TŁO TEORETYCZNE DLA ADAPTACYJNEGO, DYNAMICZNEGO MODELU WYBORU ŚCIEŻKI W MODELU RUCHU

Rafał Kucharski
doktorant, Katedra Systemów Komunikacyjnych, Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 01-155 Kraków, e-mail: rafalkucharski@gazeta.pl

Streszczenie: *Niniejszy artykuł stanowi podstawę teoretyczną dla zagadnienia adaptacyjnego wyboru ścieżki w sieci transportowej. Na jego podstawie możliwe będzie sformułowanie adaptacyjnego modelu wyboru ścieżki na potrzeby makroskopowego modelowania ruchu, co jest przedmiotem pracy doktorskiej autora. W artykule autor omawia w szczególności podstawy i najnowsze teorie dla następujących trzech obszarów modelowania:*

1) wyszukiwania najkrótszej ścieżki w sieci transportowej (ang. shortest path search*),*

2) próbkowania ścieżek (ang. path sampling*),*

3) wyboru ścieżki (ang. route choice*).*

W części pierwszej opisano podstawowe i bardziej zaawansowane algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki w sieci transportowej. Pokazano zarówno klasyczne algorytmy, ich modyfikacje, jak i najnowsze propozycje. Omówiono przypadki dla sieci statycznej, dynamicznej i stochastycznej. Część ta jest podstawą dla dalszych części, w których omawiane są modele zawierające implicite algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki. Część druga to omówienie metod próbkowania ścieżek, czyli określania zbioru potencjalnie efektywnych ścieżek łączących źródło z celem. Pokazano próby rozwiązania tego problemu, który (jak argumentuje wielu badaczy) jest dotąd nierozwiązany w praktyce, a istniejące metody dostarczają jedynie heurystycznych przybliżeń. Pokazano tu w szczególności autorską propozycje rozszerzenia istniejącej metody próbkowania Łańcuchem Markowa Metropolisa-Hastingsa na przypadek zmiennej w czasie sieci stochastycznej. Część trzecia to omówienie modeli wyboru ścieżki spośród możliwych. Pokazano tu zarówno klasyczne modele logitowe, ich modyfikacje, jak i nieliczne alternatywne metody wyboru ścieżki. W końcowej części omówiono podejście do adaptacyjności w każdej z metod omawianych wcześniej. Wiele użytych w artykule nazw jest własną próbą tłumaczenia nazw angielskich, jako że autor zdaje sobie sprawę z ułomności własnych tłumaczeń, w nawiasach przy każdym pierwszym użyciu podano odpowiednik angielski.

Słowa kluczowe*: najkrótsza ścieżka, dynamiczny problem najkrótszej ścieżki, próbowanie ścieżek, wybór ścieżki w sieci transportowej, adaptacja modeli ruchu*

1. Wprowadzenie

W artykule opisane zostały trzy elementarne części teorii modelownia ruchu: wyszukiwanie najkrótszej ścieżki, próbkowanie ścieżek oraz modelowanie wyboru ścieżki. Zależności między nimi nie są oczywiste, na pozór mogą wydawać się one niepowiązane i niezależne, jednak rozwiązanie każdego z tych problemów konieczne jest do zamodelowania rozkładu ruchu na sieć.

Problemy omówiono w takiej kolejności, w jakiej należy je rozważać próbując w pełni zrozumieć złożoną procedurę rozkładu ruchu na sieć. Aby możliwa była modyfikacja w tej procedurze (np. uwzględnienie adaptacji) należy rozważyć modyfikacje w każdym z problemów. Zależność tę można opisać następująco: żeby adaptować ścieżkę, musi ona być uprzednio wybrana jako efekt rozkładu ruchu (ang.: *traffic assignment*). Rozkład ruchu w większości wypadków to iteracyjna procedura wielokrotnego wyboru ścieżek (ang.: *route choice*) spośród dostępnych. W zaawansowanych procedurach rozkładu ruchu ścieżki są wybierane ze zbioru dopuszczalnych ścieżek, obliczonych w ramach osobnej procedury. Wykorzystuje się tu zazwyczaj metody próbkowania ścieżek (ang.: *route sampling*), które są heurystycznymi przybliżeniami faktycznego zbioru decyzyjnego. Całość struktury wiąże ze sobą model wyboru najkrótszej ścieżki (ang.: *shortest path search*), o który oparte są wszystkie wymienione wyżej metody.

2. Poszukiwanie najkrótszej ścieżki w sieci transportowej

Problem znalezienia najkrótszej ścieżki (PNS) w sieci transportowej (ang.: *shortest path problem*) to fundamentalny problem dla modelowania ruchu (Zhan i Noon, 1998) (Gentile, Meschini, Papola, 2004). Rozwiązuje się go implicite w kluczowych elementach modelowania ruchu (rozkład ruchu, funkcja grawitacyjna, próbkowanie ścieżek, podział zadań przewozowych, itp.) i od jego efektywności w dużej mierze zależy efektywność całego procesu modelowania. Fakt, że najbardziej rozpowszechnione i najpopularniejsze algorytmy PNS powstały w obszarze teorii grafów zadecydował o tym, że sieć transportowa w ujęciu formalnym niemal zawsze opisywana jest jako graf $\boldsymbol{G(N, A)}$, gdzie N to zbiór wierzchołków, a A to zbiór łuków grafu. W związku z tym problem znalezienia najkrótszej ścieżki w sieci transportowej jest równoważny z problemem poszukiwania najkrótszej ścieżki w grafie.

Pojęcie ścieżki **najkrótszej** w PNS jest jedynie umowne, a teoria obejmuje również algorytmy obliczające ścieżki najtańsze, najszybsze, najbardziej niezawodne, itd. Bez utraty precyzji można powiedzieć, że przedmiotem PNS jest minimalizacja sumy wag łuków składających się na ścieżkę w grafie. Wagi te mogą być określone dowolną wielkością skalarną. Może to być: odległość, czas, koszt, lub jakikolwiek wielomian reprezentujący odczuwalną uciążliwość podróżnego, która jest minimalizowaną funkcją celu problemu optymalizacyjnego (Frejinger, 2008). Należy jednak zauważyć, że równoważność PNS dla ścieżki najkrótszej i dla ścieżki najszybszej nie jest oczywista dla przypadków dynamicznych, co opisano poniżej.

W niniejszym rozdziale omówiono w szczególności: metodę klasyczną – dla grafu statycznego, o kosztach niezmiennych w czasie, metodę dynamiczną – dla grafu o znanych kosztach zmiennych w czasie oraz metodę stochastyczną – dla grafu o nieznanych kosztach zmiennych w czasie. Rzetelny, szeroki przegląd dostępnych algorytmów szukania najkrótszej ścieżki można znaleźć w (Segedwick, 2011).

