

Marcin NOWAK*

ZASTOSOWANIE SZAREGO MODELU GM (1,1) W PREDYKCJI KRÓTKICH SZEREGÓW FINANSOWYCH NA PRZYKŁADZIE PRZEDSIĘBIORSTW SEKTORA PRODUKCJI MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH

DOI: 10.21008/j.0239-9415.2016.070.11

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie możliwości wykorzystania modelu szarego pierwszego rzędu GM (1,1) w predykcji krótkich szeregów finansowych na przykładzie przedsiębiorstw sektora produkcji materiałów budowlanych notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW). Okres analizy obejmuje dane z lat 2011-2014, natomiast prognoza wartości przychodów ze sprzedaży została sformułowana na rok 2015. W rozdziale 1. przedstawiono istotę szarego modelu GM (1,1) poprzez opis procedury zmierzającej do uzyskania przedmiotowych prognoz. W rozdziale 2. przybliżono podmiot badań oraz sposób doboru bazy empirycznej. W trzecim rozdziale przedstawiono wyniki przeprowadzonych predykcji wraz z analizą względnych błędów – zarówno w odniesieniu do wyznaczonych zmiennych *ex post*, jak i wartości rzeczywistych. W ostatnim rozdziale przeprowadzono syntetyczną dyskusję uzyskanych wyników oraz dokonano podsumowania.

Słowa kluczowe: teoria systemów szarych, szary model predykcyjny GM (1,1), przedsiębiorstwa sektora produkcji materiałów budowlanych.

1. ISTOTA MODELU SZAREGO GM (1,1)

Model predykcyjny GM (1,1) stanowi jeden z podstawowych elementów teorii systemów szarych. Pojęcie „szarości” zostało zaproponowane w 1982 r. przez J. Denga i miało ono opisywać systemy, których parametry cechują się niekompletnością i są obciążone błędami (Deng, 1989). Mimo niewielkiej popularyzacji w środowisku akademickim tej teorii w ostatnich latach przedstawiono szereg pro-

* Doktorant Wydział Inżynierii Zarządzania Politechniki Poznańskiej.

pozycji wykorzystania modeli prognostycznych, a zwłaszcza modelu pierwszego rzędu – GM (1,1) – szczególnie w naukach technicznych i ekonomicznych (Chen, Ting, 2002; Gao et al., 2003; Hsu, Wen, 1998). Zastosowanie modeli szarych stanowić może alternatywę, bądź uzupełnienie dla stosowanych dotąd metod predykcji, zarówno w szeroko rozumianej prognostyce szeregów ekonomicznych, jak i wąsko rozumianych szeregów finansowych. W literaturze przedmiotu wskazuje się na możliwość wykorzystania licznych metod predykcji w odniesieniu do szeregów finansowych (Kim, Shephard, Chib, 1998; Knight, 2011; Pankratz, 1983; Souza, Veiga, Medeiros, 2002; Tsay, 2002).

Predykcyjny model szary w ujęciu formalnym przedstawia się jako równanie różniczkowe l rzędu z wymuszeniem rzędu m (Cempel, Tabaszewski, 2007):

$$\frac{dx(t)^{(1)}}{dt} + ax(t)^{(1)} = b \quad (1)$$

gdzie:

a, b – parametry modelu.

Szary model predykcyjny oznacza się jako GM (l, m). Najczęściej stosowanym w praktyce modelem jest model pierwszego rzędu ($l = 1$), a rząd wymuszenia wynosi również 1 ($m = 1$). Obserwowany symptom, umożliwiający opis systemu szarego przedstawia się w postaci $x^{(0)}(k)$, gdzie $k = 1, 2, \dots, n$. Rozwiązanie równania różniczkowego (1) przeprowadza się zgodnie z następującą procedurą:

1. Sformułowanie wektora opisującego wartości początkowe:

$$X^{(0)} = [x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(k)] \quad (2)$$

Jednocześnie przyjmuje się założenie, że $k \geq 4$

2. Wyznaczenie monotonicznie rosnącego wektora AGO¹ – wektora sum początkowych:

$$X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Wektor AGO przedstawić można w następujący sposób:

$$X^{(1)} = [x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)] \quad (4)$$

Wstawiając parametry określonego wektora sum początkowych do równania (1) uzyskuje się następujący model pierwszego rzędu GM (1,1):

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = u \quad (5)$$

¹ *Accumulating Generating Operation.*

gdzie:

- t – zmienna czasowa z krokiem jeden (zmienna niezależna),
- $x^{(1)}(t)$ – zmienna reprezentująca proces AGO (zmienna zależna),
- a – parametr reprezentujący rozwój procesu w czasie (eksponent wzrostu),
- u – parametr reprezentujący szarą informację.

