

Zastosowanie optymalizacji topologicznej w projektowaniu konstrukcji żelbetowych z wykorzystaniem modeli "Strut and Tie"

Karol Bolbotowski¹, Michał Knauff², Tomasz Sokół³

*Instituto Inżynierii Budowlanej, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska,
e-mail: k.bolbotowski@il.pw.edu.pl¹, m.knauff@il.pw.edu.pl², t.sokol@il.pw.edu.pl³.*

Streszczenie:

Poglądowa, oparta na analizie kratownic idea modeli Strut and Tie sprawia, że są one często stosowane w praktyce. Zbudowanie modelu dobrze zgadzającego się z rzeczywistą pracą konstrukcji czasem bywa trudnym zadaniem. Tak np. rozpatrzony w referacie model naroża ramy przedstawiony w normie [7] i w pracy [8] może budzić zastrzeżenia. W niniejszej pracy zaproponowano metodę generowania modeli ST przy użyciu optymalizacji topologii kratownicy, rozpatrując zagadnienie minimalizacji objętości prętów rozciąganych modelu. Stworzono oprogramowanie wykorzystujące algorytm konstrukcji bazowej, w którym wprowadzono pewien sposób uwzględniania kosztu węzłów, co pozwoliło na uzyskiwanie optymalnych kratownic o racjonalnie małej liczbie prętów (w odróżnieniu od konstrukcji Michella). Dodatkowo zaimplementowano algorytmy pozwalające spełnić odpowiednie wytyczne Eurokodu 2. Korzystając z oprogramowania zaproponowano alternatywę dla modelu naroża ramy z teje normy uzyskując znaczne oszczędności stali zbrojeniowej. Dzięki programowi rozwiązano także szereg innych płaskich zagadnień z dziedziny konstrukcji żelbetowych.

Słowa kluczowe: modele Strut and Tie, konstrukcje żelbetowe, projektowanie według Eurokodu 2, naroża ramy, optymalizacja topologiczna, kratownice Michella.

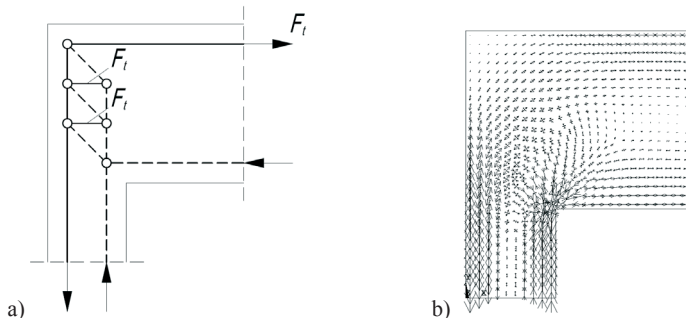
1. Wprowadzenie

Ideą metody Strut and Tie (ST) jest przybliżenie złożonego pola naprężeń w elemencie żelbetowym przez zastosowanie modelu - płaskiej kratownicy, w której pręty rozciągane reprezentują zbrojenie, a pręty ściskane odwzorowują rozkład naprężeń ściskających w betonie. Idea aproksymowania rozkładu sił w żelbecie przez kratownice jest bardzo stara. W artykule [8], opracowanym przez naukowców, którzy byli wśród pionierów tej metody, można zapoznać się z dzisiejszymi, rozwiniętymi formami tej idei. Zasady modelowania ST znajdują się w normach jak np. w Eurokodzie [7], w przepisach American Concrete Institute i w wielu podręcznikach. Zwykle główny nacisk kładzie się na stan graniczny nośności konstrukcji. W Eurokodzie metoda ST została zakwalifikowana do metod plastycznych. Nośność konstrukcji jest szacowana od dołu poprzez nośność kratownicy.

Modele ST służą nie tylko do analizy, lecz także, a może przede wszystkim, do projektowania konstrukcji. Eurokod 2 oraz literatura nie podają ogólnej metody pozwalającej jednoznacznie określić kształt kratownicy, sugerują natomiast, aby przy budowie modeli opierać się na polu naprężeń, będącym rozwiązaniem zadania liniowej teorii sprężystości jednorodnej, izotropowej tarczy (dalej nazywanym rozwiązaniem sprężystym). Można wziąć pod uwagę redystrybucję naprężeń spowodowaną zarysowaniem betonu oraz uplastycznieniem materiałów.