Klasyczna postać problemu

PNS znalazł się w centrum zainteresowań matematyków w połowie lat 50. XX wieku, kiedy, niezależnie od siebie, Ford (1956) i Dantzig (1957) stworzyli algorytm programowania liniowego rozwiązujący omawiany problem. Algorytm ten w ciągu kilku kolejnych lat były wielokrotnie modyfikowany, powstało co najmniej kilka jego wersji. Ostateczną formę znalazł w postaci zaproponowanej przez Leyzorek, Gray, Johnson, Ladew, Meaker, Petri i Seitz (1957). Zwyczajowo przyjęła się jednak niepoprawna chronologicznie, ale krótsza nazwa tego algorytmu od nazwiska Edgara Dijkstry, który w 1959 roku niezależnie opracował tę najbardziej czytelną, szybką i prostą wersję algorytmu, który stał się elementarnym algorytmem teorii grafów (Dijkstry, 1959). Od momentu powstania był on przedmiotem nieustannych modyfikacji i rozważań teoretycznych, które trwają do dziś. Większość z propozycji dotyczy nie tyle modyfikacji samego algorytmu, co struktury obliczeniowej [m.in. zamiana kolejki na stos wewnątrz algorytmu (Dijkstra 1959), zastosowanie „kopca a-arnego" (Johnson 1975), użycie stosu Fibonacciego (Tarjan, 1983)].

We współczesnych postaciach uzyskano niemal liniowy wzrost czasu obliczeń wraz ze wzrostem rozmiaru grafu (w porównaniu z kwadratowym przyrostem w wersji z 1959 roku). Rozważania teoretyczne dotyczące klasycznej postaci algorytmu jedynie w niewielkiej części dotyczą problemu transportowego, gdyż najwięcej uwagi w pracach teoretycznych przywiązuje się do przypadku ujemnych kosztów odcinków, co nie ma miejsca w sieci transportowej.

Wśród popularnych alternatyw dla algorytmu Dijkstry najpopularniejszy pozostaje algorytm A* (ang.: *A-star*) opracowany w 1968 roku przez (Hart, P. E., Nilsson, N. J., Raphael, B. 1972), który zakłada użycie heurystyki dla przyśpieszenia obliczeń. Heurystyka wyrażona jest w potencjale określanym dla każdego węzła, który jest proporcjonalny do odległości od celu, zazwyczaj jest to odległość kartezjańska. W algorytmie tym pojawia się bardzo przydatne w wielu metodach adaptacyjnych pojęcie efektywnych następników i efektywnych poprzedników (ang.: *efficient forward/backward star*), zdefiniowanych dla każdego węzła. Efektywni następnicy węzła bazowego, to zbiór takich węzłów z których odległość do celu jest mniejsza, niż z węzła bazowego, stanowi to podstawę istotnej teorii Hyperpath (Bell, Trozzi, Hosseinloo, Gentile, & Fonzone, 2012) opisanej poniżej. Algorytm A* może, ale nie musi dać oszczędności w czasie w porównaniu z algorytmem Dijkstry.

Nie ma powszechnej zgody, co do najlepszego rozwiązania klasycznej postaci problemu. Stosunkowo aktualnym przeglądem modyfikacji algorytmu Dijkstry jest badanie przeprowadzone przez (Zhan i Noon, 1998), jednak nie dostarcza ono jednoznacznych odpowiedzi.

Najszybsze dostępne rozwiązanie problemu klasycznego

Dla klasycznej postaci problemu najefektywniejszym wydaje się być w miarę aktualny algorytm Oznaczonych Hubów (Hub-based Labeling), opracowany w centrach Microsoft w 2010 roku (Abraham, Delling, Goldberg, Werneck, 2010). Uzyskano tutaj znaczne zmniejszenie czasu obliczeń w stosunku do algorytmu Dijkstry (nawet o 6 rzędów wielkości dla złożonych grafów). Opiera się on na odpowiednim przygotowaniu sieci, skracającym czas obliczeń, które można opisać jako zapis topologii sieci w postaci użytecznej dla metody obliczeniowej. W etapie przygotowawczym w sieci ustawia się „drogowskazy", które mają pomagać algorytmowi dojść do celu. Metod ich przygotowania jest wiele, a najefektywniejsze z nich to:

a) metoda oznaczania i zapamiętywania uprzednio wybranych ścieżek (ang.: *labeling method*),
b) pojęcie „skrótu" (ang.: *shortcut*), czyli kolejnego poziomu grafu wielopoziomowego, w którym zapisywane są obliczone wcześniej najkrótsze ścieżki,
c) zbiór uprzednio „zakontraktowanych" połączeń wynikających z hierarchii (ang.: *contraction hierarchy*),
d) pojęcie „punktów dostępu" (ang.: *transit node routing*) – dla sieci drogowej Europy jest około 10 tysięcy takich punktów dla sieci o 18 milionach węzłów (Bast, Funke, Sanders, Schultes, 2007).

W algorytmie Oznaczonych Hubów korzysta się głównie z metod zakontraktowanych połączeń, oraz z metody oznaczania ścieżek w połączeniu z wybranymi zaletami innych metod. Algorytm zakłada uprzednie zapisanie informacji o strukturze sieci w pamięci lokalnej, pozwala to na przyśpieszenie realizacji zapytań, samo w sobie wymaga jednak kilkudziesięciu minut obliczeń. Czas obliczenia ścieżki w sieci składającej się z kilkudziesięciu milionów węzłów nie przekracza kilku milisekund.

Najkrótsza ścieżka w sieci dynamicznej

W tej sekcji opisano PNS dla grafu dynamicznego, czyli takiego, w którym co najmniej jeden z parametrów (węzeł, łuk, waga/koszt łuku) jest zmienny w czasie. W odniesieniu do sieci transportowej oznacza to zazwyczaj, że czas/koszt przejazdu odcinka jest zmienną funkcją czasu. Problem taki jest znacznie trudniejszy i bardziej złożony niż klasyczny PNS, spotkał się więc z mniejszym zainteresowania u badaczy. Jest on jednak trzonem problemu dynamicznego rozkładu ruchu na sieć, w którym popyt, a wraz z nim warunki ruchu (koszty) są zmienne w czasie.

O ile w klasycznym PNS kłopotem algorytmicznym były ujemne koszty, które nie dotyczą przypadku transportowego, o tyle w przypadku dynamicznym problemem staje się monotoniczność wyrażona w warunku FIFO (ang.: *First In-First Out*), który gwarantuje, że czas dotarcia do celu jest ściśle rosnącą funkcją czasu rozpoczęcia podróży. Można udowodnić, że jeśli w sieci zachowana jest reguła FIFO, to najkrótsza ścieżka nie zawiera cykli, obserwacja ta znacznie zmniejsza trudność algorytmu. Innymi słowy graf zmienny w czasie, spełniający warunek FIFO, jest grafem acyklicznym.

Zasadniczo można wyróżnić dwa sposoby rozwiązania problemu: dyskretny, gdzie koszty są stałe w obrębie interwałów czasowych oraz ciągły, gdzie koszty są ciągłą funkcją czasu.

Historycznie pierwszą próbą ujęcia dynamiki w PNS była praca (Cooke i Halsey 1966), gdzie podstawowy algorytm Dijkstry został zaadoptowany do grafu diachronicznego – zmiennego w czasie. Okazało się, że odpowiednia konstrukcja danych wejściowych algorytmu Dijkstry wystarczy, by obliczyć PNS dla grafu diachronicznego. Algorytm nie zachowywał jednak reguły FIFO i okazał się zbyt obliczeniochłonny. Zoptymalizowaną, ale wciąż nie zachowującą reguły FIFO metodę podają (De Palma, Hansen i Labbé, 1993). Główną przeszkodą w zastosowaniu jej w praktyce modelowania ruchu jest konieczność wprowadzenia dużej liczby dyskretnych przedziałów czasu (przyjmuje się, że odpowiednim przedziałem dla odzwierciedlenia dynamiki sieci transportowej jest jedna sekunda).

