

Szczepan Opach

Instytut Napędów i Maszyn Elektrycznych KOMEL, Katowice

## ANALIZA KINEMATYCZNA ZŁOŻONYCH KONSTRUKCYJNIE PRZEKŁADNI OBIEGOWYCH DO ELEKTROMECHANICZNYCH ZESPOŁÓW NAPĘDOWYCH Z ZASTOSOWANIEM WZORÓW WILLISA

### KINEMATIC ANALYSIS OF COMPLICATED PLANETARY GEARS FOR ELECTROMECHANICAL DRIVES USING WILLIS MATHEMATICAL FORMULAS

**Streszczenie:** Artykuł prezentuje możliwości analizy kinematycznej przekładni planetarnych o dwóch stopniach swobody z użyciem wzorów Willisa. W drugiej części artykułu, zaprezentowano możliwości wykorzystania wyprowadzonych wzorów w analizie złożonych konstrukcyjnie przekładni planetarnych, stosowanych w elektromechanicznych układach napędowych samochodów elektrycznych.

**Abstract:** The article presents the possibilities of kinematic analysis of planetary gears with two degrees of freedom using Willis mathematical formulas. In the second part of the article, the possibilities of using formulated formulas in the analysis of complicated planetary gears used in electromechanical drives systems of electric cars are presented.

**Słowa kluczowe:** przekładnia obiegowa, napęd elektryczny, pojazd elektryczny, wzory Willisa

**Keywords:** planetary gear, electric drive, electric vehicle, Willis formulas

#### 1. Wstęp

Projektowanie złożonych elektromechanicznych układów napędowych, wymaga kompleksowego podejścia nie tylko do kwestii wytwarzania mocy mechanicznej przy użyciu przetworników elektromechanicznych, ale również do kwestii przetwarzania i transmisji samej mocy mechanicznej. W tym względzie coraz większym uznaniem cieszą się przekładnie obiegowe, ze względu na ich oczywiste, niepodlegające dyskusji zalety. Transmisja mocy mechanicznej w układach napędowych wymaga przełożeń gwarantujących uzyskanie znacznych wartości momentów siły na wałach wyjściowych przekładni. Klasyczne przekładnie o osiach stałych, spełniające ten warunek są najczęściej wielostopniowe, co zwiększa ich gabaryty, masę a w konsekwencji zastosowania większej ilości kół zębatach, również obniża sprawność. Przekładnia obiegowa dzięki specyficznej konstrukcji, zapewnia uzyskanie znacznych przełożeń momentowych przy jednocześnie zwartej budowie i małej masie [1]. Rozwiązanie takie może mieć szerokie zastosowanie w układach napędowych pojazdów elektrycznych. Z powodzeniem może zastąpić rozwiązanie dotychczas najczęściej spotykane,

gdzie silnik elektryczny sprzęgnięty jest z klasyczną przekładnią z mechanizmem różnicowym [2-4]. Skłoniło to autora do skupienia większej uwagi na zagadnieniu transmisji mocy mechanicznej przez przekładnie obiegowe w ramach prac badawczo – rozwojowych prowadzonych w Instytucie Napędów i Maszyn Elektrycznych KOMEL, aby w przyszłości móc lepiej rozumieć i przewidywać zjawiska w nich zachodzące.

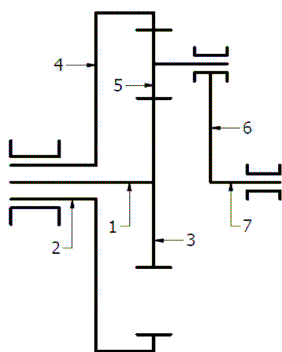
#### 2. Charakterystyka przekładni obiegowych

Cechą charakterystyczną, wyróżniającą przekładnie obiegowe, jest brak ustalonej osi obrotu przynajmniej jednego koła zębatego - zwanego dalej kołem satelitarnym. W klasycznej konstrukcji przekładni obiegowej, koło satelitarne wykonuje ruch obrotowy wokół własnej osi, która to oś wykonuje dodatkowo ruch obrotowy wokół osi geometrycznej jarzma [1]. Koła satelitarne pozostają wówczas w jednoczesnym zazębieniu z kołem centralnym o uzębieniu zewnętrznym i kołem koronowym o uzębieniu wewnętrznym, przetaczając się po obu i są jednocześnie sprzęgnięte przez jarzmo przekładni.