Eurokod 2 oraz literatura zawierają liczne propozycje przykładowych modeli ST niektórych konstrukcji, lub elementów konstrukcji żelbetowych. Model, który stosuje się do naroża obciążonego momentem w ramie, w której wysokość rygla przekracza ponad dwukrotnie szerokość słupa przedstawiono na Rys. 1.1. Obok pokazano krzywe naprężeń głównych z rozwiązania sprężystego, uzyskanego metodą elementów skończonych w programie Ansys. Pręty modelu ST (szczególnie pręty rozciągane) znacznie odbiegają od

kierunków naprężeń głównych. Ponadto duża część modelu pokrywa obszar zewnętrznego narożnika, gdzie naprężenia główne w rozwiązaniu sprężystym są znikome. Omawiany model zakłada, że nieliniowości rozkładu naprężenia występują jedynie w strefie przecięcia słupa z ryglem, natomiast na podstawie rozwiązania sprężystego można domniemywać, że zaburzenie pola naprężeń sięga na znaczną odległość (rzędu szerokości słupa) w głąb rygła. Z analizy równowagi kratownicy wynika, że siła we wszystkich rozciąganych prętach poziomych jest taka sama, a więc równa sile w górnym zbrojeniu rygła. Siła ta jest zazwyczaj znaczna i biorąc pod uwagę konieczność zakotwienia zbrojenia poza węzłami generuje dużą ilość stali zbrojeniowej w narożu.



Rys. 1.1 a) Model ST naroża obciążony momentem według Eurokod 2 (pręty ściskane – linia przerywana); b) krzyże naprężeń głównych w zadaniu liniowej teorii sprężystości.

Omówiony powyżej przykład jest dobrą ilustracją problemów z budową modeli ST, o których była mowa na wstępie. Celem niniejszej pracy jest opracowanie metody umożliwiającej obiektywne, automatyczne tworzenie modeli ST dla szerokiej klasy tarczowych konstrukcji żelbetowych poprzez rozwiązanie zadania optymalizacji topologii.

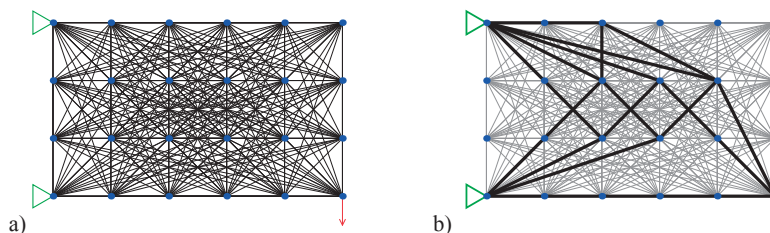
Przez optymalizację topologiczną w mechanice ciała stałego rozumie się dobór rozkładu materiału w obszarze projektowym, który realizuje minimum określonej wielkości w konstrukcji. Zastosowanie optymalizacji topologii w konstrukcjach żelbetowych było tematem prac [1,2,6,11]. M. Bruggi w pracy [2] poprzez rozwiązywanie zadania minimalizacji podatności (energii sprężystej) kontinuum z wykorzystaniem MES, uzyskuje rozkład materiału przypominający kratownicę, na podstawie której proponowany jest model ST. Rozpatrywany jest jednorodny, izotropowy materiał liniowo sprężysty. W pracy [11] autorstwa M. Victoria, O.M. Querin, P. Martí proponowane jest podobne podejście, lecz rozróżnione są właściwości materiału przy rozciąganiu i ściskaniu, co pozwoliło na uzyskanie modeli ST wymagających mniejszego zużycia stali zbrojeniowej. Y. Luo i Z. Kang [6] rozpatrzyli zadanie optymalizacji rozkładu dwóch materiałów w konstrukcji – stali zbrojeniowej oraz betonu, przy czym wzięto pod uwagę uplastycznienie betonu stosując hipotezę Druckera-Pragera. Podejście to nie pozwala jednak na uwzględnienie zarysowania betonu, stąd autorzy kierują swoje rezultaty w stronę projektowania konstrukcji, w których wymagany jest brak zarysowania. W pracy O. Amira oraz O. Sigmunda [1] beton reprezentowany jest przez kontinuum wypełniające całą konstrukcję, natomiast zbrojenie modelowane jest przez pręty przenoszące tylko siły podłużne, zanurzone w betonie i współpracujące z nim przez przyczepność. Zadanie optymalizacji polega na doborze rozkładu prętów zbrojeniowych w obszarze projektowym, a więc w dużym stopniu odpowiada rzeczywistemu projektowaniu konstrukcji żelbetowej. Niemniej jednak, podobnie jak w pracy [6], zarysowanie betonu nie jest uwzględnione.

