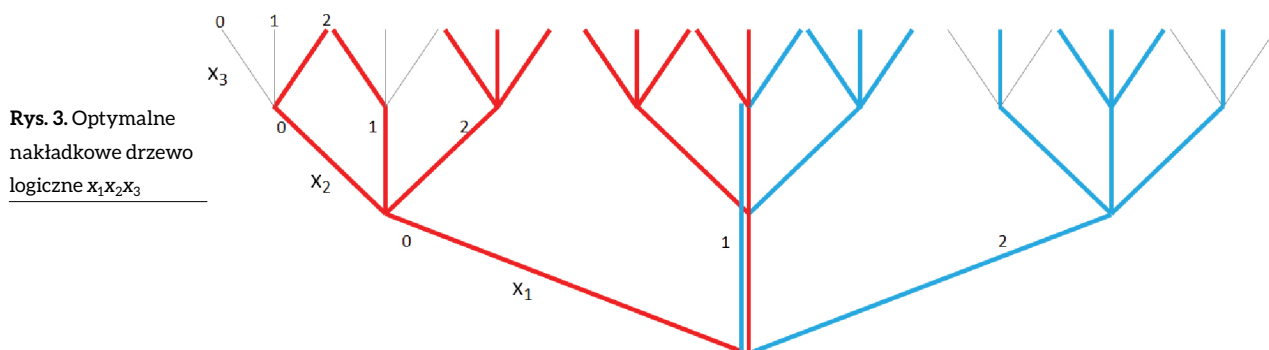
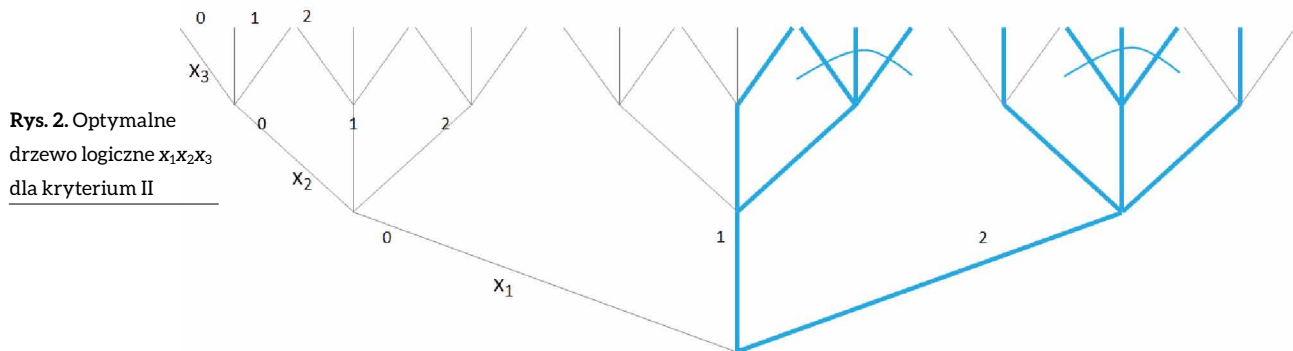
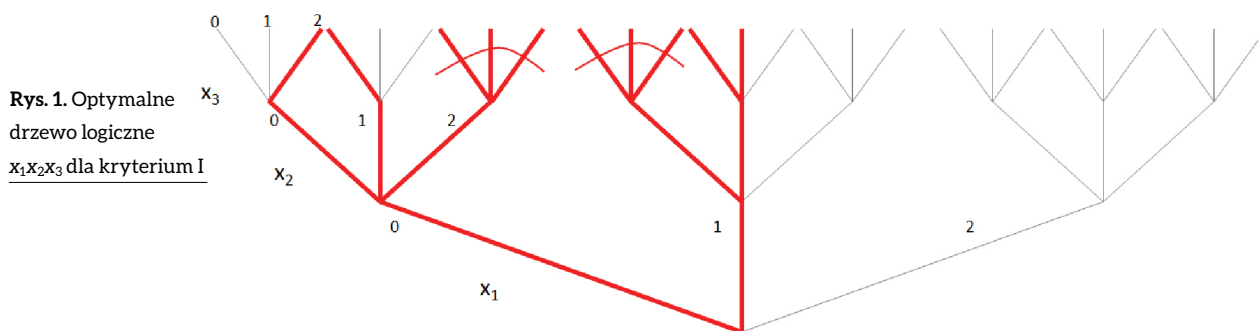
W tabeli 2 zostały zestawione wyniki dla wszystkich układów pięter. Optymalne układy drzew dla każdej grupy: kryterium I, kryterium II, nakładkowe zostały wyróżnione kolorem żółtym.

### 1.2. Wyznaczanie rangi ważności parametrów według algorytmu Quine'a-Mc Cluskeya [5]

Zaprezentowane poniżej obliczenia zostały dokonane na podstawie rozrysowanych drzew decyzyjnych. Podano obliczenia dla kryterium I dla znalezienia drzewa optymalnego. Na najwyższym piętrze, czyli najmniej ważną zmienną, jest zmienna  $x_3$ , ponieważ w wyniku obliczeń ma najmniejszy wskaźnik gałązkowy:

$$x_3: 10 - 2 * 3 + 2 + 3 = 9$$

Po pierwszym etapie obliczeń widać, że na niższym piętrze może znaleźć się jedna z dwóch zmiennych  $x_1, x_2$ , ale obowiązuje ta sama zasada co na pierwszym etapie, czyli na niższym



piętrze będzie zmienna z mniejszym wskaźnikiem gałązkowym, tzn.  $x_2$ :

$$x_2: 5 - 0 \cdot 3 + 0 + 2 = 7$$

Z dokonanych dwuetapowych obliczeń widać, że dla kryterium I zmienna  $x_1$  jest najważniejsza,  $x_2$  mniej ważna, a  $x_3$  najmniej ważna.

Podobnie dla kryterium II dokonano obliczeń dwuetapowych. Pierwszy etap wyznacza na najwyższym piętrze zmienną najmniej ważną

$$x_3: 9 - (2 \cdot 3) + 2 + 3 = 8$$

a drugi etap zmienną ważniejszą

$$x_2: 5 - (0 \cdot 3) + 0 + 2 = 7$$

na niższym piętrze, czyli ostatecznie  $x_1$  musi być najważniejsza. Ostatecznie otrzymano optymalny układ pięter  $x_1x_2x_3$  dla kryterium II.