Wektor wyznaczony z wykorzystaniem równania (5) przyjmuje następującą postać:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] \exp(-ak) + \frac{u}{a} \quad (6)$$

Gdzie $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ jest wartością prognozy wektora AGO dla momentu $(k+1)$

W kolejnym etapie wyznacza się równanie wsteczne (7) oraz regresywne (8):

$$x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) + ax^{(1)}(k) = u \quad (7)$$

$$x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) + ax^{(1)}(k+1) = u \quad (8)$$

Ostateczny model szary GM(1,1) powstaje z integracji równań (7) i (8):

$$x^{(0)}(k) = -\frac{a}{2} [x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k+1)] + u \quad (9)$$

Równanie (9) można rozwiązać wykorzystując metody numeryczne, na przykład z wykorzystaniem metodę najmniejszych kwadratów (w modelu iteracyjnym). Równanie obrazujące ten mechanizm przedstawia się następująco:

$$[a, u]^T = (B^T B)^{-1} B^T [x^{(0)}]^T \quad (10)$$

Określona w równaniu (10) macierz B można przedstawić w następujący sposób:

$$B = \begin{bmatrix} -[x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)] * \frac{1}{2} & 1 \\ -[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)] * \frac{1}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -[x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)] * \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Wektor prognozy sumy cząstkowej uzyskuje się poprzez przekształcenie odwrotne wektora AGO – uzyskuje się wówczas tak zwany wektor IAGO:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) \quad (12)$$

Prognozę dla okresu k+1 zawartą w równaniu (12) wyznacza się wykorzystując wzór o następującej postaci:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] (e^{-ak} - e^{-a(k-1)}), k = 2, 3, \dots, n \quad (13)$$

Jednocześnie należy mieć na uwadze, że rozwiązanie równania (13) ma charakter wykładniczy.

2. DOBÓR I CHARAKTERYSTYKA PRÓBY BADAWCZEJ

W niniejszym opracowaniu próbę badawczą stanowiły przedsiębiorstwa sektora produkcji materiałów budowlanych notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie (dalej GPW)². Zakres przedmiotowy badań obejmował wartości przychodów ze sprzedaży wskazanych przedsiębiorstw w latach 2011-2014 (Kim, Shephard, Chib, 1998).

W tabeli 1. zestawiono materiał empiryczny stanowiący punkt wyjścia do modelu predykcyjnego.

Tabela 1. Wartość przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) przedsiębiorstw sektora produkcji materiałów budowlanych w latach 2011-2014 (oprac. własne na podst. sprawozdań finansowych poszczególnych podmiotów)

Lp.	Nazwa pełna	Symbol	2011	2012	2013	2014
1	GK Selena FM S.A.	SEL	1 022 067,0	1 060 883,0	1 113 912,0	1 103 387,0
2	GK Yawal S.A.	YWL	207 875,0	215 734,0	204 859,0	250 950,0
3	GK Rovese S.A.	RSE	1 638 209,0	1 668 980,0	1 870 505,0	1 762 286,0
4	Megaron S.A.	MEG	40 765,0	42 814,0	41 077,0	41 569,0
5	GK Śnieżka S.A.	SKA	550 640,0	576 521,0	573 903,0	545 972,0
6	Polcolorit S.A.	PLT	45 067,0	42 833,0	48 088,0	47 876,0
7	GK Ferro S.A.	FRO	259 793,3	277 588,8	271 377,6	272 302,1
8	GK Zakłady Magnezytowe Ropczyce S.A.	RPC	287 811,0	247 989,0	223 344,0	217 684,0
9	Izostal S.A.	IZS	259 732,0	459 421,0	323 427,0	209 669,0
10	Izolacja-Jarocin S.A.	IZO	36 959,0	28 689,0	25 366,0	27 833,0
11	GK Decora S.A.	DCR	301 598,0	302 005,0	294 215,0	272 624,0
12	Pozbud T&R S.A.	POZ	93 681,0	93 224,0	148 642,0	206 334,0
13	GK Ceramika Nowa Gala S.A.	CNG	205 774,0	213 656,0	198 451,0	178 865,0
14	GK Korporacja Budowlana Dom S.A.	KBD	48 246,0	29 010,0	62 518,0	123 989,0

Gdy wybrany podmiot gospodarczy stanowił jednostkę dominującą grupy kapitałowej, to za wartość przychodów ze sprzedaży obierano wartość właściwą dla całej grupy.