W omówionych wyżej artykułach rozpatrywano zadanie minimalizacji podatności konstrukcji kontynualnych. W pracach [2,11] model ST budowano dopiero na podstawie rozwiązań tego zadania. Takie podejście nie gwarantuje spełnienia warunków ograniczających naprężenia w prętach i węzłach modelu. W naszej pracy zagadnienie optymalizacji topologii dotyczy konstrukcji, która z definicji jest kratownicą. Rozpatrzono zadanie minimalizacji objętości prętów rozciąganych modelu, przy ograniczeniu naprężeń zarówno w prętach rozciąganych, jak i ściskanych.

2. Sformułowanie zadania optymalizacji topologii kratownicy

2.1. Metoda konstrukcji bazowej

Najbardziej popularnym narzędziem używanym w klasycznie sformułowanym zadaniu optymalizacji topologii kratownicy jest metoda konstrukcji bazowej (ang. *ground structure*). W obszarze projektowym znajduje się wstępna, gęsta kratownica zwana konstrukcją bazową. Węzły kratownicy są zdefiniowane na stałe, nie mogą zmieniać położenia w procesie optymalizacji. Przykład konstrukcji bazowej do zagadnienia wspornika obciążonego siłą pionową pokazano na Rys. 2.1a (mała liczba węzłów ze względu na poglądowość). Zadanie optymalizacji polega na doborze pól przekroju A_i prętów kratownicy bazowej tak, aby konstrukcja realizowała minimum pewnej funkcji celu oraz spełniała odpowiednie ograniczenia. Na Rys. 2.1b przedstawiono kratownicę o minimalnej objętości przy ograniczeniu naprężeń w prętach. Należy zauważyć, że pole przekroju zdecydowanej większości prętów konstrukcji bazowej (złożonej z bardzo wielu prętów) zbiega do zera i dzięki temu zostaje wygenerowana nowa topologia kratownicy.



Rys. 2.1 a) Przykładowa konstrukcja bazowa w zagadnieniu wspornika obciążonego siłą pionową; b) rozwiązanie zadania minimalizacji objętości kratownicy przy ograniczeniach naprężeń w prętach (linia pogrubiona)

2.2. Klasyczne sformułowanie zadania minimalizacji objętości kratownicy przy ograniczeniach naprężeń w prętach przy użyciu metody konstrukcji bazowej

Zadanie minimalizacji objętości kratownicy przy ograniczeniach naprężeń (także dla różnych naprężeń granicznych przy rozciąganiu i ściskaniu) za pomocą metody konstrukcji bazowej w prostokątnych obszarach projektowych było tematem badań T. Sokoła [9]. Przez rozwiązanie rozumie się znalezienie takich wektorów przedstawiających zbiór pól przekrojów \mathbf{A} oraz sił podłużnych \mathbf{S} , które zapewniają:

- minimum funkcji celu – objętości kratownicy:

$$V = \min_{\mathbf{A}, \mathbf{S}} \mathbf{L}^T \mathbf{A} \quad (2.1)$$

- spełnienie ograniczeń:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{S} = \mathbf{P} \quad (2.2)$$

$$|S_i| \leq A_i \sigma_0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

$$A_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

Oznaczenia: N – liczba prętów konstrukcji bazowej; M – liczba stopni swobody konstrukcji bazowej; $\mathbf{L}_{N \times 1}$ – wektor długości prętów; $\mathbf{A}_{N \times 1}$ – wektor pól przekrojów prętów; $\mathbf{S}_{N \times 1}$ – wektor sił podłużnych w prętach; $\mathbf{P}_{M \times 1}$ – wektor uogólnionych sił węzłowych; $\mathbf{B}_{M \times N}$ – macierz geometryczna kratownicy bazowej; σ_0 – graniczne naprężenie w prętach (identyczne przy rozciąganiu oraz ściskaniu); V – objętość kratownicy.