Dla optymalnego nakładkowego drzewa decyzyjnego otrzymano kolejno dwuetapowe wyniki

$$x_3: 1 + (0 \cdot 3) + 1 = 2$$

$$x_2: 3 - (0 \cdot 3) + 0 + 3 = 6$$

i dlatego zmienną najmniej ważną jest  $x_3$ , a najważniejszą zmienną  $x_1$ . Optymalny układ pięter dla wielowartościowego nakładkowego drzewa decyzyjnego jest  $x_1x_2x_3$ .

### 1.3. Wyznaczanie rangi ważności parametrów drzewa nakładkowego bez kryterium kompromisu

Obliczenia dla drzewa nakładkowego przeprowadza się analogicznie według wzoru piętrowego dla gałęzi prawdziwych, ale bez rozróżniania kolorów.

Poniżej przedstawiono wszystkie możliwe kombinacje piętrowe dla nakładkowego jednokolorowego drzewa logicznego oraz liczbę gałęzi prawdziwych (realizowalnych) dla analizowanego przykładu:

- $x_1x_2x_3 - 13$ ;
- $x_1x_3x_2 - 16$ ;
- $x_2x_1x_3 - 16$ ;

- $x_2x_3x_1 - 25$ ;
- $x_3x_1x_2 - 19$ ;
- $x_3x_2x_1 - 25$ .

W celu znalezienia najlepszego drzewa nakładkowego jednokolorowego przeprowadzono kolejne obliczenia etapowe

$$x_3: 19 - (5 \cdot 3) + 5 + 4 = 13$$

$$x_2: 9 - (1 \cdot 3) + 1 + 2 = 9$$

z których otrzymano optymalny układ pięter  $x_1x_2x_3$ , idąc od korzenia do wierzchołka drzewa, tzn. zmienna  $x_3$  jest najmniej ważna, a najważniejszą zmienną jest  $x_1$ .

W przykładzie pierwszym, jak już wcześniej wspomniano, nie występuje konflikt, ponieważ dla kryterium I, kryterium II i dla drzewa nakładkowego optymalne wielowartościowe logiczne drzewo decyzyjne ma ten sam układ pięter, czyli  $x_1x_2x_3$ , a tym samym najmniej ważną zmienną jest  $x_3$ , a najważniejszą  $x_1$ .

### 2. Przykład teoretyczny drzew nakładkowych z istniejącym konfliktem i kompromisem

Dane są dwa kryteria i występuje układ trzech zmiennych  $x_1, x_2, x_3$ , które przyjmują wartości 0, 1, 2. Występuje tutaj sytuacja konfliktowa, ponieważ liczba optymalnych drzew jest inna: dla kryterium I oraz drzewa nakładkowego – jedno drzewo optymalne o układzie pięter  $x_1x_2x_3$ , dla kryterium II – dwa drzewa optymalne o układzie  $x_1x_2x_3$  i  $x_1x_3x_2$ .

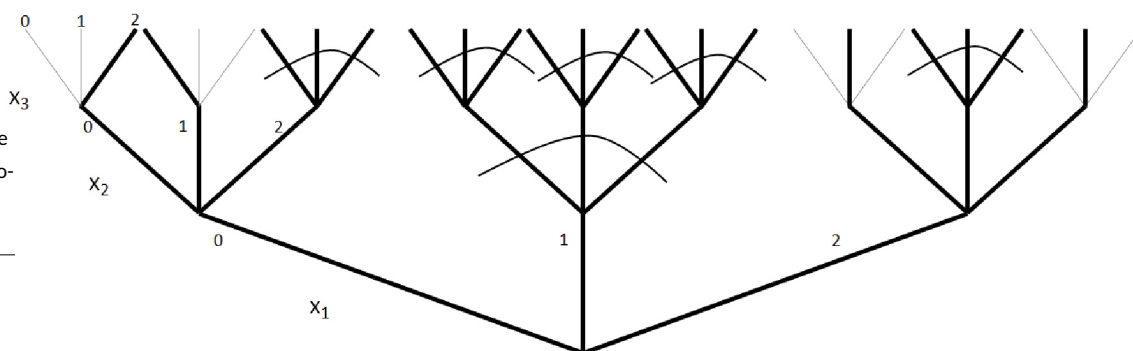
#### Przykład 2

Tabela 3 przedstawia kombinacje prawdziwych ścieżek dla ustalonych dwóch kryteriów dla przykładu 2.

### 2.1. Wyznaczanie optymalnego drzewa dla przykładu 2 metodą drzewiastą

Dla analizowanego przykładu obliczono, że poszczególne układy posiadają następującą liczbę gałęzi prawdziwych po uproszczeniu (tabela 4).

W tabeli 4 zostały zestawione wyniki dla wszystkich układów pięter. Optymalne układy drzew dla każdej grupy: kryterium I, kryterium II, nakładkowe zostały wyróżnione kolorem żółtym. Można zauważyć, że istnieje różnica w liczbie drzew optymalnych między kryteriami: dla kryterium I istnieje jeden układ optymalny, natomiast dla kryterium II istnieją dwa optymalne układy pięter.



Rys. 4. Optymalne nakładkowe jednokolorowe drzewo logiczne  $x_1x_2x_3$

Kryterium I																	
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_1$
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	2	0	0
0	2	0	0	0	2	2	0	0	2	0	0	0	0	2	0	2	0
0	2	1	0	1	2	2	0	1	2	1	0	1	0	2	1	2	0
0	2	2	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	0	2	2	2	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	2	1	2	0	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	0	1	0	2	2	1	0	2	0	1	0	1	2	0	2	1
1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	1
1	2	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	1
1	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	1	2	2	2	1
2	1	0	2	0	1	1	2	0	1	0	2	0	2	1	0	1	2
2	0	1	2	1	0	0	2	1	0	1	2	1	2	0	1	0	2
2	1	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	2
2	1	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	1	2	1	2	2
2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2

Kryterium II																	
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_1$
0	2	0	0	0	2	2	0	0	2	0	0	0	0	2	0	2	0
0	1	2	0	2	1	1	0	2	1	2	0	2	0	1	2	1	0
0	2	1	0	1	2	2	0	1	2	1	0	1	0	2	1	2	0
0	2	2	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	0	2	2	2	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	2	1	2	0	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	1
1	2	0	1	0	2	2	1	0	2	0	1	0	1	2	0	2	1
1	2	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	1
1	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	1	2	2	2	1
2	0	0	2	0	0	0	2	0	0	2	0	2	0	0	0	0	2
0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	2	0	0

Tabela 3. Kombinacje prawdziwych ścieżek dla ustalonych dwóch kryteriów dla przykładu 2

