Zenon GNIAZDOWSKI[1]

O RELACJACH MIĘDZY GRUPĄ OBROTÓW, A GRUPĄ PERMUTACJI

Streszczenie

W pracy omówiono grupę permutacji osi kartezjańskiego układu odniesienia reprezentowaną przez macierze permutacji, a także grupę obrotów kartezjańskiego układu odniesienia reprezentowaną przez transpozycje wspomnianych wyżej macierzy permutacji. Dla obydwu grup zbadano i przedyskutowano ich wzajemne relacje.

Abstract

In this paper, there are presented two groups. The first one is a permutation group of Cartesian coordinate system axes represented by permutation matrix. The second one is a group of Cartesian coordinate system rotations represented by transposition of above mentioned permutation matrix. For these groups mutual relations are considered and discussed.

1 WSTĘP

Jedną z najważniejszych struktur matematycznych jest grupa. Grupę $(G, \otimes)$ definiuje się jako zbiór G wraz z dwuargumentowym działaniem $\otimes$. Wymaga się przy tym, aby jednocześnie spełnione były następujące aksjomaty [1,2,3]:

- Grupa zawiera identycznościowy element e neutralny względem operacji $\otimes$ taki, że dla dowolnego $f \in G$ zachodzi związek: $f \otimes e = f = e \otimes f$.
- Każdemu elementowi $f \in G$ odpowiada odwrotny element $f^{-1} \in G$ taki, że $f \otimes f^{-1} = f^{-1} \otimes f = e$.
- Dla dowolnych elementów $f, g, h \in G$ zachodzi prawo łączności: $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$.

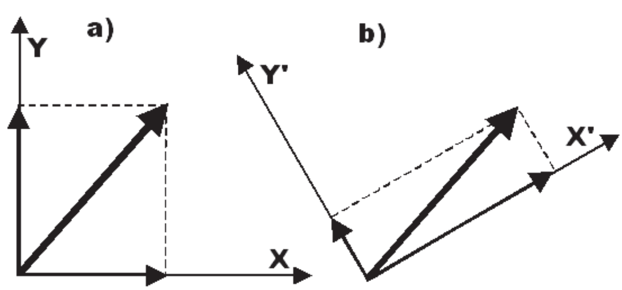
Wymaga się także, aby grupa była zamknięta ze względu na działanie $\otimes$. Oznacza to, że dla dowolnych dwóch elementów $f, g \in G$ zachodzi $(f \otimes g) \in G$. Przykładem

[1] Dr hab. inż. Zenon Gniazdowski jest profesorem Warszawskiej Wyższej Szkoły Informatyki.

grupy skończonej może być zbiór symetrii pewnego obiektu geometrycznego wraz z operacją składania tych symetrii [3]. Badanie symetrii pozwala zauważyć pewne istotne własności obiektu, czego na ogół nie dałoby się dostrzec na drodze samych tylko biernych obserwacji. Narzędziem służącym do opisu symetrii jest właśnie grupa. Innym przykładem grupy skończonej może być zbiór wszystkich permutacji zbioru n-elementowego wraz z operacją składania permutacji [1,2]. Jeszcze innym przykładem grupy – tym razem grupy ciągłej – jest zbiór obrotów układu odniesienia z operacją ich składania [3].

2 TRANSFORMACJE SKŁADOWYCH TENSORA

Zakłada się istnienie prostokątnego układu współrzędnych. Wielkości, które nie zależą od układu odniesienia są skalarami. Skalarem jest np. masa lub temperatura. Skalar jest określony przez jedną liczbę i nosi nazwę tensora zerowego rzędu. W przeciwieństwie do skalarów, pewne inne wielkości definiuje się z uwzględnieniem kierunku np. siłę $F = [F_1, F_2, F_3]$, czy natężenie pola elektrycznego $E = [E_1, E_2, E_3]$. Te wielkości noszą nazwę wektorów. Dla ustalonego układu współrzędnych, wektor jest całkowicie określony przez podanie jego trzech składowych. Te składowe, to prostopadłe rzuty wektora na poszczególne osie układu. Ujawnia się to przez odpowiednie indeksy występujące w opisie składowych wektora. Wektor nazywany jest także tensorem rzędu pierwszego [4]. W zapisie tensora jego rząd objawia się liczbą indeksów. Stąd, skalar jest tensorem rzędu zerowego i ma zero indeksów. Wektor będący tensorem rzędu pierwszego ma jeden indeks. Tensory rzędów drugiego, trzeciego i czwartego mają odpowiednio dwa, trzy i cztery indeksy. Można zatem powiedzieć, że tensor niezerowego rzędu jest złożoną wielkością, której składowe zależą od układu odniesienia. Przykładem może być wektor na płaszczyźnie (tensor rzędu pierwszego), który obserwowany w różnych układach odniesienia zawsze



Rys. 1. Zmiana składowych wektora z obrotem układu odniesienia: a) pierwotny układ odniesienia; b) obrócony układ odniesienia

pozostaje tym samym wektorem. Z obrotem układu odniesienia zmianie ulegają jego składowe (rzuty na osie układu odniesienia). Wektor na płaszczyźnie opisany jest dwoma składowymi. Jeżeli obrócić układ odniesienia, to zmienią się długości rzutów tego wektora na nowe osie układu odniesienia. W ten sposób ten sam wektor jest opisany przez inny zbiór składowych. Na Rys.1 widać, że wektor nie ulega zmianie, natomiast zmieniają się jego składowe.