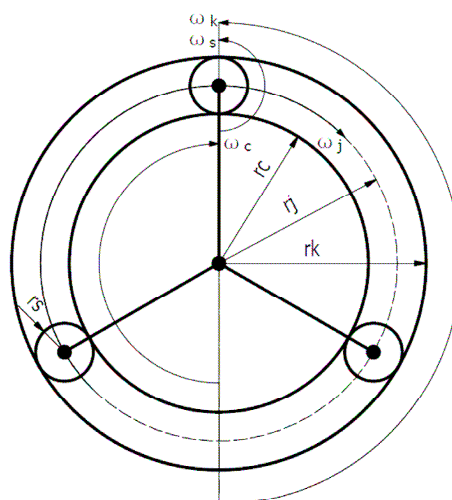
Koło satelitarne wykonuje zatem ruch złożony – postępowy i obrotowy jednocześnie. Jarzmo przenosi najczęściej ruch obrotowy bezpośrednio na zewnątrz przekładni.

### 3. Analiza kinematyczna przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody

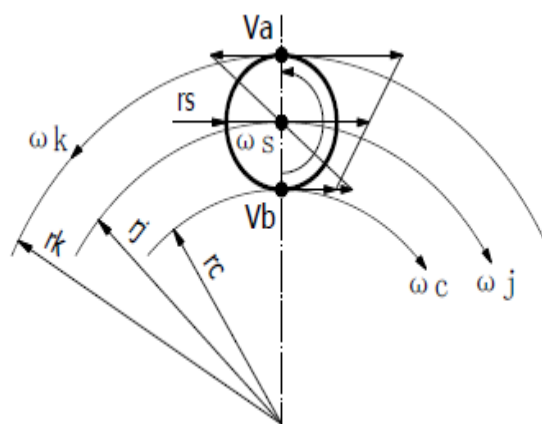
Analizując ogólny schemat przekładni obiegowej, można wyróżnić kilka przypadków kinematycznych, wynikających z faktu ruchu lub spoczynku odpowiednich kół. Przekładnia planetarna może pracować z unieruchomionym kołem koronowym lub z unieruchomionym kołem centralnym. W tych dwóch przypadkach, jarzmo przekładni porusza się ruchem obrotowym, koła satelitarne wykonują ruch obrotowy wokół osi własnych, a ich osie wykonują ruch obrotowy wokół osi jarzma. Są to przypadki kinematycznie proste i najczęściej występujące. Bardziej skomplikowany przypadek występuje w czasie jednoczesnego ruchu obrotowego koła centralnego i koła koronowego. W sytuacji zrównania się prędkości obwodowych koła centralnego i koła koronowego, jarzmo nie będzie poruszać się ruchem obrotowym, czyli transmisja mocy na wyjście przekładni nie zostanie przeprowadzona. Moc będzie krążyć wewnątrz przekładni. Przekładnia obiegowa z ruchomym kołem centralnym oraz ruchomym kołem koronowym nosi nazwę przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody. Analiza kinematyczna takiej przekładni, służy wypracowaniu ogólnych i uniwersalnych wzorów na przełożenia kinematyczne, które wykorzystywać można na etapie analizy bardziej skomplikowanych przypadków.



Rys. 1. Schemat kinematyczny przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody: 1-wał główny silnika, 2-wał sterujący silnika, 3-koło centralne przekładni, 4-koło koronowe przekładni, 5-koło satelitarne przekładni, 6-jarzmo przekładni, 7-wał wyjściowy przekładni



Rys. 2. Prędkości kątowe kół zębatach w przekładni planetarnej:  $\omega_s$  – prędkość kątowa koła satelitarnego,  $\omega_k$  – prędkość kątowa koła koronowego,  $\omega_c$  – prędkość kątowa koła centralnego,  $\omega_j$  – prędkość kątowa jarzma satelitów,  $r_s$  – promień podziałowy koła satelitarnego,  $r_k$  – promień podziałowy koła koronowego,  $r_c$  – promień podziałowy koła centralnego,  $r_j = r_c + r_s$



Rys. 3. Punkty charakterystyczne koła satelitarnego do wyznaczania prędkości obwodowych.  $\omega_s$  – prędkość kątowa koła satelitarnego,  $\omega_k$  – prędkość kątowa koła koronowego,  $\omega_c$  – prędkość kątowa koła centralnego,  $\omega_j$  – prędkość kątowa jarzma satelitów,  $r_s$  – promień podziałowy koła satelitarnego,  $r_k$  – promień podziałowy koła koronowego,  $r_c$  – promień podziałowy koła centralnego,  $r_j = r_c + r_s$ ,  $V_a$  – prędkość obwodowa koła satelitarnego w punkcie a,  $V_b$  – prędkość obwodowa koła satelitarnego w punkcie b