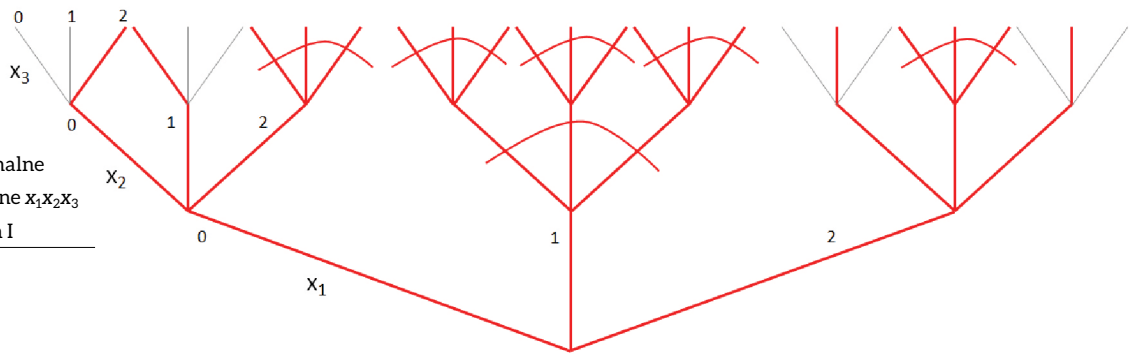
	Kryterium I	Kryterium II	Nakładkowe
$x_1x_2x_3$	13	10	8
$x_1x_3x_2$	16	10	11
$x_2x_1x_3$	16	13	11
$x_2x_3x_1$	25	27	25
$x_3x_1x_2$	19	13	14
$x_3x_2x_1$	25	27	25

Tabela 4. Liczba gałęzi prawdziwych dla analizowanego przykładu 2

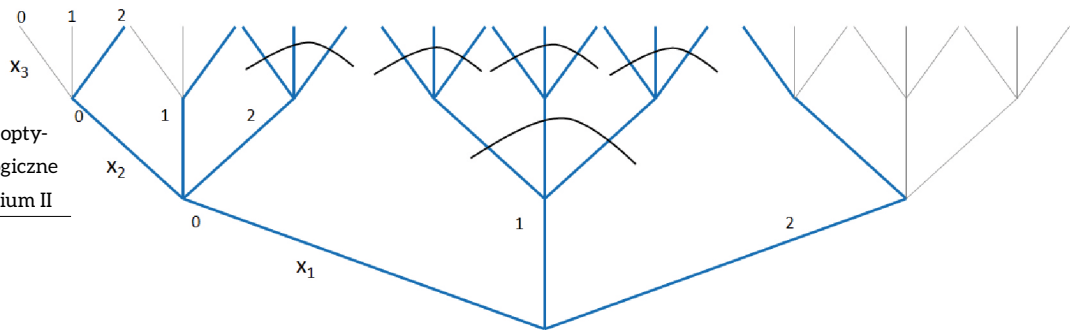
## 2.2. Wyznaczanie rangi ważności parametrów według algorytmu Quine'a-Mc Cluskeya

Zaprezentowane poniżej obliczenia zostały dokonane na podstawie rozrysowanych drzew decyzyjnych. Podano obliczenia dla kryterium I dla znalezienia drzewa optymalnego. Na najwyższym piętrze, czyli najmniej ważną zmienną, jest zmienna  $x_3$ , ponieważ w wyniku obliczeń ma najmniejszy wskaźnik gałązkowy:

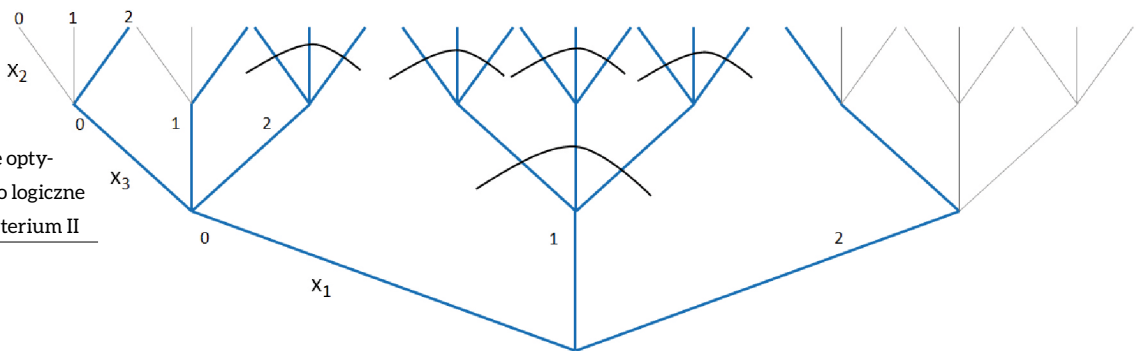
$$x_3: 19 - 5 + 3 + 5 + 4 = 13$$



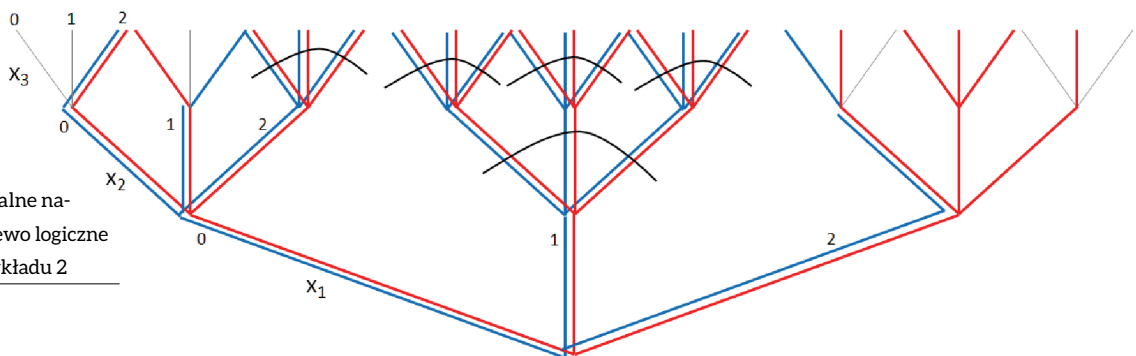
**Rys. 5.** Optymalne drzewo logiczne  $x_1x_2x_3$  dla kryterium I



**Rys. 6.** Pierwsze optymalne drzewo logiczne  $x_1x_2x_3$  dla kryterium II



**Rys. 7.** Drugie optymalne drzewo logiczne  $x_1x_3x_2$  dla kryterium II



**Rys. 8.** Optymalne nakładkowe drzewo logiczne  $x_1x_2x_3$  dla przykładu 2



Po pierwszym etapie obliczeń widać, że na niższym piętrze może znaleźć się jedna z dwóch zmiennych  $x_1$ ,  $x_2$ , ale obowiązuje ta sama zasada co na pierwszym etapie, czyli na niższym piętrze będzie zmienna z mniejszym wskaźnikiem gałązkowym, tzn.  $x_2$ :

$$x_2: 9 - 1 \cdot 3 + 1 + 2 = 9$$

Z dokonanych dwuetapowych obliczeń widać, że dla kryterium I zmienna  $x_1$  jest najważniejsza,  $x_2$  mniej ważna, a  $x_3$  najmniej ważna.