2.1 Obrót układu współrzędnych

Rozważa się obrót układu współrzędnych, bez zmiany jego początku oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi. Przyjmuje się oznaczenie X_1, X_2, X_3 dla układu przed obrotem, oraz X_1', X_2', X_3' dla układu po obrocie.

Tab. 1. Tabelka cosinusów kierunkowych pomiędzy osiami przed obrotem i po obrocie

		osie przed obrotem X_1	X_2	X_3
osie po obrocie	X_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	X_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	X_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

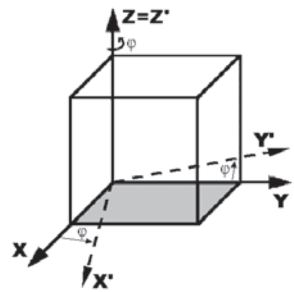
Tabelka cosinusów kierunkowych pomiędzy osiami przed obrotem, a osiami po obrocie jest przedstawiona w Tab. 1. Pierwszy indeks przy a odnosi się do osi układu po obrocie, drugi zaś do osi przed obrotem. W ten sposób a_{ij} jest cosinusem kąta pomiędzy osią X_i' a osią X_j.

2.1.1 Przykład

Zwyczajowo, zamiast oznaczenia X_1, X_2, X_3, dla układu przed obrotem, przyjmuje się oznaczenie X, Y, Z, zaś dla układu po obrocie X_1', X_2', X_3' przyjmuje się oznaczenie X', Y', Z'. Na Rys. 2 pokazano obrót kartezjańskiego układu współrzędnych o kąt φ wokół osi Z. Kąty między osiami układu odniesienia są przedstawione w Tab. 2. Kątom tym odpowiadają cosinusy kierunkowe, które są zawarte w Tab. 3. Korzystając z wzorów redukcyjnych, powyższą tabelkę cosinusów kierunkowych można sprowadzić do postaci macierzy opisującej obrót układu odniesienia wokół osi Z o kąt φ. Macierz tę można oznaczyć jako $R(Z, \varphi)$:

$$R(Z,\varphi)=\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Analogicznie, można przedstawić macierze obrotu wokół pozostałych osi.



Rys. 2. Obrót kartezjańskiego układu odniesienia wokół osi Z o kąt φ

Tab. 2. Kąty między osiami układu odniesienia przed obrotem i po obrocie

		osie przed obrotem		
		X	Y	Z
osie po obrocie	X'	φ	$\frac{\pi}{2}-\varphi$	$\frac{\pi}{2}$
	Y'	$\frac{\pi}{2}+\varphi$	φ	$\frac{\pi}{2}$
	Z'	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

Tab. 3. Cosinusy kierunkowe kątów między osiami układu odniesienia przed obrotem i po obrocie

		osie przed obrotem		
		X	Y	Z
osie po obrocie	X'	$\cos(\varphi)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
	Y'	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$	$\cos(\varphi)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
	Z'	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos(0)$

2.2 Własności macierzy transformacji

Macierz obrotu jest macierzą kwadratową o rozmiarze *3×3*. Oznaczając ją przez a otrzymuje się:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Jej składniki są od siebie wzajemnie zależne. Każdy wiersz w macierzy (2) przedstawia trzy cosinusy kierunkowe prostej w odniesieniu do ortogonalnych osi *X, Y, Z*, stąd dla i-tej osi:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}^{2} = 1. \tag{3}$$

Każda para różnych wierszy w macierzy (2) przedstawia cosinusy kierunkowe dwóch wzajemnie prostopadłych linii prostych. Dlatego, z własności iloczynu skalarnego dla wierszy *i, j* takich, że $i \neq j$:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = 0 \quad dla \quad i \neq j\ . \tag{4}$$

W formie skróconej, obydwie zależności (3) i (4) można zapisać:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}\,, \tag{5}$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & dla \quad i = j \\ 0 & dla \quad i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Wykonując mnożenie a^T przez a i korzystając z (5), otrzymuje się macierz jednostkową:

$$a^T a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ponieważ macierz jednostkowa powstaje w wyniku mnożenia dwóch macierzy odwrotnych, stąd:

$$a^T = a^{-1}. \tag{8}$$

Dodatkowo, dla wyznacznika macierzy obrotu zachodzi dodatkowa zależność:

$$\det(a) = \pm 1. \tag{9}$$

Gdy obrót prowadzi do zmiany prawoskrętności układu odniesienia na jego lewoskrętność, wyznacznik jest równy –1, w przypadku braku takiej zmiany jego wartość jest równa jedności [4].

2.3 Prawa transformacji tensorów

Jeżeli znany jest zbiór elementów składowych wektora przed transformacją, a także znana jest transformacja, to można znaleźć zbiór składowych opisujących wektor w nowym układzie współrzędnych. Ponieważ składowe elementy wektora zależą od układu odniesienia, to także składniki tensora rzędu drugiego, trzeciego i czwartego także zależą od układu odniesienia. Aby rozwiązać problem zmiany składowych tensora ze zmianą układu odniesienia, najpierw potrzeba opisać transformację układu odniesienia, a potem transformację danego tensora.