Inne próby dotyczyły aktualizacji obliczonej uprzednio macierzy czasów przejazdu przy założeniu zmiany kosztu jedynie kilku elementów sieci. Polegało to na „re-optymalizacji" rozwiązania obliczonego dla stałych kosztów. Dobrą metodę wydaje się tu podawać (Dionne 1978), która została poszerzona do metody pozwalającej na zmianę wszystkich kosztów w (Pallottino i Scutella 1997). Jednak metody te nie gwarantują, że czas re-optymalizacji będzie mniejszy niż czas potrzebny do ponownego przeprowadzenia optymalizacji.

Rozwiązania dla przypadków ciągłych podają m.in. (Henzinger., Klein, Rao i Subramanian 1997) oraz (Fakcharoemphol i Rao, 2001). Natomiast wciąż nie ma zgody wśród badaczy na to, która metoda jest najlepsza.

W opinii autora na największą uwagę zasługuje heurystyka zaproponowana przez (Gentile, Meschini, Papola, 2004) z uwagi na praktyczne zastosowanie w dynamicznych modelach ruchu dla dużych sieci. Metoda ta oparta jest o asocjacyjną własność najkrótszej ścieżki w grafie dynamicznym, czyli podział problemu wyboru ścieżki na zbiór problemów wyboru kierunku na kolejnych skrzyżowaniach (ang. *turning rate)*. Pozwala to na dekompozycje problemu najkrótszej ścieżki na układ prostych równań liniowych (nazywanych w tym kontekście równaniami Bellmana). Autorzy udowadniają, że dekompozycja taka jest poprawna pod pewnymi warunkami, które musi spełnić sieć. Dotyczy to reguły FIFO dla odcinków (warunek taki musi spełniać model przepływu ruchu – ang.: *traffic flow model*), co eliminuje to możliwość wystąpienia cykli. Reguła FIFO musi dotyczyć zarówno czasów przejazdu, jak i kosztów. Dzięki takiej dekompozycji problemu możliwe jest stworzenie szybko rozwiązywalnego układu elementarnych równań liniowych. Ze względu na strukturę algorytmu jest to algorytm typu: „wiele do jednego" (ang.: *many-to-one*) – w którym poszukujemy rozwiązania cofając się od celu aż znajdziemy źródło, w przeciwieństwie do algorytmu „jeden do wielu" (ang.: *one-to-many*) – w którym wychodząc od źródła szukamy celu. W kontekście dekompozycji podejście „wiele do jednego" okazuje się bardziej użyteczne. Z tego powodu algorytm ten dedykowany jest do rozwiązania problemu poszukiwania najpóźniejszej godziny wyjazdu, by o określonym czasie dotrzeć do celu. Rozwiązanie problemu najszybszego dotarcia do celu wyjeżdżając o określonym czasie wymaga pewnych modyfikacji (inną, skuteczną metodę „jeden-do-wielu" kolejności podaje (Bell et al., 2012)).

Zastosowana w omawianym algorytmie heurystyka dotyczy liniowej aproksymacji funkcji oporu w modelu przepływu ruchu, co pozwala znacznie skrócić czas obliczeń bez utraty dokładności. Zaletą algorytmu jest również to, że problem rozwiązuje się wspólnie z innymi problemami dynamicznego rozkładu ruchu: modelem przepływu ruchu (ang.: *traffic flow model*), dynamicznego obciążania sieci (ang.: *dynamic network loading problem*) oraz wyboru ścieżki (ang.: *route choice model*).

Jak udowadnia autor omawianej metody, w algorytmach dynamicznych rozwiązuje się problem minimalizacji czasu przejazdu w układzie zmiennym w czasie. Jeśli jednak koszty są proporcjonalne do czasu, wówczas rozwiązanie problemu najkrótszego czasu jest jednocześnie rozwiązaniem problemu najmniejszego kosztu. W przeciwnym wypadku procedury stają się znacznie bardziej skomplikowane.

Najkrótsza ścieżka w sieci stochastycznej

Problem ten pojawia się przy konstatacji, że koszty w sieci są nie tylko zmienne, ale że zmienność jest procesem losowym o nieznanej realizacji. Koszty łuków w grafie są w tym wypadku zmienną losową, a więc koszt ścieżki (czyli suma kosztów łuków) również będzie losowy.

Od lat późnych lat 60. XX wieku (Frank, 1969) pojawiały się próby ujęcia losowości w PNS przy użyciu teorii prawdopodobieństwa, w latach 80. powstała próba rozwiązania problemu na gruncie teorii zbiorów rozmytych (Dubois, Prade, 1980). W 2007 roku Liu opisał podstawę teorii nieoznaczoności (ang.: *uncertainty theory*), na gruncie której w 2010 roku zaproponował PNS wprowadzając pojęcie α-najkrótszej ścieżki (gdzie α to poziom niepewności) i dualne do niego pojęcie „najbardziej najkrótszej ścieżki" („most shortest path") (Liu 2010).

Obecnie środowiska naukowe skłaniają się ku przyjęciu teorii nieoznaczoności do rozwiązania PNS dla sieci stochastycznej. Na jej gruncie zdefiniowano pojęcia potrzebne do opisu sieci stochastycznej, oraz udowodniono że stochastyczny PNS można sprowadzić do problemu deterministycznego i rozwiązać klasycznym algorytmem Dijksrty (Gao, 2011). Podejście to wydaje się być skutecznym rozwiązaniem.

3. Próbkowanie ścieżek

Omawiany problem próbkowania ścieżek (PPS) (ang.: *route sampling, path enumeration*), określa podzbiór efektywnych możliwych ścieżek łączących źródło i cel. Jego istotność bierze się m.in. z tego, że problem znalezienia wszystkich możliwych ścieżek w sieci jest problemem NP trudnym, czyli problemem obliczeniowym, dla którego znalezienie rozwiązania problemu nie jest możliwe ze złożonością obliczeniową wielomianową (Menghini, Carrasco, Schüssler i Axhausen, 2010). Pozostaje więc wybór odpowiedniej wielkości podzbioru, wewnątrz którego znajdzie się rozwiązanie sub-optymalne. Modele PPS są konieczne do efektywnego modelowania podróży.

W rozdziale pierwszym omówiono problemy optymalizacyjne zupełne, w których stosowane heurystyki doprowadzały zawsze do optimum globalnego. Jednak w sieciach drogowych użytkownicy wybierają ścieżki, które nie zawsze są optymalne - nasze wybory są dalekie od optimum. Po pierwsze każdy użytkownik ma inne kryteria optymalizacyjne, inne wagi w wielokryterialnej funkcji celu. Po drugie nie rozwiązuje on problemu optymalizacyjnego matematycznie, tylko kognitywistycznie, szukając rozwiązania procesami wyboru decyzji, a nie algorytmami. Póki co nie potrafimy modelować takich procesów, pozostaje więc naśladowanie ich. Najpopularniejszą metodą naśladowania nie do końca racjonalnych procesów wyboru jest model logitowy, który operuje na skończonej liczbie możliwych decyzji. Aby mógł on działać sprawnie, zgodnie ze sztuką, należy określić zależności pomiędzy możliwościami (*C-Logit, Path-Size Logit*, itp.). Dlatego w praktycznych problemach rozkładu ruchu konieczne jest zdefiniowanie podzbioru rozwiązań możliwych.