Podobnie dla kryterium II dokonano obliczeń dwuetapowych. Pierwszy etap wyznacza na najwyższym piętrze dwie zmienne  $x_2$  i  $x_3$  z najniższym wskaźnikiem gałązkowym:

$$x_2: 15 - (4 \cdot 3) + 4 + 3 = 10$$

$$x_3: 15 - (4 \cdot 3) + 4 + 3 = 10$$

Wyniki etapu I wyłoniły dwa minima dla dwóch zmiennych  $x_2$  i  $x_3 = 10$ , dlatego w etapie II dokonano obliczeń w dwóch podetapach: etap IIa: redukcja dla układu  $x_1x_3$ , etap IIb: redukcja dla układu  $x_1x_2$ :

• Etap IIa

$$x_3: 7 - (1 \cdot 3) + 1 + 2 = 7$$

• Etap IIb

$$x_2: 7 - (1 \cdot 3) + 1 + 2 = 7$$

Etap drugi wyznacza dwa minima dla  $x_2$  i  $x_3$ . Dla kryterium II przykładu 2 najważniejszą zmienną jest  $x_1$ , natomiast zmienne  $x_2$  i  $x_3$  są mniej ważne, ale konkurencyjne względem siebie. Ostatecznie otrzymano dwa optymalne układy pięter:  $x_1x_2x_3$  oraz  $x_1x_3x_2$ .

Dla optymalnego nakładkowego drzewa decyzyjnego otrzymano kolejno dwuetapowe wyniki:

$$x_3: 13 - 4 \cdot 3 + 4 + 1 = 6$$

$$x_2: 7 - 1 \cdot 3 + 1 + 2 = 7$$

i dlatego zmienną najmniej ważną jest  $x_3$ , a najważniejszą zmienną  $x_1$ . Optymalny układ pięter dla wielowartościowego nakładkowego drzewa decyzyjnego jest  $x_1x_2x_3$ .

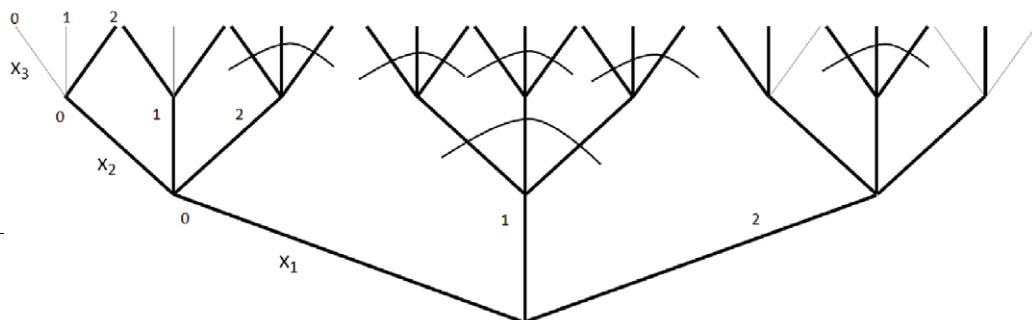
### 2.3. Wyznaczanie rangi ważności parametrów drzewa nakładkowego z kryterium kompromisu

Obliczenia dla drzewa nakładkowego przeprowadza się analogicznie według wzoru piętrowego dla gałęzek prawdziwych, ale bez rozróżniania kolorów.

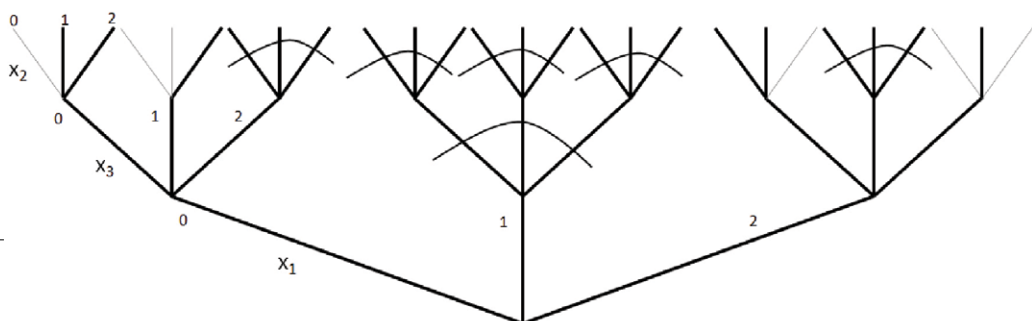
Poniżej przedstawiono wszystkie możliwe kombinacje piętrowe dla nakładkowego jednokolorowego drzewa logicznego oraz liczbę gałęzi prawdziwych (realizowalnych) dla analizowanego przykładu:

- $x_1x_2x_3 - 15$ ;
- $x_1x_3x_2 - 15$ ;
- $x_2x_1x_3 - 18$ ;
- $x_2x_3x_1 - 24$ ;
- $x_3x_1x_2 - 18$ ;
- $x_3x_2x_1 - 24$ .

Rys. 9. Pierwsze optymalne nakładkowe drzewo logiczne jednokolorowe  $x_1x_2x_3$



Rys. 10. Drugie optymalne nakładkowe drzewo logiczne jednokolorowe  $x_1x_3x_2$



W celu znalezienia najlepszego drzewa nakładkowego jednokolorowego przeprowadzono kolejne obliczenia etapowe:

- Etap I

$$x_3: 21 - (5 * 3) + 5 + 4 = 13$$

$$x_2: 21 - (5 * 3) + 5 + 4 = 13$$

Wyniki etapu I wyłoniły dwa minima dla dwóch zmiennych  $x_2$  i  $x_3$ , dlatego w etapie II dokonano obliczeń w dwóch pod-etapach: etap IIa: redukcja dla układu  $x_2x_3$ , etap IIb: redukcja dla układu  $x_1x_2$ :

- Etap IIa:

$$x_3: 9 - (1 * 3) + 1 + 2 = 9$$

- Etap IIb:

$$x_2: 9 - (1 * 3) + 1 + 2 = 9$$

W wyniku obliczeń dwóch podetapów etapu II otrzymano dwa minima dla zmiennych:  $x_2$  i  $x_3$ . Najważniejszą zmienną jest zmienna  $x_1$ , natomiast zmienne  $x_2$  i  $x_3$  są mniej ważne, ale konkurencyjne względem siebie. Ostatecznie otrzymano dwa optymalne układy pięter:  $x_1x_2x_3$  oraz  $x_1x_3x_2$ .