Tab. 4. Prawa transformacji tensorów

Rząd tensora	Nowe składowe wyrażone przez stare	Uwaga
0	$\varphi' = \varphi$	Skalar
1	$T'_i = \sum_j a_{ij} T_j$	Wektor
2	$T'_{ij} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} T_{kl}$	
3	$T'_{ijk} = \sum_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$	
4	$T'_{ijkl} = \sum_{mnop} a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} T_{mnop}$	

W pewnym kartezjańskim układzie odniesienia rozważa się wektor $T = [T_1, T_2, T_3]^T$. Jeżeli układ odniesienia zostanie poddany transformacji opisanej macierzą (2), to nowy układ współrzędnych będzie miał osie X', Y', Z'. W tym nowym układzie, wektor T będzie postrzegany jako wektor T' z nowymi współrzędnymi $T' = [T_1', T_2', T_3']^T$. Zmiana składowych wektora po transformacji jest opisana następującym równaniem:

$$T'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} T_j \; . \tag{10}$$

W Tab. 4 przedstawiono prawa transformacji tensorów począwszy od tensora rzędu zerowego (skalara) aż do tensora czwartego rzędu [4].

2.4 Składanie transformacji

Niekiedy istnieje potrzeba znalezienia elementów składowych tensora, w przypadku wielokrotnych obrotów układu odniesienia. W tym celu należy znaleźć wypadkową macierz cosinusów kierunkowych, wynikającą z nakładania się kolejnych obrotów. Ponieważ w wyrażeniu na składowe obróconego wektora bezpośrednio występuje macierz cosinusów kierunkowych, to dokonując wielu kolejnych obrotów wektora, można znaleźć macierz wypadkową, która jest jednocześnie macierzą cosinusów kierunkowych dla wypadkowej zmiany układu współrzędnych.

Prawa strona równania (10) jest równoważna zwykłemu mnożeniu macierzy kwadratowej a przez wektor x:

$$x' = ax. \tag{11}$$

Analogicznie, jeżeli dalej obracać układ odniesienia zgodnie z macierzą obrotu b, to, wektor x' przejdzie w wektor x'' zgodnie z zależnością:

$$x'' = bx'. \tag{12}$$

Podstawiając za x' prawą stronę ze wzoru (11), otrzymuje się:

$$x'' = bax. \tag{13}$$

Korzystając z prawa łączności dla mnożenia macierzy można napisać:

$$x'' = (ba)x. \tag{14}$$

Jeżeli wypadkową macierz obrotu oznaczyć jako w, to odpowiednie wyrażenie ma postać:

$$x'' = wx = (ba)x. \tag{15}$$

Jak widać, złożenie dwóch kolejnych transformacji – najpierw transformacji opisanej macierzą a, a potem transformacji opisanej macierzą b – daje wypadkową macierz transformacji w:

$$w = ba. \tag{16}$$

Powyższe rozumowanie można uogólnić na dowolną ilość obrotów. Dla trzech kolejnych obrotów opisanych macierzami najpierw a, potem b, a na końcu c, wypadkowa macierz obrotu ma postać:

$$w = cba. \tag{17}$$

2.5 Grupa obrotów

Można zauważyć, że dla obrotów układu odniesienia są spełnione następujące warunki:

- Pośród wszystkich obrotów, istnieje obrót neutralny względem operacji składania obrotów. Jest to obrót o kąt zerowy (obrót identycznościowy), opisany macierzą jednostkową;
- Dla każdego obrotu istnieje obrót przeciwny (dopełniający) taki, że złożenie danego obrotu i obrotu do niego przeciwnego daje obrót identycznościowy. Macierz obrotu przeciwnego jest macierzą odwrotną do macierzy danego obrotu. Jest to jednocześnie transpozycja danej macierzy obrotu (wzory 7 i 8);

- Składanie obrotów jest opisane jako mnożenie macierzy (wzory 16 i 17). Mnożenie macierzy jest łączne, dlatego operacja składnia obrotów jest także operacją łączną;
- Złożenie dowolnych obrotów jest także obrotem (wzory 16 i 17).

Warunki te dowodzą, że dla obrotu układu odniesienia spełnione są wszystkie aksjomaty grupy, a zatem: zbiór wszystkich obrotów układu odniesienia jest grupą. Jest to tak zwana ciągła grupa Liego [3].

3 PERMUTACJE

Permutacja n-elementowego zbioru X jest to dowolna wzajemnie jednoznaczna funkcja $f : X \to X$ [1]. W dalszej części pracy, własności permutacji będą przedstawiane na przykładach. Bez straty ogólności, przykłady zostaną ograniczone do przypadku permutacji zbioru składającego się z pięciu elementów: $X = \{1,2,3,4,5\}$.

Dla danego zbioru X, przykładem permutacji może być następująca funkcja: $f(1) = 5$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$, $f(5) = 4$. Funkcję tę można przedstawić w następujący sposób:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Inny przykład permutacji może wyglądać następująco:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

W zapisie (18) i (19), górny wiersz jest wierszem argumentów funkcji, zaś wiersz dolny – wierszem wartości tej funkcji. Zapis ten – dla odróżnienia od innych sposobów przedstawiania permutacji – będzie dalej nazywany postacią normalną permutacji.