O podzbiorze tym zakłada się, że zawiera w sobie wszystkie potencjalnie wybierane w sieci ścieżki. To założenie jest głównym probierzem poprawności metod próbkowania – czy próbka zawiera po pierwsze: wszystkie wybierane przez użytkowników ścieżki miedzy źródłem, a celem i po drugie: wszystkie ścieżki rozpatrywane w procesie wyboru przez użytkownika. Sprawdzenie tego warunku jest trudne, mało jest badań dotyczących wyboru ścieżki w sieci (Papinski, Scott, i Doherty, 2009), zazwyczaj dotyczą one małych próbek. (Prato, 2009) pokazuje, że dostępne metody próbkowania nie pokrywają więcej niż 90% obserwowanych ścieżek, a więc realizacji procesów decyzyjnych. Określenie stopnia odwzorowania dla ścieżek rozpatrywanych (a nie wybieranych) jest jeszcze trudniejsze.

Metody próbkowania ścieżek można podzielić na dwa zasadnicze typy: deterministyczne i stochastyczne. W pierwszej kolejności omówione zostaną metody deterministyczne, które dają stały wynik, następnie omówione będą metody stochastyczne, w których wynik zależy od przeprowadzonej symulacji.

Większość z metod w praktycznym zastosowaniu to iteracyjne modyfikacje algorytmów PNS. Poniżej przedstawiono najistotniejsze metody próbkowania:

a) Algorytm k-najkrótszych ścieżek

Algorytm ten wybiera k-kolejnych, najkrótszych ścieżek w sieci. Pierwsze podejścia polegały na próbie wybrania spośród wszystkich ścieżek, tych najkrótszych, co okazało się niewykonalne dla dużych sieci. Bardziej odpowiednie metody opierały się o metodę kar – zwiększającą koszty kolejnych odcinków znajdujących się na najkrótszej ścieżce (De La Barra 1993) lub eliminację kolejnych odcinków najkrótszej ścieżki (Prato, 2009). Obydwie działają iteracyjnie startując z rozwiązania problemu NSP. (van der Zijpp i Fiorenzo Catalano, 2005) podają rozwiązanie analityczne, o znacznie krótszym czasie obliczeń. W proponowanej przez nich formie udało się uwzględnić w problemie istotne ograniczenia na nakładanie się ścieżek, jak np. maksymalne wydłużenie, które nie były uwzględnione wcześniej. Jednak dla dużych sieci czas obliczeń jest wciąż zbyt duży i głównie z tego powodu algorytmy te praktycznie nie są używane w praktyce modelowania ruchu.

b) Metoda ścieżek subiektywnie optymalnych

Metoda ta została zaproponowana przez (Ben-Akiva 1984) (ang.: *labeling approach*). Polega ona na przyjmowaniu zmiennych wag w ważonej funkcji kosztu minimalizowanego w PNS. Sytuacja taka dotyczy wielomianowych reprezentacji kosztu przy wyborze ścieżki, gdzie czynnikami składowymi są np. odległość, koszt, czas, bezpieczeństwo, lub inne subiektywne kryteria. Rozwiązanie PNS jest funkcją przyjętych wag, wobec tego wybór kilku strategii o różnych wielkościach poszczególnych wag, pozwoli wygenerować zbiór ścieżek, z których każda jest optymalna w świetle określonych wag kryteriów cząstkowych. Ścieżki te nazywa się zgodnie z ich strategiami: „najszybsze", „najkrótsze", „najtańsze", „preferujące autostrady" itp. (Bekhor, Ben-Akiva, & Ramming, 2006).

Metoda ta może być metodą symulacyjną, gdy wagi będą dobierane na podstawie określonych rozkładów prawdopodobieństw w ramach symulacji (np. monte carlo). Gdy wagi będą znormalizowane, wówczas symulacja będzie stabilizowała się w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

c) Stochastyczne rozwiązania NSP

Metody te opierają się o zmienność parametrów sieci wyrażoną w procesie stochastycznym. (Sheffi i Powell 1982) zaproponowali procedurę, która w każdej iteracji losuje koszt odcinka na podstawie probitowego rozkładu prawdopodobieństwa ze średnią wokół czasu przejazdu po obciążonej sieci. (Fiorenzo-Catalano i Van der Zijpp 2005) modyfikują tę metodę tak, by ścieżki krótsze były wybierane z większym prawdopodobieństwem.

d) Podwójnie stochastyczna zmienność sieci

Metoda ta jest połączeniem dwu poprzednich. Zakłada się tu dwuwymiarową zmienność sieci. Pierwszy wymiar jest subiektywny i dotyczy różnego postrzegania warunków ruchu przez podróżnych, drugi wymiar jest obiektywny i dotyczy zmienności stanu sieci. Założenie zmienności w dwu wymiarach i przeprowadzenie procedury symulacyjnej doprowadzi do poszerzenia przestrzeni decyzyjnej.

Badania w tym zakresie prowadzili (Bovy i Fiorenzo-Catalano 2007) na danych z korytarza Rotterdam-Dodrecht. Algorytm ten jest iteracyjnie przeprowadzaną procedurą wyszukiwania najkrótszej ścieżki dla różnych parametrów kosztów zarówno po stronie sieci, jak i po stronie użytkownika.

e) Metoda podziałów i ograniczeń (branch&bound)

Zaproponowana przez (Prato, 2006) metoda odzwierciedla behawioralne spostrzeżenia o wyborze trasy. Podjęto tutaj próbę stopniowego odrzucania ścieżek „jawnie nie prowadzących do celu", czyli np. zawierających pętle, oddalających się od celu, o dużym wydłużeniu, itp. Kolejne zastosowanie kilku heurystyk prowadzi do stworzenia zbioru ścieżek, które nie są „jawnie nieoptymalne". Algorytmicznie efektem jest zbiór wszystkich tych ścieżek, które nie są eliminowane przez którąś z heurystyk. Algorytm przetestowano na zbiorze danych z Bostonu (dla pracowników MIT), uzyskując znacznie lepsze pokrycie ścieżek niż uzyskał Ben-Akiva z metodą oznaczania ścieżek. (Hoogendorn-Lanser 2005) z powodzeniem zastosował ten algorytm do sieci multi-modalnych.

f) Symulacja algorytmem Metropolisa-Hastingsa

Zaproponowana przez (Flötteröd i Bierlaire, 2011) metoda wykorzystania łańcuchów Markowa w algorytmie Metrpolisa-Hastingsa (MH) jest obiecującą metodą próbkowania ścieżek. Tak jak większość zaczyna ona od ścieżki minimalnej, która jest stanem początkowym łańcucha Markowa. Kolejny stan jest losowany jako modyfikacja stanu poprzedniego polegająca na dodaniu losowo wybranego węzła do najkrótszej ścieżki. Węzły losowane są z prawdopodobieństwem równym odległości od ścieżki pierwotnej tak, że odcinki bliższe są losowane z większym prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo akceptacji kolejnego kroku łańcucha jest wyrażone w formie modelu logitowego analogicznego do tego jaki używany jest w modelu wyboru ścieżki. Udowadnia się, że algorytm ten ustabilizuje się w skończonym zbiorze ścieżek w skończonym czasie. Algorytm ten jako jedyny z przedstawionych generuje zbiór wszystkich ścieżek, które spełniają warunki prawdopodobieństwa w modelu logitowym, tzn. działa dopóki nie przestaną być generowane nowe ścieżki o dodatnim prawdopodobieństwie wyboru. Otóż udowadnia się, że zbiór będący wynikiem algorytmu zawiera wszystkie ścieżki, których prawdopodobieństwo wyboru w modelu logitowym jest większe niż α.