Ograniczenie równościowe (2.2) przedstawia M równań równowagi w węzłach kratownicy, co zawęży zbiór wektorów \mathbf{S} do statycznie dopuszczalnych, natomiast N ograniczeń nierównościowych (2.3) zapobiega przekroczeniu naprężeń granicznych

w prętach. Można wykazać, że aby warunki optymalności Karusha–Kuhna–Tuckera były spełnione, wszystkie ograniczenia (2.3) muszą być aktywne, tzn:

$$|S_i| = A_i \sigma_0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

Korzystając z (2.5) można wyeliminować zmienną \mathbf{A} , a następnie wprowadzając wektory (o nieujemnych składowych) sił rozciągających \mathbf{T} oraz sił ściskających \mathbf{C} i eliminując wektor \mathbf{S} można zadanie sprowadzić do następującego (dodatkowo rozróżniono graniczne naprężania przy rozciąganiu σ_T oraz przy ściskaniu σ_C):

- Minimum funkcji celu:

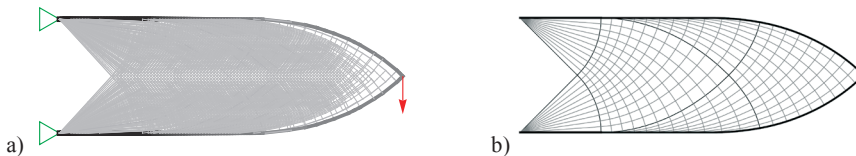
$$V = \min_{\mathbf{T}, \mathbf{C}} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{T}}{\sigma_T} + \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{C}}{\sigma_C} \quad (2.6)$$

- Ograniczenia:

$$\mathbf{B}^T (\mathbf{T} - \mathbf{C}) = \mathbf{P} \quad (2.7)$$

$$T_i \geq 0, \quad C_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

W ten sposób zadanie zostało sprowadzone do standardowej postaci zadania optymalizacji liniowej (programowania liniowego), co pozwala na rozwiązywanie dużych zagadnień przez zastosowanie efektywnych metod numerycznych (np. *metody punktu wewnętrznego*).



Rys. 2.2 a) Optymalna topologia długiego wspornika przy konstrukcji bazowej o 2 440 400 prętach, T. Sokół [9]; b) Rozwiązanie ściśle optymalizacji topologii długiego wspornika – konstrukcja Michella, T. Lewiński [4]

Powyższe zadanie optymalizacji przy prostokątnym obszarze projektowym zostało oprogramowane w środowisku Wolfram Mathematica przez T. Sokoła [9]. Na Rys. 2.2a) pokazano rozwiązanie dla konstrukcji bazowej rozpiętej na siatce o rozmiarach 121x41 węzłów, liczącej 2 440 400 prętów. Optymalna konstrukcja składa się z wielu prętów o małych przekrojach i nie przypomina klasycznej kratownicy stosowanej w budownictwie. Wraz ze zwiększaniem gęstości konstrukcji bazowej, liczba prętów kratownicy rośnie, maleją natomiast ich przekroje. Ścisłe rozwiązanie optymalizacji topologii kratownicy (Rys. 2.2b z pracy T. Lewińskiego [4]) prowadzi do konstrukcji Michella wykraczających poza klasę kratownic – są to dyskretno-ciągłe konstrukcje składające się z ortotropowej tarczy i zakrzywionych prętów o skończonych przekrojach.