3.1 Składanie permutacji

Permutacje można składać. Złożenie dwóch permutacji jest także permutacją. Złożeniem przedstawionych wyżej permutacji f i g jest następująca permutacja:

$$f \cdot g = f(g(i)). \tag{20}$$

Składanie permutacji nazywa się także mnożeniem permutacji. Korzystając ze wzoru (20), wynik złożenia permutacji $f \cdot g$ ma następującą postać:

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

podobnie:

$$g \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Z (21) i (22) widać, że w ogólności:

$$f \cdot g \neq g \cdot f, \tag{23}$$

a to oznacza, że mnożenie permutacji nie jest operacja przemienną. Operacja ta jest natomiast operacją łączną [1,2]:

$$f \cdot (g \cdot \ h) = (f \cdot g) \cdot h. \tag{24}$$

3.2 Permutacja jednostkowa

W zbiorze permutacji istnieje permutacja e neutralna względem operacji mnożenia permutacji. Jest to tzw. permutacja jednostkowa:

$$f \cdot e = e \cdot f. \tag{25}$$

Dla zbioru pięcioelementowego jej postać jest następująca:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

3.3 Permutacja odwrotna

Dla dowolnej permutacji n-elementowej f istnieje permutacja odwrotna f^{-1} taka, że:

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e. \tag{27}$$

Jeżeli np. w permutacji (18) $f(1) = 5$, to w permutacji odwrotnej $f^{-1}(5) = 1$, podobnie: $f(2) = 3$ i $f^{-1}(3) = 2$. W permutacji odwrotnej następuje zamiana wartości funkcji z jej argumentami. Ostatecznie permutacja odwrotna do permutacji f opisanej zależnością (18) ma następującą postać:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

3.4 Sposoby reprezentacji permutacji

Przedstawiony sposób reprezentacji permutacji nie wyczerpuje wszystkich możliwości. Poza wspomnianymi opisem normalnym istnieją inne formy reprezentacji permutacji.

3.4.1 Cykliczna postać permutacji

Permutację (18) można także przedstawić, w postaci cyklu. Dla argumentu równego 1, wartością funkcji f jest liczba 5. Dla argumentu równego 5, wartość funkcji f wynosi 4. Dla argumentu równego cztery – wartość funkcji jest równa 1. Inaczej mówiąc: 1 przechodzi w 5, 5 przechodzi w 4, 4 przechodzi w 1. Tutaj zamyka się cykl, gdyż 1 znów przechodzi w 5. Używając zamiast słowa „przechodzi" strzałek, można napisać: $1 \to 5$, $5 \to 4$ oraz $4 \to 1$. Podobnie: $2 \to 3$ oraz $3 \to 2$. W skrócie permutację f można zapisać jako złożenie dwóch cykli:

$$f = (1,5,4)(2,3). \tag{29}$$

Permutacja jednostkowa (26) w zapisie cyklicznym ma postać:

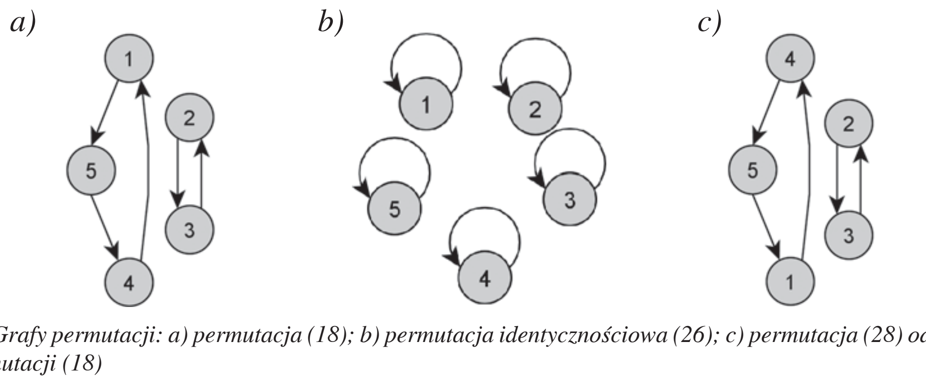
$$e = (1)(2)(3)(4)(5). \tag{30}$$

Permutacja (28) odwrotna do permutacji f ma cykle zawierające identyczne elementy jak cykle w permutacji f, zaś wewnątrz każdego cyklu odwrócona jest kolejność elementów:

$$f^{-1} = (1,4,5)(2,3). \tag{31}$$

3.4.2 Graf permutacji

Permutację (18) przedstawioną jako złożenie dwóch cykli można przedstawić w formie grafu składającego się z dwóch cykli. Na Rys. 3a pokazano postać tego grafu[2]. Analogicznie, na Rys. 3b pokazano graf permutacji identycznościowej (26), zaś na Rys. 3c – graf permutacji (28), odwrotnej do permutacji f. Można zauważyć, że grafy permutacji f i jej odwrotności różnią się tylko zwrotem strzałek w łukach tworzących cykle.