Algorytm został przetestowany na sieci dla Tel-Aviv dając zadowalające wyniki w niezadowalającym czasie (Flötteröd i Bierlaire, 2011). Głównym czynnikiem, który wpływał na czas, była konieczność wielokrotnego rozwiązywania problemu NSP w każdej iteracji. Jeśli jednak uda się uchylić to założenie, to algorytm może z powodzeniem być używany w praktyce.

g) Symulacja algorytmem Metropolisa-Hastingsa dla przypadku dynamicznego

Opisany wyżej algorytm pozwala wygenerować zbiór w oparciu o stałe koszty, tzn. taki o którym prawdziwe jest twierdzenie, że wszystkie ścieżki efektywne w świetle modelu logitowego dla określonych stałych kosztów znajdą się w wynikowym zbiorze algorytmu. Natomiast na potrzeby adaptacyjnego modelu wyboru ścieżki znacznie cenniejsze byłoby stwierdzenie, że zbiór zawiera ścieżki optymalne dla każdej prawdopodobnej realizacji stanu sieci stochastycznej. Wówczas procedura nawet gdyby była bardzo obliczeniochłonna, to zapisanie ścieżek w pamięci znacznie zwiększyłoby stabilność rozwiązań dynamicznych rozkładów ruchu na sytuacje nieprzewidziane. Wzrośnie jego możliwość do adaptacji.

Autor niniejszego artykułu prowadzi badania nad dostosowaniem algorytmu do sieci zmiennej w czasie. Próby polegają na poszerzeniu warunków akceptacji modelu logitowego. Heurystyką pomocniczą jest tu konstatacja, analogiczna do algorytmu podziałów i ograniczeń, że jeśli ścieżka jest odrzucona w najgorszym scenariuszu, to będzie odrzucona w każdym scenariuszu. Testowe wyniki, jak i analiza teoretyczna są obiecujące.

h) Hyperpath

Istotną teorią w rozwiązywaniu jednocześnie PNS, jak i PPS jest hyperstar (Bell i in., 2012) - algorytm dostarczający całego zbioru ścieżek w jednej procedurze rozwiązywania PNS. Algorytm rozwiązuje problem w „hiper-grafie" (ang.: *hypergraph*), czyli grafie określonym przez węzły i „hiper-odcinki" (ang.: *hyperlinks*), które mogą być określone za pomocą więcej niż jednego węzła początkowego i końcowego. W takiej strukturze (Bell et al., 2012) proponują rozwiązanie dla sieci stochastycznej. Wymaganymi danymi wejściowymi algorytmu są minimalny i maksymalny czas przejazdu odcinka. Rozszerzając powszechnie używane do przyśpieszania PNS pojęcie potencjału węzła (z metody A*), określa się prawdopodobieństwo wyboru odcinka. Hyperpath, czyli hiper-ścieżka jest zbiorem wszystkich efektywnych odcinków, czyli tych odcinków których prawdopodobieństwo wyboru jest dodatnie. Strategia wyboru prawdopodobieństwa proponowana przez Bella z zespołem minimalizuje ryzyko opóźnień. Algorytm jednak działa tylko dla ściśle zachowanej reguły FIFO, ponadto wynikiem jest zbiór subiektywnie optymalnych, a nie wszystkich potencjalnych ścieżek.

4. Problem wyboru ścieżki

Dwa poprzednio omawiane problem PNS i PPS są zazwyczaj konieczne do rozwiązania problemu wyboru ścieżki (PWS, ang.: *route choice problem, path choice problem*). W swojej najbardziej teoretycznej formie problem ten dotyczy wyboru ścieżki w sieci spośród wszystkich możliwych. Po pierwsze jednak, jak pokazano w poprzedniej sekcji, wygenerowanie wszystkich możliwych ścieżek nie jest możliwe, po drugie zaś modele podejmowania decyzji operują zazwyczaj na stosunkowo małym zbiorze alternatyw. Problem ten operuje więc na podzbiorze ścieżek wygenerowanym przez procedurę PPS. Dlatego dodatkowym warunkiem dla procedury PPS jest odpowiednia liczba alternatyw dostarczanych PWS.

(Prato, 2009) argumentuje, że ścieżek do kalibracji najpopularniejszych PWS wygenerowanych przez PPS powinno być 70-100 dla każdej pary źródło cel, nie podaje on jednak informacji co należy zrobić, gdy w sieci nie ma aż tylu ścieżek. (Bliemer i Bovy 2008) zauważają z kolei, że zbyt duża liczba alternatyw i uwzględnienie w zbiorze choćby kilku zupełnie nieatrakcyjnych ścieżek istotnie zaburza wyniki PWS. Z drugiej strony jednak ten sam autor (Bovy, 2009) dodaje, że dla zapewnienia robasności procedury (czyli odporności na błędy estymacji), jej kalibracja powinna uwzględniać obszerny zbiór ścieżek, również tych nieatrakcyjnych – co stanowi pewną sprzeczność. Autorzy (Frejinger, 2008) (Bekhor i in., 2006) i inni postulują, że estymacja parametrów PWS powinna być robasna i nieczuła na zbiór wejściowy z PPS, co jest postulatem karkołomnym po pierwsze w definicji, a po drugie w weryfikacji.

Najpopularniejsze modele wyboru stosowane w modelowaniu ruchu, czyli wielomianowy model logitowy (ang.: *multinomial logit*) i zagnieżdżony model logitowy (ang.: *nested logit model*), nie nadają się wprost do zastosowania w modelowaniu wyboru ścieżki. Wynika to z faktu, że modele te stawiają rozważanym alternatywom warunek „iid" (ang.: *independent, identically distributed*), a więc muszą one być o identycznych, niezależnych rozkładach. Co nie ma miejsca w sieci transportowej, gdzie ścieżki pokrywają się, przecinają i są od siebie zależne. Jak pokazują m.in. (Bliemer i Bovy 2008), gdy korelacja między ścieżkami nie jest dobrze reprezentowana, wówczas ścieżki o identycznym koszcie mogą mieć różne prawdopodobieństwa wyboru.

Niestety większość literatury dotyczącej PWS skupia się na odpowiednim obliczeniu korelacji pomiędzy parametrami modelu logitowego. Jest to istotne w kontekście poprawności algorytmicznej, natomiast z perspektywy istoty modelu PWS nie ma znaczenia i jest technicznym szczegółem. Problemy odpowiedniej kalibracji logitowych PWS, np. C-Logit (Cascetta i in. 1996), Path-Size (Ben-Akiva i Ramming 1998) i inne omówiono szczegółowo m.in. w (E. Frejinger, Bierlaire, & Ben-Akiva, 2009), tutaj nie będą omawiane.