W przykładzie drugim, jak już wcześniej wspomniano, występuje konflikt, ponieważ kryterium I ma jedno drzewo optymalne ( $x_1x_2x_3$ ), natomiast kryterium II ma dwa optymalne układy pięter ( $x_1x_2x_3$  oraz  $x_1x_3x_2$ ).

### 3. Przykład liczenia gałązek z rysunku (układu), a następnie liczenie gałązek drzewa ze wzoru dla nieoptymalnych drzew

Po rozrysowaniu wszystkich kombinacji pięterowych dla przykładu 1 i po uproszczeniu drzew (skreślenie wszystkich pełnych wiązek gałązkowych bez powstania gałązek izolowanych), wyliczono liczbę pozostałych gałązek prawdziwych, idąc od góry drzewa.

Na rys. 11 dokonano liczenia gałązek dla wybranego logicznego drzewa decyzyjnego przykładu 1 kryterium II. Po

uproszczeniu na najwyższym piętrze drzewa pozostało 6 gałązek prawdziwych. Po zejściu na niższe piętro sprawdzono, czy można uprościć pełne wiązki gałązkowe. W rozpatrywanym drzewie nie istnieje możliwość skreślenia na drugim piętrze drzewa pełnych wiązek gałązkowych, dlatego liczba gałązek prawdziwych na tym piętrze to 6. Schodzimy na niższy poziom drzewa i powtarzamy całą procedurę, jak opisano wyżej. Na najniższym poziomie drzewa są 3 gałązki prawdziwe. Łączna liczba gałązek dla analizowanego logicznego drzewa decyzyjnego wynosi:  $6 + 6 + 3 = 15$ .

Poniżej przedstawione zostały obliczenia dla pięter na rys. 11. Obliczenia dla zmiennej na najwyższym piętrze:

$$x_2: 9 - (1 * 3) + 1 + 5 = 12$$

gdzie:

- 9 – 9 gałązek (ścieżek) prawdziwych od dołu (korzenia) drzewa do góry (wierzchołka) drzewa;
- 1 – jedna pełna wiązka gałązkowa uprościła się na najwyższym piętrze drzewa;
- 3 – zmienna  $x_2$  jest trójwartościowa;
- 5 – z 5 gałązek piętra niższego wyrosły gałązki nieupraszczone się.

Obliczenia dla zmiennej znajdującej się na piętrze niżej, czyli  $x_1$ .

$$x_1: 6 - (0 * 3) + 0 + 3 = 9$$

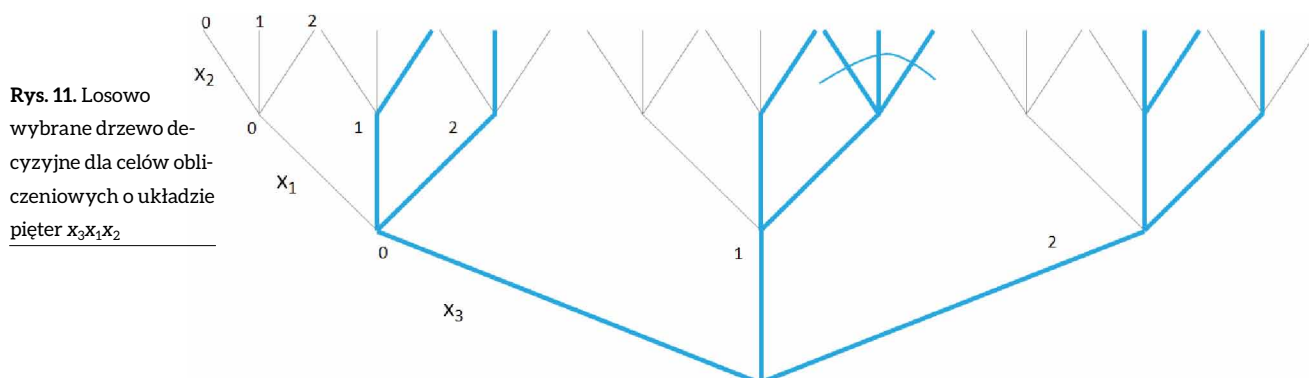
Na rys. 12 przedstawiono wybrane drzewo decyzyjne dla kryterium I z przykładu 1. Obliczenia dokonano analogicznie jak wyżej dla kryterium II.

- Etap I – najwyższe piętro:

$$x_1: 10 - (0 * 3) + 0 + 8 = 12$$

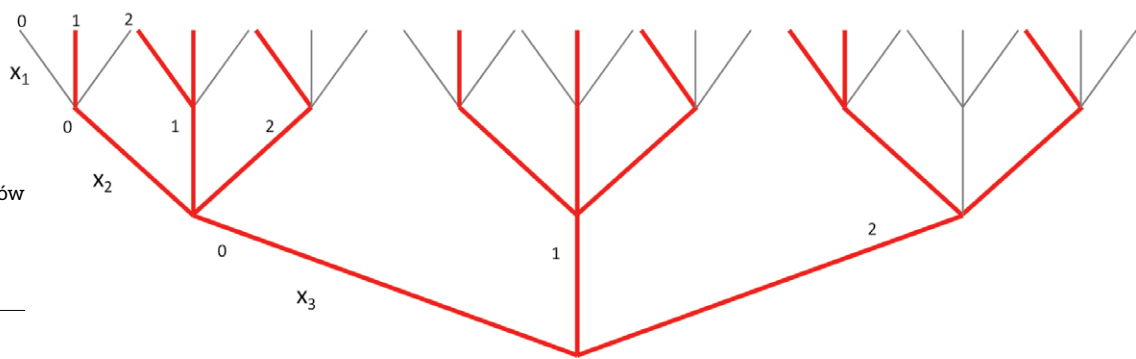
- Etap II – niższe piętro (drugie) przedstawionego wyżej logicznego drzewa decyzyjnego:

$$x_2: 8 - (0 * 3) + 0 + 3 = 11$$

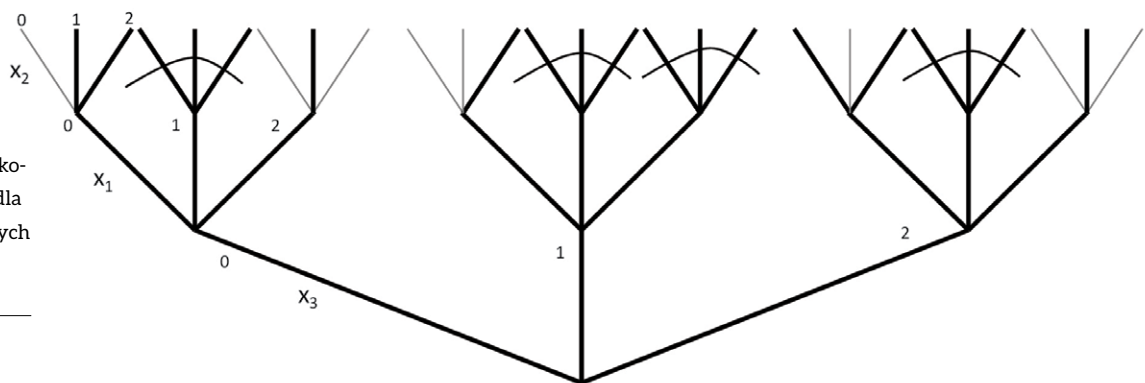


Rys. 11. Losowo wybrane drzewo decyzyjne dla celów obliczeniowych o układzie pięter  $x_3x_1x_2$





Rys. 12. Losowo wybrane drzewo decyzyjne dla celów obliczeniowych o układzie pięter  $x_3x_2x_1$



Rys. 13. Losowo wybrane drzewo nakładkowe jednokolorowe decyzyjne dla celów obliczeniowych o układzie pięter  $x_3x_1x_2$

Rysunek 13 przedstawia wybrane przypadkowo jedno z gorszych nakładkowych wielowartościowych drzew decyzyjnych (jednokolorowe) przykładu 1 oraz obliczenia zgodnie z etapami podanymi wyżej.

- Etap I – najwyższe piętro:

$$x_2: 19 - (4 * 3) + 4 + 5 = 16$$

- Etap II – niższe piętro (drugie) przedstawionego wyżej logicznego drzewa decyzyjnego:

$$x_1: 9 - (0 * 3) + 0 + 3 = 12$$

Powyższe obliczenia są nieistotne, chociaż poprawnie wykonane, ponieważ nie gwarantują optymalności drzewa decyzyjnego.

#### 4. Obliczenia kodowe jednokrotne według algorytmu Quine'a-Mc Cluskeya minimalizacji indywidualnych wielowartościowych funkcji logicznych

Obecnie dla danych z przykładu 1 przedstawiono obliczenia kodowe, które nie wymagają rozrysowywania wszystkich kombinacji pięterowych układu, a jedynie na podstawie uszeregowanych danych logicznych realizowanych ścieżek umożliwiają znalezienie optymalnego drzewa, a tym samym rangę ważności zmiennych decyzyjnych.

Zastosowane oznaczenie V oznacza, że dany cząstkowy iloczyn elementarny zapisany za pomocą cyfr układu bierze udział w sklejanu z tymi iloczynami, które mają znak V w danej kolumnie. Układy bez możliwości sklejenia zostały oznaczone  $\bar{V}$ . Znak „-” z lewej strony oznacza dotychczasowe „zasługi” danego wiersza, tzn. wcześniejszą przydatność do sklejenia, które w szczególności pozwolą na dalsze sklejenie w kolejnym etapie.

Obliczenia kodowe nie zawierają tradycyjnego podziału danych na podgrupy o jednakowej sumie cyfr, co oczywiście także może być uwzględnione.

Poniżej przedstawiono obliczenia etapu I dla kryterium I. Należało wykonać obliczenia trzy razy, osobno dla każdej zmiennej.

- Etap I

$x_1$	$x_2$	$x_3$						
0	0	2	$\bar{V}$					
0	1	0		$\bar{V}$				
0	2	0			$\bar{V}$			
0	2	1				$\bar{V}$		
0	2	2					$\bar{V}$	
1	0	0						$\bar{V}$
1	0	1						
1	0	2	$\bar{V}$					
1	1	0		$\bar{V}$				
1	1	1						$\bar{V}$

$$x_1: 10 - (0 * 3) + 0 + 8 = 18$$

			V		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>			
0	0	2	✓		
0	1	0		✓	
0	2	0		✓	
0	2	1			✓
0	2	2	✓		
1	0	0			✓
1	0	1			✓
1	0	2			✓
1	1	0		✓	
1	1	1			✓

$$x_2: 10 - (0 * 3) + 0 + 6 = 16$$

			V		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>			
0	0	2		✓	
0	1	0			✓
0	2	0	✓		
0	2	1	✓		
0	2	2	✓		
1	0	0		✓	
1	0	1		✓	
1	0	2		✓	
1	1	0			✓
1	1	1			✓

$$x_3: 10 - (2 * 3) + 2 + 3 = 9$$

Wyczenia dla etapu I wyłoniły jedno minimum, tzn. dla zmiennej x<sub>3</sub>. Zatem etap II wycieniony został po wcześniejszej redukcji przeprowadzonej po x<sub>3</sub>, a otrzymane wyniki to:

• Etap II

			V						V		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>				x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>			
0	0	2	✓			0	0	2	✓		
0	1	1		✓		0	1	1	✓		
0	2	2			✓	0	2	2	✓		
1	0	0			✓	1	0	0			✓
1	1	1			✓	1	1	1			✓

$$x_1: 5 - (0 * 3) + 0 + 3 = 8$$

$$x_2: 5 - (0 * 3) + 0 + 2 = 7$$

Wynik etapu II wyłonił jedno minimum. Dlatego otrzymano jeden układ optymalny dla kryterium I, tzn. x<sub>1</sub>x<sub>2</sub>x<sub>3</sub>.

**5. Obliczenia kodowe wielokrotne według algorytmu Quine'a-Mc Cluskeya minimalizacji indywidualnych wielowartościowych funkcji logicznych**

Podstawy logiczne przeprowadzonych obliczeń są identyczne jak w paragrafie 4.

Poniżej zostały przedstawione obliczenia dla kryterium II wybranego przykładu 2 według danych z tabeli 3.