2.3. Sformułowanie zadania optymalizacji dostosowane do generowania modeli Strut and Tie

W zagadnieniu postawionym w punkcie 2.2 minimalizowaną funkcją celu jest objętość całkowita kratownicy. Na etapie budowy modelu ST geometria konstrukcji żelbetowej jest zazwyczaj znana, a więc kształt modelu nie ma wpływu na zużycie betonu. Uzasadnione jest więc usunięcie objętości prętów ściskanych z funkcji celu. Nowa funkcja celu przedstawia się następująco:

$$V = \min_{\mathbf{T}, \mathbf{C}} \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{T}}{\sigma_T} \quad (2.9)$$

Rozwiązanie zadania długiego wspornika przedstawione w punkcie 2.2 wskazuje na to, że wraz ze wzrostem gęstości konstrukcji bazowej optymalna kratownica składa się z coraz większej liczby prętów o coraz mniejszej długości. Wynika to z cech rozwiązania ścisłego, a więc konstrukcji Michella, w której występują pręty krzywoliniowe (łamane

złożone z dużej ilości krótkich prętów są ich aproksymacją). Takie złożone kratownice nie mają oczywiście praktycznego zastosowania. Aby zbliżyć zadanie optymalizacji do zagadnienia projektowego należy w funkcji celu oprócz kosztu prętów uwzględnić także koszt węzłów kratownicy bądź koszt montażu pręta. Można to zrobić modyfikując wektor długości prętów L jak następuje:

$$\hat{L}_i = L_i + p \quad i = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

gdzie p (wyrażone w metrach) jest ustalonym parametrem, wspólnym dla wszystkich prętów, reprezentującym umowny koszt węzła. Przy odpowiednio dużej wartości parametru p pręty krótkie przestają być korzystne. W niniejszej pracy nie ustalono wytycznych umożliwiających jednoznaczne wyznaczenie wartości p . Wielkość ta została potraktowana jako parametr sterujący stopniem złożoności optymalnej kratownicy – wraz ze wzrostem parametru liczba prętów zmniejsza się. Wartość parametru p powinna więc być doborzona przez projektanta.

Zgodnie z Eurokodem naprężenia w prętach ściskanych S nie mogą przekraczać naprężeń granicznych, które zależą od obliczeniowej wytrzymałości betonu na ściskanie f_{cd} . Przeniesienie danej siły ściskającej przez pręt wiąże się więc z jego minimalną szerokością w płaszczyźnie modelu. Pręt S ma odwzorowywać pole naprężeń w betonie, a więc powinien mieścić się w obszarze projektowym modelu. Zagadnienie to rozwiązano poprzez iteracyjne rozwiązywanie zadania optymalizacji (niemieszczące się w obszarze pręty ściskane są usuwane z konstrukcji bazowej i proces optymalizacji jest powtarzany). W przypadku prętów rozciąganych problem ten nie występuje, należy jednak uwzględnić przepisy normy dotyczące minimalnej grubości otulenia. Spełnienie tych przepisów zostało zapewnione poprzez wstępne usunięcie z konstrukcji bazowej prętów, które tych warunków nie spełniają. W zadaniu optymalizacji nie jest sprawdzana nośność węzłów, gdyż ich konstruowanie ma zbyt indywidualny charakter, aby mogło być w pełni zalgorytmizowane. Zagadnienie to należy rozpatrywać w ramach postprocesingu.

Opisane tu algorytmy zostały zaimplementowane w środowisku Mathematica poprzez modyfikację programu T. Sokoła [9]. Aby rozszerzyć klasę obszarów projektowych na dowolne obszary ograniczone wielokątami (w tym obszary niewypukłe oraz obszary z otworami) opracowano dodatkowo metodę automatycznego generowania konstrukcji bazowej w takich złożonych obszarach. Metoda ta została użyta w pracy [5] pozwalając na numeryczną aproksymację nowych kratownic Michella. Aby program mógł posłużyć jako narzędzie do projektowania umożliwiono wprowadzanie parametrów materiałów konstrukcyjnych.