Model logitowy, pomimo opisanych wyżej kłopotów teoretycznych jest najczęściej używany w praktyce, głównie ze względu na jego prostotę i łatwość interpretacji. W literaturze nie znajduje się istotnych alternatywnych metod modelowania. Podstawowy model logitowy oraz niemal wszystkie jego popularne wariacje zostały przetestowane w PWS za każdym razem rozbijając się o ten sam problem – opisu korelacji tak, by utrzymać założenie „iid".

Dobre podsumowanie tego szeroko poruszanego problemu daje (Hoogendoorn-Lanser, 2005), gdzie zauważa się, że metody deterministyczne metody PPS (np. zawężeń i ograniczeń) dają wyniki bardziej użyteczne dla PWS, niż wyniki symulacyjnych modeli PPS. Ponadto krzyżowo-zagnieżdżony model logitowy (ang: *Cross Nested Logit*) wydaje się być najbardziej odpowiednią postacią modelu logitowego dla PWS.

(Nielsen, 2004) proponuje uwzględnić heterogeniczność populacji wybierających poprzez używanie w modelach logitowych rozkładu statystycznego dla wagi czasu i kosztu. Jest to jednak bardziej postulat (skądinąd słuszny), natomiast bez praktycznego rozwiązania.

Ciekawe rozwiązanie daje (Cascetta i Papola 2001), którzy jako jedni z niewielu wyłamują się poza tradycyjne ramy modeli logitowych. Zakładają oni, że alternatywy są rozróżnialne i wybierane są nie tylko ze względu na parametry ilościowe (czas, koszt, itp.), ale także jakościowe (czytelność, przyzwyczajenie, estetyka, itp.), zakłada się tam również, że użytkownik nie zdaje sobie sprawy ze wszystkich alternatyw, a ich znajomość jest zależna od charakterystyki użytkownika.

Pojawiają się rozwinięcia modeli logitowych, które zakładają uwzględnienie wskaźników jakościowych i subiektywnych (przyzwyczajenia, znajomość sieci, odczuwanie czasu podróży, itp.) (Cantillo i in., 2006). Przeszkodą w ich zastosowaniu w PWS jest konieczność znajomości pełnego zbioru alternatyw, co jest możliwe w kontekście wyboru środka transportu, wyborze godziny rozpoczynania podróży, ale niemożliwe w przypadku PWS.

(Ben-Elia & Shiftan, 2010) badają relacje pomiędzy informacją o stanie sieci w wypadku gdy informacja jest dostarczana w czasie rzeczywistym. Przeprowadzono tam eksperyment, w którym badani mieli wybierać ścieżki na podstawie doświadczenia i informacji. Na podstawie wyników tego eksperymentu skalibrowano mieszany model logitowy (Mixed Logit Model). Kalibrowano tam parametry dotyczące szybkości uczenia się, wpływu informacji, itp.

5. Adaptacyjność opisywanych modeli

Adaptacyjność rozumiana jest tutaj jako możliwość uwzględnienia zmian w sieci w trakcie przejazdu przez nią. W odróżnieniu od metod biernych (zarówno statycznych, jak i dynamicznych) decyzja co do wyboru trasy podejmowana jest nie tylko w momencie rozpoczęcia podróży, ale również weryfikowana w jej trakcie. Dynamizm klasycznie poruszany w kontekście omawianych wyżej problemów dotyczy zmienności stanu sieci, rozwiązanie pozostaje stałe. Dynamizm w kontekście adaptacji polega na tym, że warunki w sieci są jedynie przewidywane w momencie podejmowania decyzji, a ścieżka jest modyfikowana na podstawie a) informacji b) obserwacji. Efektywność rozwiązania jest oceniana w kontekście dostępu do informacji o stanie sieci, a nie w odniesieniu do fatycznego stanu sieci.

Zjawisko adaptacji może być uwzględnione w każdym z omawianych modeli (PNS, PPS, PWS). Poniżej pokazano możliwe sposoby uwzględnienia adaptacji w kolejnych problemach:

Adaptacyjne w wyborze najkrótszej ścieżki

Adaptacyjny PNS można zdefniować jako określenie najkrótszej ścieżki weryfikowanej w trakcie wykonywania podróży na podstawie zmiennych warunków ruchu. Jeśli warunki ruchu zmienią się na tyle, by inna ścieżka okazała się być optymalna, adaptacyjny model poda aktualne rozwiązanie optymalne

Pojęcia adaptacyjnego algorytmu PNS i PNS dla sieci stochastycznej są ze sobą powiązane. Adaptacyjny model najkrótszej ścieżki, to model uwzględniający zmienność sieci w czasie podróży, a wiedza o zmianach jest nieznana w momencie rozpoczynania podróży. Podejście adaptacyjne, w przeciwieństwie do modelu stochastycznego, daje jednak możliwość zmiany trasy w trakcie podróży.

Dla sieci zmiennej w czasie można wyróżnić dwa podejścia do adaptacji – bierne i czynne. Czynne polega na rozwiązaniu PNS w każdym węźle wybranej ścieżki w momencie dotarcia do niego na podstawie aktualnej wiedzy o sieci. Bierne polega na podjęciu „najbezpieczniejszej" ścieżki uwzględniając na etapie rozpoczynania podróży możliwość zmian w sieci. Podejście bierne jest bliskie rozwiązaniu stochastycznemu, uwzględnia jednak adaptacje w sensie procesu uczenia się (Snowdon i Fangohr, 2012). Dla podejścia czynnego PNS jest rozwiązywany na podstawie aktualnych warunków w sieci zazwyczaj jedną z klasycznych metod, ze zmiennym punktem rozpoczęcia poszukiwania.

Jedną z metod rozwijaną w tej dziedzinie przez badaczy (Gao, Frejinger, Ben-Akiva, 2010) jest uwzględnienie korelacji pomiędzy czasami przejazdu poszczególnych odcinków. Wiąże się to z faktem, że punktowe utrudnienia w sieci propagują na pozostałą część sieci, wobec czego można z dużym prawdopodobieństwem określić prawdopodobieństwo warunkowe pogorszenia warunków ruchu na odcinku *x* pod warunkiem pogorszenia ich na odcinku *y*. Tworzy się wówczas macierz korelacji która używana jest do zaktualizowania oczekiwanych wartości czasów przejazdu. Rozwinięcie to może prowadzić do dwu algorytmów: czynnego, gdzie w każdym kolejnym węźle ścieżki sprawdzamy, czy wybrana trasa nadal jest optymalna (z uwzględnieniem korelacji między utrudnieniami) lub do biernego wyboru strategii minimalizującej ryzyko wystąpienia utrudnień. Podstawowym mankamentem tego podejścia jest konieczność obliczenia macierzy korelacji dla każdej pary odcinków. Autorzy podają rozwiązanie dla sieci o pięciu odcinkach i rozważając jedynie korelacje każdej pary odcinków. Dla sieci o znacznie większej liczbie odcinków, oraz przy uwzględnieniu więcej niż dwu członów prawdopodobieństwa warunkowego byłoby to niemal niewykonalne.