Rys. 3. Grafy permutacji: a) permutacja (18); b) permutacja identycznościowa (26); c) permutacja (28) odwrotna do permutacji (18)

[2] Do narysowania grafów korzystano z programu yEd Graph Editor ver. 2.4.2.2, pobranego ze strony: http://www.yworks.com

3.4.3 Macierz permutacji

Graf permutacji może być jednoznacznie reprezentowany w postaci macierzy sąsiedztwa. Ze względu na tę jednoznaczność, w dalszej części niniejszej pracy macierz sąsiedztwa grafu permutacji będzie nazywana macierzą permutacji. Dla ustalenia uwagi, dla danej permutacji x jej macierz będzie dalej oznaczana jako $mat(x)$ lub wielką literą X. I tak, dla permutacji (18), macierz zbudowana w oparciu o graf przedstawiony na Rys. 3a, ma następującą postać:

$$mat(f) = F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

analogicznie, dla (19) macierz permutacji ma postać:

$$mat(g) = G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Wynik mnożenia macierzy (32) przez macierz (33) jest następujący:

$$F \cdot G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

analogicznie, w drugą stronę:

$$G \cdot F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

W wyniku mnożeń (34) oraz (35) otrzymano macierze permutacji odpowiednio (22) i (21). Wynika stąd wniosek, że mnożenie permutacji można zastąpić odpowiednim mnożeniem macierzy:

$$f \cdot g = f(g(i)) \Leftrightarrow G \cdot F\,, \tag{36}$$

oraz:

$$g \cdot f = g(f(i)) \Leftrightarrow F \cdot G\,. \tag{37}$$

Macierz permutacji identycznościowej (26) jest macierzą jednostkową:

$$mat(e) = E = I \tag{38}$$

Dla grafu permutacji (28) odwrotnej do f odpowiednia macierz ma postać:

$$mat\left(f^{-1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Porównując (32) z (39) można zauważyć, że:

$$mat(f^{-1}) = (mat(f))^T = F^T. \tag{40}$$

Wynika to z faktu, że grafy permutacji danej oraz permutacji odwrotnej mają łuki skierowane przeciwnie, co przejawia się we wzajemnej transpozycji ich macierzy sąsiedztwa. Jeżeli macierze (32) i (39) zostaną przez siebie pomnożone, to w wyniku otrzymuje się macierz jednostkową:

$$F^T F = I. \tag{41}$$

Stąd wynika wniosek, że transpozycja macierzy permutacji f, będąca macierzą permutacji odwrotnej jest odwrotnością macierzy permutacji f:

$$F^T = F^{-1}. \tag{42}$$

3.5 Własności macierzy permutacji

Macierz permutacji zbioru n-elementowego jest zero-jedynkową kwadratową macierzą, która w każdym wierszu i każdej kolumnie zawiera dokładnie jedną jedynkę. Poza własnością (42), zachodzą także inne własności. I tak, dla *i-tego* wiersza można zapisać:

$$\sum_k F_{ik} F_{ik} = 1. \tag{43}$$

Tymczasem, dla wierszy różnych parami:

$$\sum_k F_{ik} F_{jk} = 0 \quad dla \quad i \neq j \tag{44}$$

własności (43) i (44) można skrótowo zapisać:

$$\sum_k F_{ik} F_{jk} = \delta_{ij}, \tag{45}$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera (6). Dodatkowo, dla wyznacznika macierzy permutacji zachodzi zależność:

$$\det(F) = \pm 1. \tag{46}$$

Dla permutacji parzystej wyznacznik jest dodatni, dla permutacji nieparzystej – ujemny.

3.6 Grupa permutacji

Dla zbioru permutacji wraz z operacją ich składania, spełnione następujące warunki:

- W zbiorze permutacji istnieje permutacja identycznościowa, neutralna względem operacji mnożenia permutacji;
- Dla każdej permutacji f istnieje permutacja odwrotna f^{-1};
- Składanie permutacji jest operacją łączną;
- Zbiór permutacji jest zamknięty ze względu na operację mnożenia permutacji: dla dowolnych dwóch permutacji f i g ich złożenie jest także permutacją.

Oznacza to, że zbiór permutacji wraz z operacją ich składania jest grupą [1,2].

4 RELACJA POMIĘDZY GRUPAMI OBROTÓW I PERMUTACJI

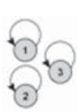
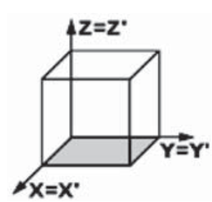
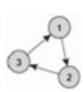
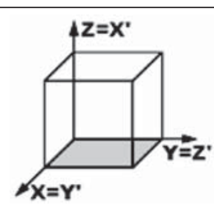
Macierz sąsiedztwa grafu permutacji ma własności (45), (42) oraz (46), identyczne jak własności (5), (8) oraz (9) macierzy obrotu. Jeżeli rozważać permutację zbioru trzyelementowego, to także rozmiar macierzy będzie identyczny. Oznacza to, że każda macierz permutacji zbioru trzyelementowego jest jednocześnie macierzą pewnego obrotu. W związku z tym można zadać pytanie o wzajemne związki pomiędzy układem odniesienia otrzymanym w wyniku permutacji jego osi, a układem otrzymanym w wyniku obrotu zdefiniowanego macierzą tej samej permutacji.

