MINUT 2023 (5), s. 101–120
ISSN 2719-3063

Witold TOMASZEWSKI[1]

[1]Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska,
ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Matematyk w kosmosie, czyli ile kulek potrzeba do złożenia eskadry statków kosmicznych?

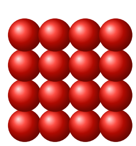
Streszczenie. Celem tego artykułu jest zaprezentowanie sposobu uzasadniania pewnych równości kombinatorycznych pod pretekstem zabawy z układaniem figur geometrycznych z kulek. Na końcu umieszczono zestaw zadań wraz z rozwiązaniami dla zainteresowanych czytelników.

Słowa kluczowe: symbol Newtona, równości kombinatoryczne.

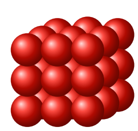
1. Wstęp

Autor pragnie przeprosić czytelników, którzy zwiedzeni tytułem spodziewają się znaleźć w nim treści związane z podróżami kosmicznymi, eksploracją kosmosu lub chociaż konstrukcją rakiet. Tak naprawdę prezentujemy w nim kombinatoryczne równości oraz metody ich uzasadniania. Będziemy układać kulki w różne figury geometryczne i wyprowadzimy wzory pozwalające obliczać liczbę kulek potrzebnych do stworzenia każdej z figur. Rozpatrywane figury to trójkąty, piramidy, statki kosmiczne i ich eskadry. Na końcu znajduje się zestaw zadań wraz z rozwiązaniami.

Głównym polem zainteresowań starożytnych, greckich, matematyków była geometria. Stworzyli jej podstawy oraz wypracowali szereg jej własności. Interesowali się też liczbami, które można tworzyć z obiektów (kulek, kwadratów itp.) ułożonych w struktury przypominające figury geometryczne. Przykładami są liczby kwadratowe, które można „ułożyć” w kwadrat lub liczby sześcienne „ułożone” w sześcian. Do dziś przetrwało odpowiednie nazewnictwo dotyczące drugiej i trzeciej potęgi: mówiąc „n kwadrat” i „n sześcian” mamy na myśli drugą i trzecią potęgę liczby n. Nie ma odpowiedniego nazewnictwa dla wyższych potęg, bo wymagałoby to tworzenia figur o większej liczbie wymiarów, a Grecy nie podejmowali rozważań, dla których nie widzieli wyraźnych zastosowań.



$4^2 = 16$



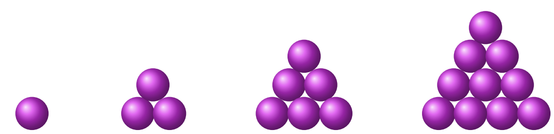
$3^3 = 27$

Autor korespondencyjny: W. Tomaszewski (Witold.Tomaszewski@polsl.pl).
Data wpłyniecia: 24.05.2023.

Kolejnym naturalnym przykładem liczb, które można „ułożyć” w obiekty geometryczne są liczby trójkątne, którym poświęcony jest kolejny rozdział.

2. Liczby trójkątne

Wyobraźmy sobie, że układamy kulki w rzędach w ten sposób, że w pierwszym rzędzie kładziemy jedną kulkę, w następnym dwie, potem trzy i tak dalej, tworząc w ten sposób układ kul przypominający trójkąt równoboczny. Jeśli ułożymy n takich rzędów, to liczbę kulek zużytych do stworzenia tego trójkąta nazywamy n-tą liczbą trójkątną. Będziemy oznaczać przez T_n zarówno sam trójkąt, jak i liczbę kulek w nim zawartych. Ile wynosi T_n? Jak widać na rysunku poniżej $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$.



$n = 1$ $T_1 = 1$ $n = 2$ $T_2 = 3$ $n = 3$ $T_3 = 6$ $n = 4$ $T_4 = 10$

Ogólniej liczba kulek dla n-tej liczby trójkątnej jest równa sumie kolejnych liczb naturalnych od 1 do n, a więc

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Niektórzy z czytelników wiedzą zapewne, że ta suma wynosi $\frac{n(n+1)}{2}$. Zatem

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A jak wykazać tę ostatnią równość? Zrobimy to na dwa sposoby.

Pierwszy sposób związany jest z anegdotą o jednym z największych matematyków w historii, Carlu Friedrichu Gaussie. Otóż Gauss wykazywał niezwykłe zdolności matematyczne od najmłodszych lat. W wieku 6 lat zaczął uczęszczać do szkoły. Podobno był dość niesfornym dzieckiem, więc nauczyciel, chcąc go uspokoić na jakiś czas, kazał mu obliczyć sumę wszystkich liczb od 1 do 50. Nauczyciel zapewne uznał, że nawet temu zdolnemu młodzieńcowi zajmie to trochę czasu. Gauss podszedł sprytnie do tego zadania. Napisał tą sumę dwukrotnie raz od 1 do 50, a następnie w odwróconej kolejności i dodał wyniki stronami:

$$\begin{array}{rccccccccc}
S = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 49 & + & 50 \\
S = & 50 & + & 49 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S = & 51 & + & 51 & + & \cdots & + & 51 & + & 51
\end{array}$$

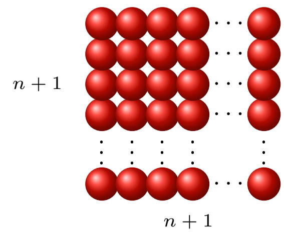
Następnie zauważył, że w pionach otrzymał 50 razy 51, więc $2S = 50 \cdot 51$. A zatem $S = 25 \cdot 51 = 1275$. Ciekawa musiała być mina nauczyciela, gdy Gauss przyniósł mu, w krótkim czasie, swoje rozwiązanie. Anegdota zapewne nie jest prawdziwa, ale pokazuje jak niezwykłym talentem był obdarzony Gauss i jak nieszablonowo potrafił podchodzić do problemów matematycznych.