Analizując powyższe rysunki oraz kinematykę ruchu, można zapisać równania prędkości ob-

wodowych w punktach charakterystycznych koła satelitarnego. Są to punkty styczności okręgu podziałowego koła satelitarnego z okręgami podziałowymi koła centralnego i koronowego.

$$V_a = \omega_j \cdot (r_j + r_s) - \omega_s \cdot r_s = \omega_j \cdot r_k - \omega_s \cdot r_s = \omega_k \cdot r_k$$

$$V_b = \omega_j \cdot (r_j - r_s) + \omega_s \cdot r_s = \omega_j \cdot r_c + \omega_s \cdot r_s = \omega_c \cdot r_c$$

Powstaje zatem następujący układ równań, które można dodać parami, otrzymując ostatecznie jedno równanie kinematyki przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody:

$$\begin{cases} \omega_j \cdot r_k - \omega_s \cdot r_s = \omega_k \cdot r_k \\ \omega_j \cdot r_c + \omega_s \cdot r_s = \omega_c \cdot r_c \end{cases}$$

$$\omega_j \cdot r_k + \omega_j \cdot r_c = \omega_k \cdot r_k + \omega_c \cdot r_c$$

$$r_k \cdot \omega_j - r_k \cdot \omega_k = r_c \cdot \omega_c - r_c \cdot \omega_j$$

$$-r_k \cdot (\omega_k - \omega_j) = r_c \cdot (\omega_c - \omega_j)$$

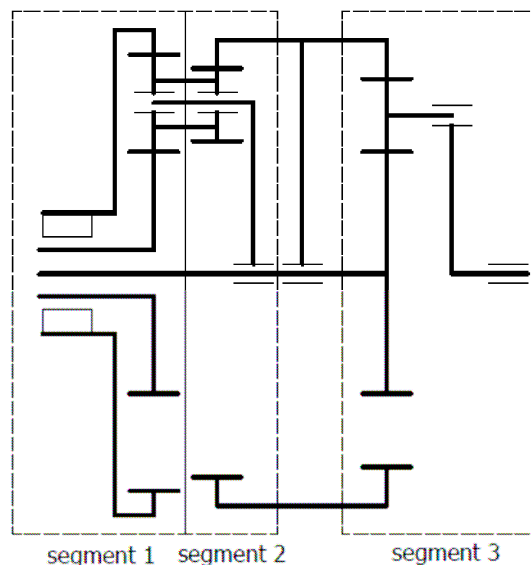
$$\frac{\omega_c - \omega_j}{\omega_k - \omega_j} = -\frac{r_k}{r_c} = i_{ck}^j$$

Wzór, który wyprowadzono, na drodze analizy kinematyki ruchu poszczególnych kół przekładni obiegowej, nosi nazwę wzoru Willis'a [5]. Można go stosować w analizie wszystkich omówionych wcześniej przypadków kinematycznych przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody.

#### 4. Przełożenia kinematyczne w zmodyfikowanych konstrukcyjnie przekładniach obiegowych

Zmodyfikowana przekładnia zębata jest wielosegmentowa. W pierwszym segmencie zastosowano nieruchome koło koronowe oraz ruchome koło centralne. Koła satelitarne wykonują ruch złożony z ruchu postępowego względem obwodu koła koronowego oraz ruchu obrotowego względem własnych osi. Koła satelitarne pierwszego segmentu zostały bezpośrednio sprzężone z kołami satelitarnymi drugiego segmentu. Ich prędkości kątowe są zatem identyczne, obwodowe natomiast zależne od wartości promieni podziałowych. W drugim segmencie nie występuje koło centralne, a jedynie ruchome koło koronowe. Wspólne jarzmo satelitów segmentu pierwszego i drugiego łożyskowane jest na wale głównym. W segmencie drugim i trzecim występuje sprzężone koło koronowe o różnych średnicach podziałowych dla poszczególnych segmentów. Prędkości

obwodowe kół koronowych liczone na średnicach podziałowych segmentu drugiego i trzeciego są zatem różne. Segment trzeci realizuje zadania klasycznej przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody. Posiada więc ruchome koło centralne i ruchome koło koronowe oraz ruchome jarzmo przenoszące ruch obrotowy na zewnątrz przekładni.