Innym ciekawym podejściem jest algorytm uczący się z wykorzystaniem programowania agentowego (ang.: *agent-based modeling*). (Snowdon & Fangohr, 2012) pokazują przykład z prostą siecią na której symulują wielokrotny przejazdu przez sieć wielu „agentów" wyciągających wnioski z doświadczanych warunków ruchu. W zależności od doboru parametru współczynnika uczenia się każdy „agent" aktualizuje swoją macierz korelacji pomiędzy warunkami ruchu na poszczególnych odcinkach. Ciekawe spostrzeżenia tej pracy obejmują m.in. uwzględnienie zależności procesu uczenia się od wyborów innych agentów. Tzn. na skutek zróżnicowania sposobu uczenia się „agentów" podejmują oni decyzje rodem z teorii gier: *„Jeśli zatłoczony jest odcinek A, to powinienem wybrać odcinek B, jednak pod warunkiem że nie wybiorą go inni. Najprawdopodobniej jednak wybierze go na tyle dużo osób, że warto pozostać na odcinku A."* Innym cennym spostrzeżeniem jest fakt, że ustabilizowany stan sieci po przeprowadzeniu odpowiedniej liczby symulacji różni się od wyniku klasycznego algorytmu równoważącego (ang.: *equilibrium assignment*), który jest fundamentalnym algorytmem w modelowaniu ruchu.

Adaptacja w próbkowaniu ścieżek

Adaptacyjne rozwiązanie PPS, można zdefiniować jako określenie zbioru ścieżek obejmującego rozwiązania adptacyjnego PNS dla każdej kombinacji zmiany warunków ruchu w czasie. Byłoby to próbkowanie opisane jako funkcja zarówno zmian warunków ruchu w czasie, jak i momentu otrzymania informacji o tej zmianie. Algorytm taki posiadałby dwa stopnie swobody więcej w stosunku do klasycznego PPS i byłby bardzo obliczeniochłonny. Powstałaby wówczas iteracyjna procedura próbkująca ścieżki dla każdego węzła w którym może zostać podjęta decyzja o wyborze trasy. Proponowana wyżej metoda MH dla przypadku dynamicznego nie generuje wszystkich ścieżek efektywnych w przypadku adaptacyjnym. Istnieje również teoretyczna możliwość połączenia adaptacyjnych PNS z modelami próbkowania. Próbkowanie z definicji jest wykonywane przed procedurami symulacyjnymi (off-line), wobec tego adaptacja w próbkowaniu może być uwzględniona jedynie biernie – jako uwzględnienie możliwości zmiany w sieci z uwzględnieniem jego prawdopodobieństwa. Nie są znane autorowi przykłady modeli PPS, które uwzględniałyby możliwość adaptacji.

Adaptacja w wyborze ścieżki

Adaptacyjny algorytm wyboru ścieżki odpowiada jak ścieżki wybrane w klasycznym PWS zostaną zaadoptowane do aktualnych warunków ruchu.

Istnieją skuteczne metody adaptacyjnego PWS na potrzeby chociażby nawigacji (Bell et al., 2012). W metodach takich optymalna ścieżka jest weryfikowana w czasie rzeczywistym na podstawie docierających informacji. Korzystający z takiej nawigacji dostaje informacje o proponowanej zmianie ścieżki i adaptacji jej do faktycznych warunków. Większość literatury w tej kwestii podaje rozwiązania dla pojedynczego użytkownika, bez informacji o wpływie adaptacji na całą sieć (Gao, 2012). Są to skuteczne rozwiązania działające w czasie rzeczywistym i uwzględniające zmiany w sieci. Nie pojawiają się jednak opisy metod pozwalających na uwzględnienie tego zjawiska w modelowaniu ruchu. Interesujące wyniki na temat adaptacji trasy na postawie informacji ze znaków zmiennej treści pokazuje (Schlaich, 2010). Badania takie mogą być podstawą do weryfikacji propozycji adaptacyjnego modelu wyboru ścieżki. Póki co brak znanych autorowi opisów adaptacyjnego modelu wyboru ścieżki na potrzeby modelowania ruchu.

6. Podsumowanie

W artykule omówiono obszerny zbiór teorii, który pozwala uzyskać w zwięzłej formie wiedzę o technicznej stronie modelowania ruchu. Pokazano tu elementarne teorie, powszechnie używane w modelowaniu. Pokazano także ich rozwinięcia i udoskonalenia, zarówno udoskonalenia w obrębie samych algorytmów, jak i użyteczne heurystyki przyśpieszające obliczenia. Jak pokazuje niniejszy przegląd wiele problemów jest nierozwiązanych, a wiele rozwiązań jest jedynie teoretycznymi propozycjami bez możliwości zastosowania w praktyce. Interesujący kazus przyśpieszenia rozwiązania PNS (Abraham i in., 2010) nawet o sześć rzędów wielkości w stosunku do klasycznego algorytmu Dijkstry pokazuje, jak bardzo można przyśpieszyć cały proces rozkładu ruchu na sieć. Metody takie wciąż nie są w pełni wykorzystywane w praktyce.

Równie interesujące jest stopniowe rozszerzanie definicji sieci transportowej – od najprostszego, statycznego grafu o obiektywnych, stałych kosztach przejazdu, przez odczuwalne wielomianowe koszty podróży, zmienne w czasie koszty i czasy przejazdu, stochastyczną niepewność, aż do subiektywnych map kognitywistycznych, którymi można opisać jak użytkownik dokonuje wyboru. Takie zwiększenie dokładności daje duże możliwości, potrzebne są jednak zwięzłe i użyteczne teorie, weryfikowane badaniami.

Jak jednak pokazuje przykład modeli wyboru ścieżki, gdzie od kilkunastu lat badacze roztrząsają poboczny problem współczynnika normalizującego z modelu logitowym, jeszcze daleka droga do wiernego odwzorowania zachowania użytkowników w sieci transportowej. Jednak raptowny wzrost dostępności danych oraz zdolności obliczeniowych pozwala mieć nadzieję na rozwój opisanych metod.

Bibliografia

[1] Abraham I., Delling D., Goldberg A. V., Werneck R., 2010. A Hub-Based Labeling Algorithm for Shortest Paths on Road Networks, Microsoft Research Silicon Valley.

[2] Bast H., S. Funke S., Sanders P., Schultes D., 2007, Fast Routing in Road Networks with Transit Nodes, Science, Vol. 316. no. 5824, p. 566, 27. April 2007.

[3] Bekhor, S., Ben-Akiva, M. E., & Ramming, M. S., 2006. Evaluation of choice set generation algorithms for route choice models. Annals of Operations Research, 144(1), 235–247. doi:10.1007/s10479-006-0009-8

[4] Bell, M. G. H., Trozzi, V., Hosseinloo, S. H., Gentile, G., & Fonzone, A., 2012. Time-dependent Hyperstar algorithm for robust vehicle navigation. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 46(5), 790–800. doi:10.1016/j.tra.2012.02.002

[5] Ben-Akiva, M., Bergman, M.J., Daly, A.J., Ramaswamy, R., 1984. Modeling inter-urban route choice behaviour. Proceedings of the Ninth International Symposium on Transportation and Traffic Theory. VNU Science Press, Utrecht. pp. 299–330.