• Etap I  
Redukcja po x<sub>3</sub>:

			V		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>			
0	2	0	✓		
0	1	2			✓
0	2	1	✓		
0	2	2	✓		
1	0	0		✓	
1	0	1		✓	
1	0	2		✓	
1	1	0			✓
1	1	1			✓
1	1	2			✓
1	2	0			✓
1	2	1			✓
1	2	2			✓
2	0	0			✓
0	0	2			✓

$$x_3: 15 - (4 * 3) + 4 + 3 = 10$$

Redukcja po x<sub>2</sub>:

			V		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>			
0	2	0			✓
0	1	2	✓		
0	2	1			✓
0	2	2	✓		
1	0	0		✓	
1	0	1		✓	
1	0	2		✓	
1	1	0		✓	
1	1	1		✓	
1	1	2		✓	
1	2	0		✓	
1	2	1		✓	
1	2	2		✓	
2	0	0			✓
0	0	2	✓		

$$x_2: 15 - (4 * 3) + 4 + 3 = 10$$

Redukcja po x<sub>1</sub>:

			V		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>			
0	2	0	✓		
0	1	2		✓	
0	2	1		✓	
0	2	2		✓	
1	0	0			✓
1	0	1			✓
1	0	2			✓
1	1	0			✓
1	1	1			✓
1	1	2			✓
1	2	0	✓		
1	2	1		✓	
1	2	2		✓	
2	0	0			✓
0	0	2			✓

$$x_1: 15 - (0 * 3) + 0 + 9 = 24$$

Wyniki etapu I wyłoniły dwa minima  $x_2, x_3$ , zatem etap II należy wyliczyć oddzielnie po redukcji dla takich parametrów.

• Etap II

Etap IIa (redukcja po  $x_3$ ) pozwolił uzyskać następujące wyniki:

		V	
-	0	2	V
0	1		V
-	1	0	V
-	1	1	V
-	1	2	V
2	0		V
0	0		V

		V	
-	0	2	V
-	1	0	V
-	1	1	V
-	1	2	V
2	0		V
0	0		V

$x_1: 7 - (0 * 3) + 0 + 3 = 10$

$x_2: 7 - (1 * 3) + 1 + 2 = 7$

Natomiast alternatywnie wyliczony etap IIb (redukcja po  $x_2$ ) pozwolił uzyskać wyniki:

• Etap IIb:

		V	
-	0	2	V
0	1		V
-	1	0	V
-	1	1	V
-	1	2	V
2	0		V

		V	
-	0	2	V
-	0	1	V
-	1	0	V
-	1	1	V
-	1	2	V
2	0		V

$x_1: 7 - (0 * 3) + 0 + 3 = 10$

$x_3: 7 - (1 * 3) + 1 + 2 = 7$

Zatem ostatecznie badany przykład posiada dwa optymalne układy:  $x_1x_2x_3$  oraz  $x_1x_3x_2$ .

**6. Wyznaczanie rangi ważności parametrów drzewa nakładkowego z uwzględnieniem kryterium kompromisu**

Obliczenia sumacyjne dla nakładkowych logicznych drzew decyzyjnych polegają na liczeniu gałęzek jednego kryterium i liczeniu gałęzek drugiego kryterium, a ostatecznie na sumacyjnym uwzględnieniu kryterium kompromisu.

Obliczenia zostały wykonane według wzoru sumacyjnego dla dwóch kryteriów algorytmu Quine'a-Mc Cluskeya minimalizacji indywidualnych cząstkowych wielowartościowych funkcji logicznych:

$$\underbrace{(C_k - k_i * m_i + k_i + K_i)}_{\text{Kryterium I}} + \underbrace{(C_k - k_i * m_i + k_i + K_i)}_{\text{Kryterium II}} \quad (2)$$

• Etap I

KRYTERIUM I

		V	
0	0	2	V
0	1	0	V
0	2	0	V
0	2	1	V
0	2	2	V
1	0	0	V
1	0	1	V
1	0	2	V
1	1	0	V
1	1	1	V

		V	
0	0	2	V
0	1	0	V
0	2	0	V
0	2	1	V
0	2	2	V
1	0	0	V
1	0	1	V
1	0	2	V
1	1	0	V
1	1	1	V

KRYTERIUM II

		V	
1	1	2	V
1	2	0	V
1	2	1	V
1	2	2	V
2	0	1	V
2	1	0	V
2	1	1	V
2	1	2	V
2	2	1	V

		V	
1	1	2	V
1	2	0	V
1	2	1	V
1	2	2	V
2	0	1	V
2	1	0	V
2	1	1	V
2	1	2	V
2	2	1	V

		V	
1	1	2	V
1	2	0	V
1	2	1	V
1	2	2	V
2	0	1	V
2	1	0	V
2	1	1	V
2	1	2	V
2	2	1	V

W pierwszym etapie otrzymano następujące wyniki:

$x_1: [10 - (0 * 3) + 0 + 8] + [9 - (0 * 3) + 0 + 7] = 34$

$x_2: [10 - (0 * 3) + 0 + 6] + [9 - (1 * 3) + 1 + 5] = 28$

$x_3: [10 - (2 * 3) + 2 + 3] + [9 - (2 * 3) + 2 + 3] = 17$

Obliczenia wskazały jedno minimum dla zmiennej  $x_3$ , która jest najmniej ważna.

• Etap II

KRYTERIUM I

		V	
-	0	2	V
0	1		V
-	0	2	V
-	1	0	V
-	1	1	V

		V	
-	0	2	V
0	1		V
-	0	2	V
-	1	0	V
-	1	1	V

KRYTERIUM II

		V	
-	1	1	V
-	1	2	V
-	2	0	V
-	2	1	V
-	2	2	V

		V	
-	1	1	V
-	1	2	V
-	2	0	V
-	2	1	V
-	2	2	V

$$x_1: [5 - (0 * 3) + 0 + 3] + [5 - (0 * 3) + 0 + 3] = 16$$

$$x_2: [5 - (0 * 3) + 0 + 2] + [5 - (0 * 3) + 0 + 2] = 14$$

Na podstawie powyższych obliczeń wyznaczono optymalne nakładkowe wielowartościowe drzewo logiczne z uwzględnieniem kompromisu o układzie pięter  $x_1, x_2, x_3$ .

**7. Wybrane obliczenia decyzyjne dla wyznaczenia rangi ważności parametrów konstrukcyjno-eksploatacyjnych na przykładzie pompy zębatej z podciętą stopą zęba**

Obliczenia graficzne i kodowe logicznych wielowartościowych drzew mogą być zastosowane do wyznaczania rangi ważności parametrów konstrukcyjno-eksploatacyjnych, gdyż poszczególne zakresy zmian wartości arytmetycznych odpowiadają logicznemu kodowaniu.

W rozpatrywanym przykładzie dla ustalania optymalnego układu pięter na sprawność hydrauliczno-mechaniczną mają wpływ cztery zakodowane parametry konstrukcyjno-eksploatacyjne:  $p_t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ;  $n, Q_{rz} = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $M = 0, 1, 2, 3$  (drzewa czteropiętrowe) i minimalizacja będzie odbywać się w trzech etapach [5, 6, 7].

W etapie pierwszym (czyli na ostatnim piętrze drzewa logicznego) powinno być  $p_t$ , a niżej (czyli w drugim etapie)  $M$ .