Rys. 4. Zmodyfikowana konstrukcja przekładni z podziałem na poszczególne segmenty kół zębatych

Wobec powyższego, dla poszczególnych segmentów, zastosować można zmodyfikowane wzory Willis'a na przełożenia kierunkowe dla omówionych wcześniej przypadków: unieruchomionego koła koronowego, ruchomego koła koronowego z pewną modyfikacją, zakładającą, że koło centralne w tym segmencie nie występuje oraz dla przekładni o dwóch stopniach swobody.

##### 4.1. Obliczenia kinematyczne segmentu pierwszego

Koło koronowe w segmencie pierwszym nie pracuje. Zastosowano więc wzór dla  $\omega_{k1}=0$ . Wzór Willis'a przybiera wówczas następującą postać:

$$i_{ck1}^j = \frac{\omega_{c1} - \omega_{j1}}{\omega_{k1} - \omega_{j1}} = \frac{\omega_{c1} - \omega_{j1}}{-\omega_{j1}} = -\frac{r_{k1}}{r_{c1}}$$

$$\omega_{j1} \cdot r_{k1} = (\omega_{c1} - \omega_{j1}) \cdot r_{c1}$$

$$\omega_{j1} \cdot r_{k1} + \omega_{j1} \cdot r_{c1} = \omega_{c1} \cdot r_{c1}$$

$$\omega_{j1} \cdot (r_{k1} + r_{c1}) = \omega_{c1} \cdot r_{c1}$$

$$\omega_{j1} = \omega_{c1} \cdot \frac{r_{c1}}{r_{k1} + r_{c1}}$$

Ponieważ w segmencie pierwszym, koło koronowe nie pracuje, zwroty wektorów prędkości kątowych koła centralnego i jarzma satelitów będą ze sobą zgodne. Prędkość kątowa kół satelitarnych policzona została również przy użyciu zależności wynikającej ze Wzoru Willis'a.

$$1t_{sk}^j = \frac{\omega_{s1}}{\omega_{k1} - \omega_{j1}} = \frac{\omega_{s1}}{-\omega_{j1}} = \frac{r_{k1}}{r_{s1}}$$

$$\omega_{s1} \cdot r_{s1} = -\omega_{j1} \cdot r_{k1}$$

$$\omega_{s1} = -\omega_{j1} \cdot \frac{r_{k1}}{r_{s1}}$$

Zwrot wektora prędkości kątowej kół satelitarnych jest oczywiście przeciwny do zwrotu wektora prędkości jarzma satelitów.

#### 4.2. Obliczenia kinematyczne segmentu drugiego

Wektory prędkości kątowych jarzma satelitów w segmencie pierwszym i segmencie drugim są identyczne co do wartości i kierunku ze względu na sprzężenie mechaniczne kół satelitarnych.

W praktyce istnieje jedno wspólne jarzmo dwóch segmentów kół satelitarnych, rozdzielone jednak myślowo w omawianym przykładzie ze względu na wygodę indeksowania. Równe sobie, co do wartości i kierunku są oczywiście również wektory prędkości kątowych samych kół satelitarnych. Można więc zapisać:

$$\omega_{j2} = \omega_{j1}$$

$$\omega_{s2} = \omega_{s1}$$

Przełożenie kierunkowe pomiędzy kołem satelitarnym oraz kołem koronowym w segmencie drugim, policzone zostało z następującej zależności, wynikającej z Wzoru Willis'a:

$$2t_{sk}^j = \frac{\omega_{s2}}{\omega_{k2} - \omega_{j2}} = \frac{r_{k2}}{r_{s2}}$$

$$\omega_{s2} \cdot r_{s2} = (\omega_{k2} - \omega_{j2}) \cdot r_{k2}$$

$$\omega_{s2} \cdot r_{s2} = \omega_{k2} \cdot r_{k2} - \omega_{j2} \cdot r_{k2}$$

$$\omega_{k2} = \frac{\omega_{s2} \cdot r_{s2} + \omega_{j2} \cdot r_{k2}}{r_{k2}}$$