² Grupę badawczą w przedstawianym segmencie klasyfikacyjnym GPW ograniczono z natury rzeczy do podmiotów notowanych w całym okresie objętym analizą, tj. w latach 2011-2014. Ze względów praktycznych w modelu predykcyjnym nie wzięto pod uwagę wartości przychodów ze sprzedaży przedsiębiorstwa Mercor S.A. – ujmuje ono bowiem w odmienny sposób rok obrotowy (od 01. lipca danego roku do 30 czerwca kolejnego roku).

3. PROGNOZOWANIE PRZYCHODÓW W SEKTORZE PRODUKCJI MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH Z WYKORZYSTANIEM MODELU SZAREGO GM (1,1)

Zgodnie z postulatem metodycznym, iż okno prognozy nie dłuższe być szersze aniżeli 25% pierwotnego szeregu czasowego, dokonano predykcji wartości przychodów ze sprzedaży dla przedstawionej w rozdziale 2. próby badawczej sięgającej roku 2015. Posłużono się modelem szarym GM (1,1). Wartość poszukiwanej zmiennej w 2015 r. wyznaczono zgodnie z równaniem (13). Konieczne obliczenia wykonano w programie Microsoft Excel 2016.

W tabeli 2. przedstawiono wartości przychodów ze sprzedaży wyznaczone z wykorzystaniem modelu szarego pierwszego rzędu obejmującego lata 2012-2014 oraz prognozę na rok 2015.

Tabela 2. Wartości przychodów ze sprzedaży (w tys. zł) w latach 2011-2014 oraz prognoza na rok 2015 wyznaczone z wykorzystaniem modelu GM(1,1) (oprac. własne)

Lp.	Symbol	2012'	2013'	2014'	2015P
1	SEL	1 071 717,93	1 092 560,18	1 113 807,75	1 135 468,53
2	YWL	205 576,54	223 158,09	242 243,27	262 960,67
3	RSE	1 722 063,81	1 766 792,91	1 812 683,80	1 859 766,67
4	MEG	42 448,77	41 816,03	41 192,73	40 578,72
5	SKA	580 660,13	565 299,33	550 344,88	535 786,04
6	PLT	43 807,42	46 211,70	48 747,94	51 423,37
7	FRO	276 413,06	273 745,40	271 103,48	268 487,06
8	RPC	245 098,52	229 245,16	214 417,23	200 548,38
9	IZS	457 691,42	313 878,99	215 254,25	147 618,64
10	IZO	27 739,95	27 292,85	26 852,95	26 420,14
11	DCR	304 246,57	289 317,68	275 121,33	261 621,58
12	POZ	96 456,20	140 345,75	204 205,94	297 123,82
13	CNG	214 425,71	196 377,82	179 848,99	164 711,37
14	KBD	28 804,50	56 838,47	112 156,51	221 312,84

Zgodnie z danymi przedstawionymi w tab. 2. największy wzrost wartości przychodów ze sprzedaży w 2015 r. względem danych rzeczywistych z 2014 r.³ odnotowano kolejno dla GK Korporacja Budowlana Dom S.A – o niemal 80%, Pozbud T&R S.A. – o 44% oraz dla Polcolorit S.A. – o ponad 7%. Największe spadki

³ Zestawionych w tab. 1.

w analogicznym okresie stwierdzono dla przedsiębiorstwa Izostal S.A. – o ponad 29%, GK Ceramika Nowa Gala – o niemal 8% oraz dla GK ZM Ropczyce S.A. – również o niemal 8%. Wartość przychodów ze sprzedaży dla każdego z analizowanych podmiotów wzrosła średnio o niemal 6% w 2015 r. względem 2014 r. – zgodnie z predykcją dokonaną z wykorzystaniem szarego modelu GM (1,1).

W tabeli 3 zestawiono względne błędy *ex post* uzyskanych predykcji wartości przychodów ze sprzedaży przedsiębiorstw sektora produkcji materiałów budowlanych notowanych na GPW, wyznaczone za okres 2012-2014.