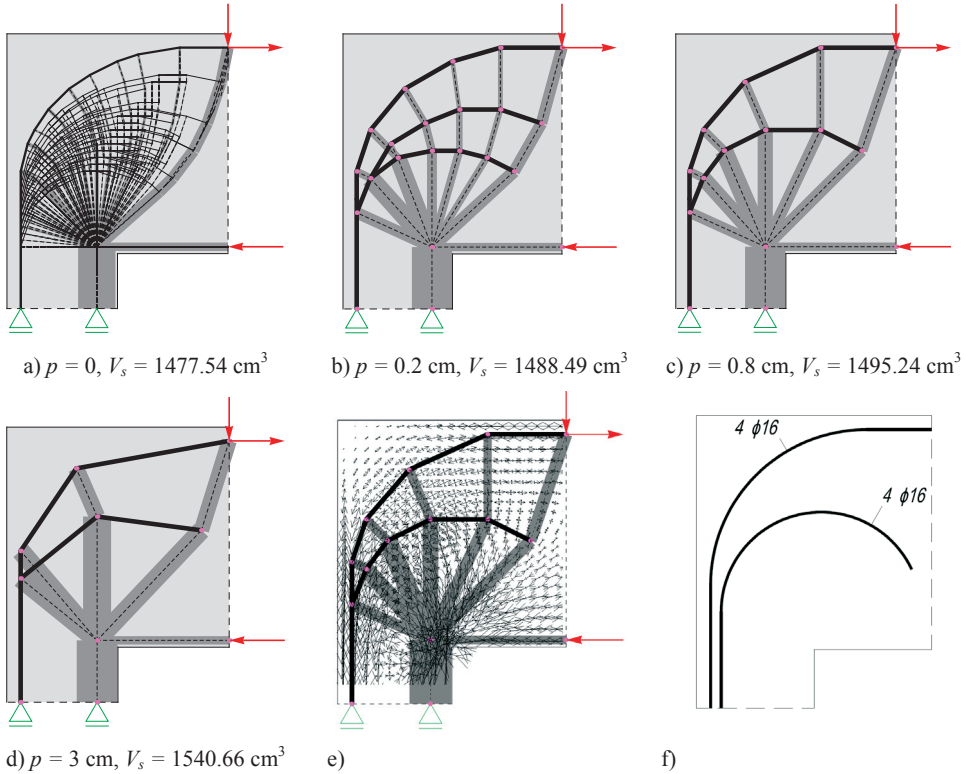
3. Omówienie wyników

3.1. Rozwiązywanie zagadnienia naroża ramy

Przedstawiony we wprowadzeniu problem budowy modelu ST w narożu ramy był impulsem do przeprowadzenia niniejszych badań oraz stworzenia oprogramowania do generowania modeli ST. W celu rozwiązania tego zagadnienia rozpatrzono ramę portalową poddaną wyłącznie pionowemu obciążeniu równomiernie rozłożonemu na długości rygła. Analizując pole naprężeń według rozwiązania sprężystego wydzielono obszar, w którym budowany będzie model ST naroża. Poza momentem zginającym uwzględniono także siłę poprzeczną.

Na Rys. 3.1 a – d) pokazano modele będące rozwiązaniem zadania optymalizacji przy różnych parametrach p , podano także objętość prętów rozciąganych kratownicy. Począwszy od $p = 0$, co daje złożone rozwiązanie o minimalnej objętości prętów rozciąganych (aproksymacja konstrukcji Michella), wraz ze wzrostem parametru p liczba prętów optymalnej kratownicy maleje. Szczególnie duża redukcja występuje przy przejściu z modelu a) do b) i towarzyszy jej znikomy (poniżej 1%) przyrost objętości prętów rozciąganych. Łamane utworzone z prętów rozciąganych w kratownicach b) oraz c) sugerują, że rzeczywiste zbrojenie powinno składać się z zakrzywionych łuków, które w przybliżeniu będą zgadzać się z modelem. Ostatecznie za najlepszy uznano model c), w którym należy dobrać tylko dwa różne pręty kołowo zakrzywione, jak na Rys. 3.1 f). Na Rys. 3.1 e) przedstawiano porównanie wybranego modelu z polem naprężeń w rozwiązaniu sprężystym. Otrzymano dużą zgodność kierunków prętów kratownicy

z kierunkami naprężeń głównych. Należy zaznaczyć, że w prętach tworzących większy z łuków modelu występuje w przybliżeniu stała siła rozciągająca, co pozwala na zastosowanie jednakowej liczby prętów zbrojeniowych na długości łuku. W przypadku łuku mniejszego siła stopniowo rośnie i przechodząc w obszar słupa osiąga wartość zbliżoną do wartości siły w łuku większym. Przyjmując także zbrojenie o stałym polu przekroju otrzymuje się małe naprężenie na końcu łuku, co generuje minimalną długość zakotwienia. Wzrastające naprężenia w przecie zbrojeniowym mniejszego łuku można wyobrazić sobie jako modelowanie kotwienia prętów w betonie. Dla przyjętych danych materiałowych długość zakotwienia pręta, który ma przenieść maksymalną siłę występującą w łuku wynikająca z obliczeń wg normy [7] okazuje się niewiele mniejsza od długości całego łuku.