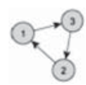
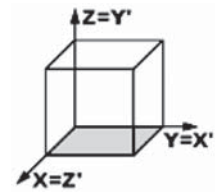
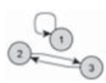
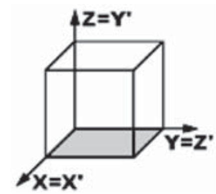
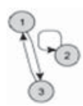
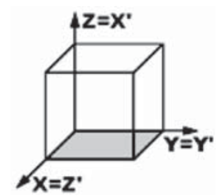
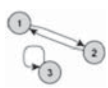
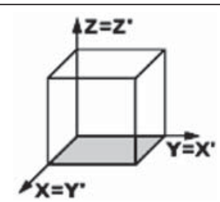
Pojawia się jednak problem z różną interpretacją numerów wierszy oraz kolumn w macierzy permutacji i obrotu. Jedynka w *i-tym* wierszu i w *j-tej* kolumnie macierzy permutacji oznacza, że w grafie istnieje łuk skierowany od węzła i do j. Oznacza to, że *i-ta* oś układu odniesienia w wyniku permutacji stała się osią *j-tą*: numery wierszy w macierzy oznaczają stare osie (przed permutacją), zaś numery kolumn – nowe osie (po permutacji). Tymczasem w macierzy transformacji (zgodnie z Tab. 1), numery wierszy oznaczają osie nowe, zaś numery kolumn oznaczają osie stare. Aby to uzgodnić, należy problem zmodyfikować, formułując pytanie w następujący sposób: *Jakie są wzajemne związki pomiędzy układem odniesienia otrzymanym w wyniku permutacji jego osi, a układem otrzymanym w wyniku obrotu zdefiniowanego transpozycją macierzy tej samej permutacji?*

4.1 Permutacje osi układu odniesienia

Rozważa się permutację osi kartezjańskiego układu odniesienia. Trzy osie można opisać jako permutacje trzech liczb 1,2 i 3 przypisanych odpowiednio osiom X, Y i Z. Zbiór 3-elementowy ma 3!=6 permutacji, które są przedstawione w Tab. 5. Dla danej permutacji opisanej w formie podstawowej i w formie cyklu narysowano także jej graf oraz przedstawiono macierz sąsiedztwa tego grafu, a także wynik permutacji osi. W przedostatniej kolumnie pokazano wartość wyznacznika macierzy jako miarę parzystości (równy 1) lub nieparzystości (równy -1) permutacji. Graf obrazuje, co się dzieje z osiami. Np. w wierszu 5 widać, że oś X staje się nową osią Z, zaś oś Z – nową osią X. Oś Y nie ulega zamianie. Ponieważ wyznacznik macierzy równy jest -1, oznacza to, że jest to permutacja nieparzysta. Parzystość permutacji prowadzi do prawoskrętnego układ odniesienia, zaś nieparzystość, do układu lewoskrętnego.

Tab. 5. Permutacje osi kartezjańskiego układu odniesienia

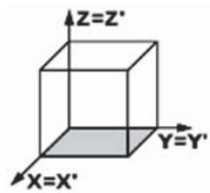
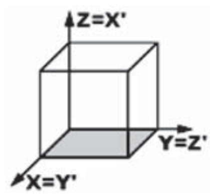
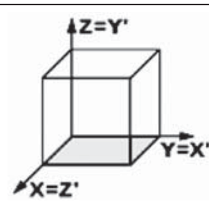
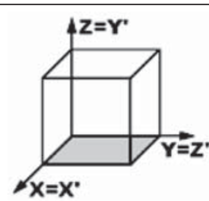
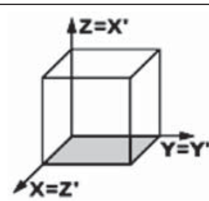
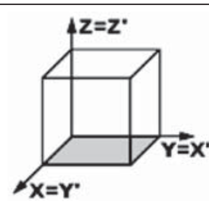
L.p.	Permutacja	Permutacja w postaci cyklu oraz jej graf	Macierz permutacji	Reprezentacja permutacji osi kartezjańskiego układu odniesienia	Wyznacznik macierzy permutacji	Oznaczenie
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	(1)(2)(3) 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		1	e
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	(1,2,3) 	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		1	a

3.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	(1,3,2) 	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$		1	b
4.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	(1)(2,3) 	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$		-1	c
5.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	(1,3)(2) 	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$		-1	d
6.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$	(1,2)(3) 	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$		-1	f

4.2 Obroty osi układu odniesienia

Rozważa się macierze cosinusów kierunkowych opisujące obroty układu odniesienia, otrzymane w wyniku transpozycji macierzy permutacji zbioru trzyelementowego. Macierze te przedstawiono w drugiej kolumnie Tab. 6. Dla danych macierzy obrotu przedstawiono odpowiadającą im macierz kątów pomiędzy osiami (kolumna trzecia). W kolumnie czwartej przedstawiono skutki obrotu. W przedostatniej kolumnie pokazano wartość wyznacznika macierzy cosinusów kierunkowych. Przy dodatnim wyznaczniku nie ma zamiany prawoskrętności układu na jego lewoskrętność. Wyznacznik ujemny wskazuje te obroty, w wyniku których nastąpiło przejście od prawoskrętnego do lewoskrętnego układu odniesienia.