Tabela 3. Względne błędy prognoz wartości przychodów ze sprzedaży za okres 2012-2014 wyznaczonych z wykorzystaniem modelu szarego GM (1,1) (oprac. własne)

Lp.	Symbol	2012	2013	2014
1	SEL	-1,02%	1,92%	-0,94%
2	YWL	4,71%	-8,93%	3,47%
3	RSE	-3,18%	5,54%	-2,86%
4	MEG	0,85%	-1,80%	0,91%
5	SKA	-0,72%	1,50%	-0,80%
6	PLT	-2,27%	3,90%	-1,82%
7	FRO	0,42%	-0,87%	0,44%
8	RPC	1,17%	-2,64%	1,50%
9	IZS	0,38%	2,95%	-2,66%
10	IZO	3,31%	-7,60%	3,52%
11	DCR	-0,74%	1,66%	-0,92%
12	POZ	-3,47%	5,58%	1,03%
13	CNG	-0,36%	1,04%	-0,55%
14	KBD	0,71%	9,08%	9,54%

Błędy względne prognoz *ex post* przedstawione w tab. 3. zostały wyznaczone dla wskaźnika $k = 2,3,4$. Ich wartości determinują rzetelność dopasowania modelu predykcyjnego $\hat{x}^{(0)}$ względem wartości rzeczywistych szeregu pierwotnego $x^{(0)}$. Przeciętny poziom względnego błędu prognozy *ex post* w latach 2012-2014 wyniósł 0,5%. Uzyskany wynik świadczy o bardzo dobrym dopasowaniu modelu $\hat{x}^{(0)}$ w stosunku do modelu pierwotnego. Wśród analizowanych podmiotów najmniejszym średnim względnym błędem prognozy *ex post* cechowały się kolejno: GK Decora S.A. – 0,0021%, GK Ferro S.A. – 0,0029% oraz GK ZM Ropczyce S.A. – 0,0080%. Największym średnim błędem predykcji *ex post* cechowały się natomiast

GK Korporacja Budowlana Dom S.A. – 6,45%, Pozbud T&R S.A. – 1,05% oraz Izolacja-Jarocin S.A. – 0,256%.

W tabeli 4. zestawiono błędy względne prognozy wartości przychodów ze sprzedaży wyznaczone z wykorzystaniem modelu szarego GM (1,1) dla roku 2015 względem wartości rzeczywistych.

Tabela 4. Względne błędy prognoz *ex ante* wartości przychodów ze sprzedaży w 2015 r. wyznaczone z wykorzystaniem modelu szarego GM (1,1) (oprac. własne)

Lp.	Symbol	2015	2015P	$ (x^{(0)} - \hat{x}^{(0)}) / x^{(0)} $
1	SEL	997 867,0	1 135 468,53	-13,79%
2	YWL	Nie dotyczy ⁴	Nie dotyczy	Nie dotyczy
3	RSE	1 760 037,0	1 859 766,67	-5,67%
4	MEG	41 748,0	40 578,72	2,80%
5	SKA	550 163,0	535 786,04	2,61%
6	PLT	50 646,0	51 423,37	-1,53%
7	FRO	292 099,5	268 487,06	8,08%
8	RPC	234 299,0	200 548,38	14,40%
9	IZS	210 061,0	147 618,64	29,73%
10	IZO	20 479,0	26 420,14	-29,01%
11	DCR	197 908,0	261 621,58	-32,19%
12	POZ	225 059,0	297 123,82	-32,02%
13	CNG	180 649,0	164 711,37	8,82%
14	KBD	134 451,0	221 312,84	-64,60%

Przeciętny średni względny błąd prognozy *ex ante* dotyczący przychodów przedsiębiorste sektora produkcji materiałów budowlanych notowanych na GPW w Warszawie w 2015 r. wyniósł 8,64%. Największym błąd odnotowano kolejno dla przedsiębiorstw GK Korporacja Budowlana Dom S.A. – 64,6%, GK Decora S.A. – 32,19% oraz dla Pozbud T&R S.A. – 32,02%. Stosunkowo najmniejszy względny błąd prognozy *ex ante* wyznaczono dla Polcolorit S.A. – 1,53%, GK Śnieżka – 2,61% oraz dla Megaron S.A. – 2,80%.

Zestawiając ze sobą średnie względne błędy prognoz należy stwierdzić, że względny błąd prognoz *ex ante* jest ponad 17 razy większy aniżeli względny błąd prognozy *ex post*.

⁴ W 2015 r. GK Yawal S.A. została wycofana z obrotu giełdowego.

4. Dyskusja Wyników i Podsumowanie

W przeprowadzonym badaniu wskazano na rozbieżności między analizą względną błędów wyznaczonych *ex post* a tymi wyznaczonymi *ex ante*. Różnica okazała ponad 17 -krotna. Autor niniejszego opracowania uznaje, że rozbieżność ta ma charakter losowy. O ile bowiem względny błąd modelu predykcyjnego *ex post* jest swego rodzaju miarą adekwatności opisu procesów historycznych, o tyle błąd względny *ex ante* jest próbą antycypacji procesów ludzkiego działania. Opierając się na epistemologicznym nurcie austriackiej szkoły prakseologicznej można skonstatować, iż próby takie powinny być podejmowane z dużą dozą ostrożności. Możliwe jest bowiem prognozowanie zjawisk socjo-społecznych wyłącznie w krótkim terminie i tylko w zakresie trendów – choć i to obarczone jest możliwością istotnego błędu. Jednocześnie przez pryzmat krótkiego terminu należy uznawać taki okres, w którym nie zmieniają się istotne czynniki o znaczeniu zarówno makro-, jak i mikroekonomicznym.