#### 4.3. Obliczenia kinematyczne segmentu trzeciego

Dla segmentu trzeciego, zastosowano wzór ogólny, stosowany w przypadku przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody. Mamy tutaj bowiem do czynienia z przypadkiem ruchomego koła koronowego oraz ruchomego koła centralnego. Wzór Willis'a przyjmuje postać:

$$3t_{ck}^j = \frac{\omega_{c3} - \omega_{j3}}{\omega_{k3} - \omega_{j3}} = -\frac{r_{k3}}{r_{c3}}$$

$$-(\omega_{k3} - \omega_{j3}) \cdot r_{k3} = (\omega_{c3} - \omega_{j3}) \cdot r_{c3}$$

$$-\omega_{k3} \cdot r_{k3} + \omega_{j3} \cdot r_{k3} = \omega_{c3} \cdot r_{c3} - \omega_{j3} \cdot r_{c3}$$

$$\omega_{j3} \cdot (r_{k3} + r_{c3}) = \omega_{c3} \cdot r_{c3} + \omega_{k3} \cdot r_{k3}$$

$$\omega_{j3} = \frac{\omega_{c3} \cdot r_{c3} + \omega_{k3} \cdot r_{k3}}{r_{c3} + r_{k3}}$$

W powyższym wzorze, dokonać należy następującego podstawienia z uwagi na sprzężenie mechaniczne kół koronowych w segmencie drugim i trzecim.

$$\omega_{k3} = \omega_{k2}$$

Prędkości  $\omega_{c1}$  oraz  $\omega_{c3}$ , odpowiadają wartości prędkości kątowych wałów, odpowiednio silnika sterującego oraz głównego i powinny być podstawione ze znakami uwzględniającymi zwrot ich wektorów. Prędkość  $\omega_{j3}$ , odpowiada wartości prędkości wału wyjściowego przekładni obiegowej, w oparciu o którą dokonuje się obliczenia stosownych przełożeń kinematycznych.

Celem wyznaczenia wartości momentu siły na wale wyjściowym przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody należy w pierwszej kolejności dokonać bilansu mocy przekładni. W praktyce oznacza to odjęcie wartości strat mocy przekładni od sumy wartości mocy mechanicznej uzyskiwanej na wałach silnika głównego i sterującego. Moc mechaniczną uzyskiwaną w ten sposób na wale wyjściowym przekładni dzieli się przez wartość uzyskanej prędkości kątowej wału wyjściowego  $\omega_{j3}$ , uzyskując w ten sposób wartość momentu siły.

## 5. Podsumowanie i wnioski

Zaprezentowany artykuł, jest pierwszym z cyklu, podejmujących problematykę przekładni obiegowych w ramach prac badawczo - rozwojowych, prowadzonych przez autora w Instytucie Napędów i Maszyn Elektrycznych KOMEL. W artykule skupiono uwagę na zależnościach kinematycznych złożonych konstrukcyjnie przekładni obiegowych w elektromechanicznych zespołach napędowych pojazdów elektrycznych. Posługując się zależnościami wyprowadzonymi z wzorów Willisa, wyznaczono wartości przełożeń kinematycznych przykładowej przekładni wielosegmentowej. Zwrócono uwagę na uniwersalność zaprezentowanych zależności, pozwalających na analizę kinematyczną różnego typu modyfikacji konstrukcyjnych przekładni obiegowych.

Skupienie większej uwagi na problematyce przekładni obiegowych, wymusiła konieczność prowadzenia badań kompletnych, zintegrowanych z przekładnią zespołów napędowych pojazdów elektrycznych. Wynika z tego konieczność dalszego podejmowania tej tematyki w pracy badawczej autora.

## 6. Literatura

- [1]. P. Wysmulski, K. Falkowicz, P. Różyło: „Przekładnia obiegowa jako podzespół mechanizmu napędowego w środkach transportu”, *Logistyka* 3/2015.
- [2]. Fręchowicz A., Dukalski P., Białas A.: "Projekt napędu samochodu elektrycznego z dwustrefowym układem sterowania współpracującym z silnikiem PMLBDC", *Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe*, nr 3/2012 (96), str. 115-121, BOBRME „Komel”.
- [3]. B. Będkowski, W. Radwański: "Obliczenia trakcyjne pojazdu sportowo-rekreacyjnego UTV", *Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe*, nr 3/2012 (96), str. 105-108, BOBRME „Komel”.
- [4]. B. Będkowski, A. Białas, W. Radwański, R. Rossa: "Koncepcja napędu elektrycznego "E-KIT" dla miejskich samochodów osobowych", *Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe*, nr 4/2012 (97), str. 95-100, BOBRME „Komel”.
- [5]. E. Mazanek, L. Kania, A. Dziurski, A. Kasprzycki, J. Ziara: "Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn", Wydawnictwo WNT, Warszawa 2012.

## 7. Autorzy

mgr inż. Szczepan Opach  
Instytut Napędów i Maszyn Elektrycznych  
KOMEL, sz.opach@komel.katowice.pl  
40-203 Katowice, al. Roździeńskiego 188