Rys. 3.1 a-d) Modele ST otrzymane w wyniku optymalizacji topologicznej dla różnych parametrów p , V_s – objętość prętów rozciąganych; e) porównanie wybranego modelu ST z krzywami naprężeń głównych rozwiązania sprężystego; f) propozycja zbrojenia odpowiadającego wybranemu modelowi ST.

W celu porównania otrzymanych wyników z modelem proponowanym przez Eurokod 2 należało rozwiązać zadanie optymalizacji przy czystym zginaniu naroża. Rozwiązanie przedstawione na Rys. 3.2 a) w dużym stopniu pokrywa się z modelem uwzględniającym siłę poprzeczną (por. Rys 3.1 c)). Względna różnica objętości prętów rozciąganych (w stosunku do rozwiązania optymalnego) wynosi:

$$\frac{V_{EC2} - V_{opt}}{V_{opt}} \cdot 100\% = \frac{1459,32 - 1103,87}{1103,87} \cdot 100\% = 24,3\% \quad (3.1)$$

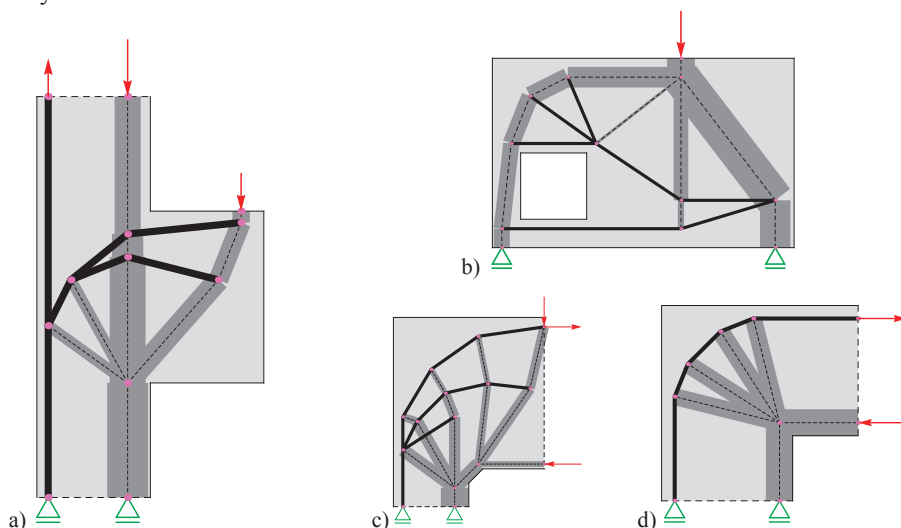
Ponadto sprawdzono, że projektując rzeczywiste zbrojenie naroża prętami zbrojeniowymi o danej średnicy oraz z uwzględnieniem zakotwienia, różnica zbrojenia w przypadku obu modeli wzrasta do około 45%, co oznacza, że model według Eurokodu wymaga zużycia prawie dwukrotnie więcej stali zbrojeniowej, niż model otrzymany na drodze optymalizacji.

a) $p = 0.8 \text{ cm}$, $V_{opt} = 1103.87 \text{ cm}^3$ b) $V_{EC2} = 1459.32 \text{ cm}^3$

3.2 Model ST przy czystym zginaniu: a) otrzymany w wyniku optymalizacji topologicznej; b) proponowany przez Eurokod 2 (V – objętość prętów rozciąganych modelu).

3.2. Inne przykłady modeli ST wygenerowanych z zastosowaniem optymalizacji topologicznej

Na Rys. 3.3 przedstawiono przegląd modeli ST otrzymanych za pomocą opracowanego oprogramowania w innych płaskich zagadnieniach w konstrukcjach żelbetowych.