Reasumując, nie należy przywiązywać wagi do wyznaczonej w niniejszym artykule relacji błędów względnych *ex post* i *ex ante*. Na skalę błędu wpływa bowiem nie tyle moc predykcyjna modelu, lecz zjawiska gospodarcze, które zaszły w 2015 r., a których model ze względów wynikających z podstaw teorii poznania nie mógł obejmować.

Wartość poznawcza niniejszej pracy została określona w celu, zarysowanym we wstępie, który został sformułowany jako przedstawienie możliwości wykorzystania modelu szarego pierwszego rzędu GM(1,1) w predykcji krótkich szeregów finansowych na przykładzie przedsiębiorstw sektora produkcji materiałów budowlanych notowanych na GPW w Warszawie. Zważając na prognozy poczynione w rozdziale trzecim uznano, iż cel został osiągnięty. Za przedmiot dalszych badań autor pracy uznaje epistemologiczną analizę mocy predykcyjnej, która cechuje szare modele prognostyczne, a zwłaszcza jego najpopularniejszej odmiany – modelu GM (1,1).

LITERATURA

1. Cempel, C., Tabaszewski, M. (2007). Zastosowanie teorii szarych systemów do modelowania i prognozowania w diagnostyce maszyn, *Diagnostyka*, 2, 11-18.
2. Chen, C., Ting, S. (2002). A study using the grey system theory to evaluate the importance of various service quality factors. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 19/7.
3. Deng, J. (1989). Introduction to grey system theory. *The Journal of Grey System 1.1*, 1-24.
4. Gao, Y., Wang, Z., Tao, Z., Lo, C. (2003). Estimation of non-statistical uncertainty in precision measurement using grey system theory, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 23
5. Hsu, C., Wen, Y. (1998). Improved Grey Prediction Models for Trans-Pacific Air Passenger Market, *Transportation. Planning and Technology*, Vol. 22

6. Kim, S. Shephard, N., Chib, S. (1998). Stochastic volatility. Likelihood inference and comparison with ARCH models, *Review of Economic Studies*, Vol 65
7. Knight, J., Satchell, S. (2011). *Forecasting volatility in the financial markets*. Butterworth – Heinemann
8. Pankratz, A. (1983). *Forecasting with univariate Box-Jenkins models. Concepts and cases*. Wiley, New York
9. Souza, L., Veiga, A., Medeiros, M.C. (2002). *Evaluating the Forecasting Performance of GARCH Models Using White's Reality Check*. Department de Economia PUC-RIO. Texto Para Discussao
10. Sprawozdania finansowe, prezentacje zarządu z działalności, listy prezesów zarządu z lat 2011-2014 dla następujących podmiotów:
Izostal SA, Megaron SA, Izolacja-Jarocin SA, GK Ferro SA, GK Śnieżka SA, GK Selen FM SA, GK Korporacja Budowlana Dom SA, GK Decora SA, Pozbud T&R SA, GK Zakłady Magnezytowe Ropczyce SA, GK Yawal SA, GK Ceramika Nowa Gala SA, Polcolorit SA, GK Rovese SA
11. Tsay, R. (2002). *Analysis of financial time series*, Wiley&Sons, Chicago

THE APPLICATION OF THE GM (1,1) GREY MODEL IN THE PREDICTION OF SHORT FINANCIAL TIME SERIES ON THE EXAMPLE OF COMPANIES IN THE CONSTRUCTION AND BUILDING MATERIALS INDUSTRY

Summary

The purpose of this article is to present the possibilities of using the first order grey model GM (1,1) in the prediction of short financial time series on the example of construction and building materials companies listed on the Stock Exchange in Warsaw (WSE). The period of analysis includes data from the years 2011-2014, whereas the forecast of sales revenue was formulated for 2015. Chapter 1 presents the essence of the GM (1,1) gray model through the description of the procedure aimed at obtaining these forecasts. Chapter 2 expands upon the subject of the research and the selection of research methods. The third chapter presents the prediction results with an analysis of the relative errors – both in relation to the variables designated ex post, as well as the actual values. The last chapter includes a synthetic discussion of the obtained results and a summary.

Keywords: grey system theory, GM (1,1), grey prediction model, construction and building materials production companies