[6] Ben-Akiva, M. and Ramming, S., 1998. Lecture notes: Discrete choice models of traveler behavior in networks. Prepared for Advanced Methods for Planning and Management of Transportation Networks. Capri, Italy

[7] Ben-Elia, E., & Shiftan, Y., 2010. Which road do I take? A learning-based model of route-choice behavior with real-time information. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 44(4), 249–264. doi:10.1016/j.tra. 2010.01.007

[8] Bliemer, M.C.J., Bovy, P.H.L., 2008. Impact of route choice set on route choice probabilities. Transportation Research Record, 2076, 10-19.

[9] Bovy, P.H.L., Bekhor, S., Prato, C.G., 2009. Route sampling correction for stochastic route choice set generation. Proceedings of the 88th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington, D.C.

[10] Bovy, P.H.L., Fiorenzo-Catalano, S., 2007. Stochastic route choice set generation: behavioral and probabilistic foundations. Transportmetrica, 3(3), 173-189.

[11] Cantillo, V., Heydecker, B., Ortuzar, J.d.D., 2006. A discrete choice model incorporating thresholds for perception in attribute values. Transportation Research Part B, 40(9), 807-825.

[12] Cascetta, E., Nuzzolo, A., Russo, F. and Vitetta, A., 1996. A modified logit route choice model overcoming path overlapping problems. Specification and some calibration results for interurban networks, in J. B. Lesort (ed.), Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Lyon, France.
[13] Cascetta, E., Papola, A., 2001. Random utility models with implicit availability perception of choice travel for the simulation of travel demand. Transportation Research Part C, 9(4), 249-263.
[14] Cooke, K., Halsey, E., 1966. The shortest route through a network with time-dependent internodal transit times. Journal of Mathematical Analysis and Applications 14, 493–498.
[15] De la Barra, T., B. Perez, and J. Anez., 1993. Multidimensional Path Search and Assignment. In Proceedings of the 21st PTRC Summer Meeting, pp. 307–319.
[16] De Palma A., Hansen P. And Labbé M., 1993. Commuters' paths with penalties for early or late arrival times, Transportation Science 24, 276-286
[17] Dijkstra, E. W., 1959. A note on two problems in connexion with graphs
[18] Dionne, R., 1978. E´ tude et extension d'un algorithme de Murchland. INFOR 16, 132–146.
[19] Dubois D., Prade H., 1980, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.
[20] Fakcharoemphol J. and Rao S. Planar graphs, negative weight edges, shortest paths, and near linear time. In Proc. of the 42nd IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'01), Las Vegas, Nevada, pages 232–241, 2001.
[21] Flötteröd, G., & Bierlaire, M., 2011. Metropolis-Hastings sampling of paths.
[22] Frank H., 1969, Shortest paths in probability graphs, Operations Research 17 (4) (1969) 583–599.
[23] Frejinger, E., Bierlaire, M., & Ben-Akiva, M., 2009. Sampling of alternatives for route choice modeling. Transportation Research Part B: Methodological, 43(10), 984–994. doi:10.1016/j.trb.2009.03.001
[24] Frejinger, Emma., 2008. Route choice analysis: data, models, algorithms and applications, 4009. Retrieved from http://biblion.epfl.ch/EPFL/theses/2008/4009/EPFL_TH4009.pdf
[25] Frejinger, Emma., 2009. Route choice modeling without route choice, 1–14.
[26] Gao, S., Frejinger, E., & Ben-Akiva, M., 2010. Adaptive route choices in risky traffic networks: A prospect theory approach. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 18(5), 727–740. doi:10.1016/j.trc.2009.08.001

[27] Gao, Y., 2011. Shortest path problem with uncertain arc lengths. Computers & Mathematics with Applications, 62(6), 2591–2600. doi:10.1016/j.camwa.2011.07.058

[28] Gao, S, Huang, H., 2012. Real-time traveler information for optimal adaptive routing in stochastic time-dependent networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, *21*(1), 196–213. doi:10.1016/j.trc.2011.09.007

[29] Gentile, G., Meschini, L., Papola, N., 2004. Fast heuristics for continuous dynamic shortest paths and all-or-nothing assignment.

[30] Hart, P. E., Nilsson, N. J., Raphael, B., 1972. „Correction to „A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths"". SIGART Newsletter 37: 28–29.

[31] Henzinger M.R., Klein P., Rao S., and Subramanian S. Faster shortest-path algorithms for planar graphs. Journal of Computer and System Sciences, 55(1):3–23, August 1997

[32] Hoogendoorn-Lanser, S., 2005. Modelling Travel Behaviour in Multimodal Networks, PhD thesis, Delft University of Technology.

[33] Johnson, D. B., 1975. Priority queues with update and finding minimum spanning trees, Information Processing Letters 4 (3): 53–57.

[34] Leyzorek, M., Gray, R. S., Johnson, A. A., Ladew, W. C., Meaker, Jr., S. R., Petry, R. M., Seitz, R. N., 1957. Investigation of Model Techniques — First Annual Report — 6 June 1956 — 1 July 1957 — A Study of Model Techniques for Communication Systems. Cleveland, Ohio: Case Institute of Technology.

[35] Liu B., 2007, Uncertainty Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[36] Liu W., 2010, Uncertain programming models for shortest path problem with uncertain arc lengths, in: Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory, Urumchi, China, August 11–19, 2010, pp. 148–153.

[37] Menghini, G., Carrasco, N., Schüssler, N., & Axhausen, K. W., 2010. Route choice of cyclists in Zurich. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 44(9), 754–765. doi:10.1016/j.tra.2010.07.008

[38] Nielsen, O.A., 2004. Behavioral responses to road pricing schemes: description of the Danish AKTA experiment. Journal of Intelligent Transportation Systems 8 (4), 233–251.

[39] Pallottino, S., Scutella`, M., 1997. Dual algorithms for the shortest path tree problem. Networks 29, 125–133.

[40] Papinski, D., Scott, D. M., & Doherty, S. T., 2009. Exploring the route choice decision-making process: A comparison of planned and observed routes obtained using person-based GPS. Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour, 12(4), 347–358. doi:10.1016/j.trf.2009.04.001

[41] Prato, C. G. 2009). Route choice modeling: past, present and future research directions, 2(1), 65–100.
[42] Prato, C.G., Bekhor, S., 2006. Applying branch & bound technique to route choice set generation. Transportation Research Record, 1985, 19-28.
[43] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin, 1993. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications.
[44] Sedgewick R., Wayne K., 2011. Algorithms (4th Edition) Addison-Wesley Professional.
[45] Sheffi, Y., Powell, W.B., 1982. An algorithm for the equilibrium assignment problem with random link times. Networks, 12, 191-207.
[46] Snowdon, J., & Fangohr, P. H., 2012. Evolution of adaptive route choice behaviour in drivers, (January), 1–12.
[47] Tarjan, R. E., 1983. Data structures and network algorithms. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
[48] van der Zijpp, N. J., & Fiorenzo Catalano, S., 2005. Path enumeration by finding the constrained K-shortest paths. Transportation Research Part B: Methodological, 39(6), 545–563. doi:10.1016/j.trb.2004.07.004
[49] Zhan, F. B., & Noon, C. E., 1998. Shortest Path Algorithms: An Evaluation using Real Road Networks, 10, 65–73.