Obliczenia dla sprawności hydrauliczno-mechanicznej ( $\eta_{hm}$ ):

V			
n	$p_t$	$Q_{rz}$	M
0	1	0	0
0	2	0	1
0	3	0	1
0	4	0	2
0	6	0	3
0	7	0	3
1	1	1	0
1	2	1	1
1	3	1	1
2	1	2	0

$$n: 10 - (0 * 5) + 0 + 10 = 20$$

V			
n	$p_t$	$Q_{rz}$	M
0	1	0	0
0	2	0	1
0	3	0	1
0	4	0	2
0	6	0	3
0	7	0	3
1	1	1	0
1	2	1	1
1	3	1	1
2	1	2	0

$$p_t: 10 - (0 * 8) + 0 + 7 = 17$$

V			
n	$p_t$	$Q_{rz}$	M
0	1	0	0
0	2	0	1
0	3	0	1
0	4	0	2
0	6	0	3
0	7	0	3
1	1	1	0
1	2	1	1
1	3	1	1
2	1	2	0

$$Q_{rz}: 10 - (0 * 5) + 0 + 10 = 20$$

V			
n	$p_t$	$Q_{rz}$	M
0	1	0	0
0	2	0	1
0	3	0	1
0	4	0	2
0	6	0	3
0	7	0	3
1	1	1	0
1	2	1	1
1	3	1	1
2	1	2	0

$$M: 10 - (0 * 4) + 0 + 10 = 20$$

• Etap II

V		
n	$Q_{rz}$	M
0	0	0
0	0	1
0	0	2
0	0	3
1	1	0
1	1	1
2	2	0

$$n: 7 - (0 * 5) + 0 + 7 = 14$$

			V
n	Q <sub>rz</sub>	M	
0	0	0	<u>V</u>
0	0	1	<u>V</u>
0	0	2	<u>V</u>
0	0	3	<u>V</u>
1	1	0	<u>V</u>
1	1	1	<u>V</u>
2	2	0	<u>V</u>

$$Q_{rz}: 7 - (0 * 5) + 0 + 7 = 14$$

			V
n	Q <sub>rz</sub>	M	
0	0	0	<u>V</u>
0	0	1	<u>V</u>
0	0	2	<u>V</u>
0	0	3	<u>V</u>
1	1	0	<u>V</u>
1	1	1	<u>V</u>
2	2	0	<u>V</u>

$$M: 7 - (0 * 4) + 0 + 3 = 10$$

Etap trzeci wyznacza dwa jednakowo ważne parametry  $n$ ,  $Q_{rz}$ . Dlatego dla sprawności hydrauliczno-mechanicznej, dla danych zakresów zmian wartości arytmetycznych  $n$ ,  $p_r$ ,  $Q_{rz}$ ,  $M$  [6], istnieją dwa układy optymalne rangi ważności  $Q_{rz}nMp_t$  oraz  $nQ_{rz}Mp_t$ .

		V			V
n	Q <sub>rz</sub>		n	Q <sub>rz</sub>	
0	0	<u>V</u>	0	0	<u>V</u>
1	1	<u>V</u>	1	1	<u>V</u>
2	2	<u>V</u>	2	2	<u>V</u>

$$n: 3 - (0 * 5) + 0 + 3 = 6$$

$$Q_{rz}: 3 - (0 * 5) + 0 + 3 = 6$$

### 8. Wnioski


W przykładzie pierwszym, jak już wcześniej wspomniano, nie występuje konflikt, ponieważ dla kryterium I, kryterium II i drzewa nakładkowego optymalne wielowartościowe logiczne drzewo decyzyjne ma ten sam układ pięter, czyli  $x_1x_2x_3$ , a tym samym najmniej ważną zmienną jest  $x_3$ , a najważniejszą  $x_1$ .

Bardziej skomplikowane przykłady wielowartościowych logicznych drzew nakładkowych występują w sytuacjach, gdzie nie zawsze liczba drzew optymalnych jest taka sama (przykład 2), a tym bardziej w sytuacjach różnego optymalnego układu pięterowego dla różnych kryteriów i dlatego występujące konflikty wymagają wprowadzenia kryterium kompromisu.

Istniejący konflikt  $\eta_v$  i  $\eta_{hm}$  można rozwiązać kompromisowo poprzez dwa wielowartościowe drzewa logiczne w ujęciu nakładkowym, co odpowiada wyznaczeniu sprawności  $\eta_c$  jako  $\eta_v * \eta_{hm}$ , dla której istnieje także wielowartościowe drzewo logiczne o identycznej konfiguracji pięterowej.

### Literatura

- [1] PARTYKA M.A.: *Algorytm Quine'a-Mc Cluskeya minimalizacji indywidualnych cząstkowych wielowartościowych funkcji logicznych*. St. i Monogr. Nr 109, Politechnika Opolska, Opole 1999.
- [2] PARTYKA M.A.: *Optymalizacja dyskretna pompy wirowo-śmigłowej w ruchu turbinowym – zastosowanie wielowartościowych drzew logicznych*. „Napędy i Sterowanie” 1/2004.
- [3] DEPTUŁA A., PARTYKA M.A.: *Discrete optimization of a gear pump after root undercutting by means of complex multi-valued logic trees*. XVI Konferencja Innowacje w Zarządzaniu i Inżynierii Produkcji, Zakopane 2013, Pol. Towarz. Zarz. Prod. PTZP 2013.
- [4] OSIŃSKI P., DEPTUŁA A., PARTYKA M.A.: *Discrete optimization of a gear pump after tooth root undercutting by means of multi-valued logic trees*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, Volume 13, Issue 4, December 2013.
- [5] PARTYKA M.A., NATORSKA M.: *Dyskretna optymalizacja pompy zębatej z podciętą stopą zęba za pomocą nakładkowych drzew logicznych*. „Napędy i Sterowanie” 1/2021.
- [6] PARTYKA M.A., NATORSKA M.: *Discrete Optimization of a Gear Pump after Tooth Root Undercutting by Means of Multi-Dimensional Logic Functions*. Wyd: Applied Sciences, 2020, 10, 4682. DOI: 10.3390/app10134682
- [7] PARTYKA M.A., NATORSKA M.: *Dyskretna optymalizacja pompy zębatej z podciętą stopą zęba za pomocą nakładkowych drzew logicznych*. „Napędy i Sterowanie” 7–8/2017.

 prof. dr hab. Marian A. Partyka jest profesorem na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej; mgr inż. Maria Natorka jest asystentką na Wydziale Inżynierii Produkcji i Logistyki Politechniki Opolskiej; e-mail: m.natorka@po.edu.pl