Tab. 6. Obroty układu odniesienia

L.p.	Transpozycja macierzy permutacji jako macierz cosinusów kierunkowych	Kąty [stopnie]	Reprezentacja transformacji osi kartezjańskiego układu odniesienia	Wyznacznik macierzy cosinusów	Oznaczenie
1.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 90 & 90 \\ 90 & 0 & 90 \\ 90 & 90 & 0 \end{bmatrix}$		1	e
2.	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 90 & 90 & 0 \\ 0 & 90 & 90 \\ 90 & 0 & 90 \end{bmatrix}$		1	a
3.	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 90 & 0 & 90 \\ 90 & 90 & 0 \\ 0 & 90 & 90 \end{bmatrix}$		1	b
4.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 90 & 90 \\ 90 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \end{bmatrix}$		-1	c
5.	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 90 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 90 \end{bmatrix}$		-1	d
6.	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 90 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 90 \\ 90 & 90 & 0 \end{bmatrix}$		-1	f

4.3 Równoważność permutacji i obrotów

Na postawione wyżej pytanie dotyczące wzajemnego związku pomiędzy układami odniesienia otrzymanymi najpierw wyniku permutacji osi, a potem w wyniku obrotu opisanego macierzą będącą transpozycją odpowiedniej macierzy permutacji, odpowiedzi można udzielić po analizie wyników tych operacji przedstawionych w Tab. 5 oraz Tab. 6. Pokazane tam wyniki wskazują, że w obydwu przypadkach uzyskano identyczne konfiguracje osi układu odniesienia. Oznacza to, że realne skutki obydwu operacji są tożsame. Pozostaje jeszcze sprawdzić, czy istnieją jakieś różnice lub podobieństwa pomiędzy formalnym opisem obydwu operacji. W tym celu rozważa się składanie dwóch permutacji. Permutacja pierwsza oznaczona jako a, opisana jest macierzą A. Permutacja druga oznaczona jako b, opisana macierzą B. Na podstawie (36) oraz (37), składanie obydwu permutacji można opisać jako mnożenie macierzy:

$$b(a(i)) = ba \Leftrightarrow A \cdot B. \tag{47}$$

Z drugiej strony, rozważa się złożenie dwóch obrotów: najpierw obrotu odpowiadającego permutacji a opisanego macierzą A^T, a następnie obrotu odpowiadającego permutacji b opisanego macierzą B^T. Na podstawie (16), wypadkowy obrót można zapisać jako iloczyn $B^T A^T$.

Tymczasem, ponieważ macierz obrotu jest transpozycją macierzy permutacji, to także transpozycja wypadkowej macierzy (47) składania dwóch permutacji powinna być macierzą wypadkowego obrotu równoważnego złożeniu obrotów a i b. Stąd także powinna zachodzić tożsamość:

$$B^T A^T = (AB)^T. \tag{48}$$

Ponieważ na mocy praw algebry liniowej tożsamość ta jest prawdziwa [5], dlatego zachodzi nie tylko równoważność pomiędzy permutacją, a obrotem opisanym transpozycją macierzy permutacji, lecz taki sam związek zachodzi pomiędzy złożeniem dwóch obrotów, a obrotem opisanym jako transpozycja macierzy będącej macierzą wypadkową złożenia tych permutacji.

Na rozważany problem można spojrzeć jeszcze inaczej. Ponieważ permutacje zbioru trzyelementowego wraz z operacją ich składania są grupą, to przyjmując oznaczenia jak w ostatniej kolumnie Tab. 5, można zbudować tabelkę działań dla tej grupy. Analogicznie można postąpić z obrotami opisywanymi w Tab. 6. Przy oznaczeniach jak w ostatnich kolumnach Tab. 5 i Tab. 6 otrzymuje się tabelkę działań wspólną dla obydwu grup[3], przestawioną w Tab. 7. Tabelka ta pokazuje, że grupa permutacji osi układu odniesienia i grupa obrotów układu odniesienia opisanych jako transpozycje

[3] Dodatkowo można zauważyć, że permutacje parzyste (obroty niepowodujące zmiany prawoskrętności układu odniesienia) oznaczone jako e, a oraz b, same tworzą grupę będącą podgrupą omawianych tu permutacji (obrotów).

macierzy permutacji są wzajemnie izomorficzne. Izomorfizm ten wynika z twierdzenia Cayleya [1], mówiącego o tym, że każda grupa skończona (tu: rozważana grupa obrotów opisanych transpozycją macierzy permutacji) jest izomorficzna z podgrupą pewnej grupy permutacji (tu: grupa permutacji osi kartezjańskiego układu odniesienia). Można powiedzieć, że izomorfizm jest widoczny nie tylko na poziomie operacji macierzowych, lecz także na poziomie tabelki działań dla grup (tab. Cayleya). Obydwa te uzasadnienia dotyczą strony formalnej zagadnienia. Jak widać równoważności ich formalnego opisu towarzyszy równoważność skutków obydwu operacji.