3.3 Inne przykłady modeli ST otrzymanych w wyniku optymalizacji: a) krótki wspornik utwierdzony w słupie; b) tarcza prostokątna z otworem; c) rozpatrywane w punkcie 3.1 naroże z dodatkowym skosem; d) naroże ramy o zbliżonej wysokości rygla oraz szerokości słupa.

4. Podsumowanie

W pracy zaproponowano nową metodę generowania modeli ST, opartą na optymalizacji topologii kratownicy. Stworzono oprogramowanie, które pozwala na automatyczne tworzenie modeli ST poprzez minimalizację objętości prętów rozciąganych. Rozwiązanie zagadnienie naroża ramy o dużej wysokości rygla w stosunku do szerokości słupa cechuje się prawie dwukrotnie mniejszym zużyciem stali zbrojeniowej niż model według Eurokodu. Uniwersalny charakter programu oraz zgodność z wytycznymi normy pozwalają na uzyskanie rozwiązań szerokiej klasy zagadnień płaskich i bezpośrednie ich wykorzystanie w projektowaniu konstrukcji żelbetowych.

Literatura

- 1 Amir O., Sigmund O. Reinforcement layout design for concrete structures based on continuum damage and truss Topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 47(2):157-174, 2013
- 2 Bruggi M. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. *Comput Struct* 87:1483–1495, 2009
- 3 Knauff M. Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012
- 4 Lewiński T., Zhou M., Rozvany GIN. Extended exact solutions for least-weight truss layouts – Part I: Cantilever with a horizontal axis of symmetry. *Int J Mech Sci*, 36:375-398, 1994
- 5 Lewiński T., Rozvany G.I.N., Sokół T., Bołbotowski K. Exact analytical solutions for some popular benchmarks problems in topology optimization III: L-shaped domains revisited. *Struct Multidisc Optim*, DOI 10.1007/s00158-012-0865-6, 2013
- 6 Luo Y., Kang Z. Layout design of reinforced concrete structures using two-material topology optimization with Drucker-Prager yield constraints. *Struct Multidisc Optim*, 47(1):95-110, 2013
- 7 PN-EN 1992-1-1: 2008/NA: 2010 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków
- 8 Schäfer K., Schlaich J. On the Consistent Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie Models. *Proceedings of the Int. Conf. Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Structural Concrete*, Białystok University of Technology, 1993
- 9 Sokół T. A 99 line code for discretized Michell truss optimization written in Mathematica. *Struct Multidisc Optim*, 43:181-190, 2011
- 10 Starosolski W. Konstrukcje żelbetowe według Eurokodu 2 i norm związanych. Tom III, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012
- 11 Victoria M., Querin O. M., Martí P. Generation of strut-and-tie models by topology design using different material properties in tension and compression, *Struct Multidisc Optim*, 44(2):247-258, 2011

Applications of truss topology optimization in the design of reinforced concrete structures using „Strut and Tie” models

Karol Bołbotowski¹, Michał Knauff², Tomasz Sokół³

Institute of Building Engineering, Faculty of Civil Engineering, Warsaw University of Technology, e-mail: k.bolbotowski@il.pw.edu.pl¹, m.knauff@il.pw.edu.pl², t.sokol@il.pw.edu.pl³.

Abstract:

Although Strut and Tie models are often used in practical design due to their apparent concept based on truss analysis, the creation of a model consistent with behaviour of the real structure is not an easy task. Frame corner model considered in the paper and presented in code [7] and article [8] exemplifies the problem. The authors proposed a method of automatic generating of ST models by making use of truss topology optimization (volume minimization problem). The method is based on classical ground structure approach. The authors introduced a method of including the cost of nodes in the objective function, which allowed to obtain solutions consisting of rationally small number of bars (unlike Michell's structures). Moreover, algorithms ensuring consistency with Eurocode requirements were developed. The method was implemented in computer program. With the use of the software the authors proposed an alternative ST model for the frame corner, which requires considerably less reinforcement steel in comparison with the model suggested by the code. The versatility of the program was well proven in several other examples of plane stress problems in reinforced concrete design.

Keywords: Strut and Tie models, reinforced concrete structures, Eurocode 2 design, frame corner, topology optimization, Michell's structures.