Tab. 7. Tabelka działań dla grup z Tab. 5 i Tab. 6

⊗	**e**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
e	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*
a	*a*	*b*	*e*	*f*	*c*	*d*
b	*b*	*e*	*a*	*d*	*f*	*c*
c	*c*	*d*	*f*	*e*	*a*	*b*
d	*d*	*f*	*c*	*b*	*e*	*a*
f	*f*	c	d	a	b	e

5 DYSKUSJA

W pracy przeanalizowano własności macierzy opisującej obrót kartezjańskiego układu odniesienia i macierzy permutacji. Stwierdzono, że własności te są identyczne, co oznacza, ze macierz permutacji jest jednocześnie pewną macierzą obrotu. Wobec tego pojawiło się pytanie, w jakim stopniu różnią się bądź są podobne układy odniesienia otrzymane najpierw w wyniku permutacji osi, a potem w wyniku obrotu opisanego macierzą będącą transpozycją odpowiedniej macierzy permutacji. Dla znalezienia odpowiedzi na to pytanie, zbadano wszystkie permutacje osi (Tab. 5) oraz odpowiadające im obroty (Tab. 6). W obydwu przypadkach uzyskano identyczne konfiguracje osi układu odniesienia.

W pracy pokazano także, że na poziomie opisu matematycznego zaobserwowana identyczność ma swoje potwierdzenie zarówno w opisie algebraicznym jak i w opisie w postaci tabelki działań dla grup (Tab. 7). W ten sposób stwierdzono, że odpowiednia grupa permutacji jest izomorficzna z odpowiednią grupą obrotów. Powyższy izomorfizm jest wyjaśniony przez twierdzenie Cayleya.

Dla zbioru n-elementowego, liczba różnych permutacji tego zbioru wynosi *n!*. Permutacje te są reprezentowane przez *n!* różnych macierzy. Dla zbioru trzyelementowego liczba macierzy reprezentujących permutacje redukuje się do sześciu. Macierz permutacji ma charakter macierzy relacyjnej, na zasadzie: zachodzi związek lub nie.

W odniesieniu do wybranych osi kartezjańskiego układu współrzędnych można to wyrazić w następujący sposób: oś *i-ta* staje się osią *j-tą* lub nie. Tymczasem, macierz obrotu ma inną interpretację. Zawiera ona cosinusy kątów między osiami. Wszystkich możliwych macierzy obrotu jest nieskończenie wiele (continuum). W omawianym przypadku rozważa się tylko pewien skończony (sześcioelementowy) podzbiór tych macierzy. Zbiory sześciu macierzy kwadratowych o rozmiarze 3×3 reprezentują zarówno permutacje zbioru trzyelementowego (problem dyskretny) jak i obrót kartezjańskiego układu odniesienia (problem o charakterze ciągłym). Macierze w obydwu zbiorach – z dokładnością do transpozycji – są identyczne. Różna jest ich natura. Te identyczne macierze w wyniku permutacji oraz odpowiadających im obrotów dają identyczne konfiguracje układów odniesienia. Otwarte pozostaje pytanie, dlaczego pomimo różnej natury, wspomniane macierze wyrażają to samo? Dlaczego efekt permutacji osi układu odniesienia jest identyczny jak efekt obrotu układu odniesienia opisanego transpozycją macierzy permutacji? Odpowiedź na to pytanie wykracza poza zakres niniejszej pracy, a raczej wymaga kompetencji filozoficznych.

Pod dyskusję można poddać jeszcze jedno spojrzenie na badany problem. Jest to spojrzenie od strony języka. Opisany izomorfizm przedstawia formalną równoważność pomiędzy opisem permutacji i odpowiednich obrotów. Równoważność tę na poziomie języka można nazwać równoważnością syntaktyczną. Tymczasem, zachodzi także równoważność skutków obydwu operacji (permutacji i obrotów), a więc zachodzi zgodność tych operacji na poziomie treści języka, czyli jego semantyki. Zatem można powiedzieć, że twierdzenie Cayleya wyjaśnia równoważność syntaktyczną. Niestety, dla równoważności semantycznej brakuje wyjaśnienia. Wygląda na to, że ten typ równoważność mógłby być wyjaśniany na gruncie filozofii.

Pojawia się także kolejne pytanie, dotyczące możliwości uogólnienia przedstawionych wyżej wyników na dowolny wymiar przestrzeni. W pracy pokazano równoważność permutacji i odpowiednich obrotów dla przestrzeni trójwymiarowej. Należy postawić pytanie, czy także w przestrzeni ponad trzywymiarowej, pomiędzy permutacjami a odpowiednimi przekształceniami ortogonalnej bazy, zachodzą stosowne równoważności? Powyższy problem wychodzi poza zakres niniejszej pracy, dlatego powinien być osobno zbadany.

Literatura

1. Gleichgewicht B.: *Elementy algebry abstrakcyjnej*. PZWS, Warszawa 1966
2. Ross K.A., Wright C.R.B.: *Matematyka Dyskretna*, PWN, Warszawa 2003
3. Steen L. A., Red.: *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*. WNT, Warszawa 1983
4. Nye J. F.: *Własności fizyczne kryształów w ujęciu tensorowym i macierzowym*, PWN, Warszawa 1962
5. Kiełbasiński A., Schwetlick H.: *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa 1992