Teraz możemy zastosować trik Gaussa do obliczenia ogólnej sumy:

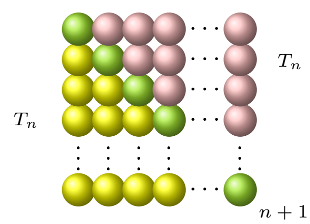
$$\begin{array}{rccccccccc}
T_n = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\
T_n = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2T_n = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

i otrzymujemy $2T_n = n(n+1)$, więc $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Wiadomo również, że ta ostatnia liczba jest równa wartości symbolu Newtona $\binom{n+1}{2}$. O symbolu Newtona napiszemy w rozdziale 4., a w rozdziale 5. podamy rozwiązanie wszystkich zagadnień związanych z budową obiektów przy pomocy kulek.

Uzasadnimy teraz wzór na T_n w inny sposób. Rozważmy $(n+1)^2$ kulek ułożonych w kwadrat o wymiarach $(n+1) \times (n+1)$:



Możemy ten kwadrat podzielić na trzy części: nad przekątną, pod przekątną i na przekątnej:

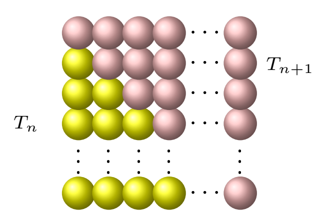


Liczba kulek na i pod przekątną jest taka sama i równa się $1 + 2 + \cdots + n = T_n$, a na przekątnej jest $n+1$ kulek. Zatem spełniona jest równość

$$(n+1)^2 = n + 1 + 2T_n. \tag{1}$$

Z niej wynika, że $T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$.

Dzieląc kwadrat na dwie części:



otrzymamy inną zależność: $(n+1)^2 = T_n + T_{n+1} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2}$.

Z otrzymanego wzoru wynika, że jeżeli do ośmiokrotności dowolnej liczby trójkątnej dodamy 1, to otrzymamy kwadrat liczby całkowitej:

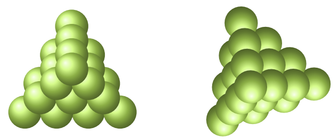
$$8 \cdot T_n + 1 = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2. \tag{2}$$

Okazuje się, że powyższa równość w pełni charakteryzuje liczby trójkątne. To znaczy, że jeśli liczba naturalna t jest taka, że $8t+1=k^2$, dla pewnej liczby całkowitej k, to t jest liczbą trójkątną i $t=T_n$ dla $n=\frac{k-1}{2}$. Aby to udowodnić wystarczy zauważyć, że k jest liczbą nieparzystą i skorzystać ze wzoru (2).

3. Piramidki, statki i eskadry

W kolejnych etapach tego rozdziału będziemy indukcyjnie budować nowe figury: piramidki z trójkątów, statki z piramidek, eskadry ze statków.

Na początek budujemy piramidkę o podstawie trójkątnej w ten sposób, że najpierw kładziemy trójkąt T_n, na nim trójkąt T_{n-1}, potem T_{n-2} i tak dalej aż do T_1. Na poniższym rysunku zaprezentowano piramidkę o $n=4$ poziomach (czyli o podstawie T_4).



$n=4$
$P_4=T_1+T_2+T_3+T_4=20$

Będziemy oznaczać przez P_n zarówno piramidkę zbudowaną z n poziomów, jak i liczbę kulek na nią się składających. Liczbę P_n będziemy nazywać n-tą liczbą piramidkową. Z definicji liczby P_n wynika wzór

$$P_n=T_1+T_2+\cdots+T_n=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}. \tag{3}$$

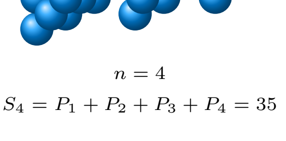
Możemy podać charakteryzację liczby P_n podobną do tej, którą wypracowaliśmy dla liczby T_n we wzorze (2). Obustronnie mnożymy wzór (3) przez 8, dodajemy $n+1$ i wykorzystując (2) otrzymujemy

$$8P_n+n+1=1+(8T_1+1)+(8T_2+1)+\cdots+(8T_n+1)=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2. \tag{4}$$

Zatem p jest liczbą piramidkową jeśli istnieje liczba naturalna n taka, że $8p+n+1$ jest sumą $n+1$ kwadratów kolejnych liczb nieparzystych.

Wzór na liczbę P_n wyznaczymy w rozdziale 5.

Kontynuujmy nasze układanki. Połączmy piramidki $P_1,P_2,\ldots,P_n$. Otrzymamy w ten sposób czterowymiarową piramidkę, a ponieważ nie mamy możliwości widzenia w czterech wymiarach, to możemy tak otrzymaną figurę wyobrażać sobie jako statek kosmiczny lub choinkę. Tak otrzymaną figurę oznaczamy przez S_n. Oto przykładowy statek złożony z czterech piramidek:



$n=4$
$S_4=P_1+P_2+P_3+P_4=35$

Liczba kulek użytych do stworzenia statku złożonego z n piramidek wynosi

$$S_n = P_1 + P_2 + \cdots + P_n.$$

Korzystając z charakteryzacji liczby P_n otrzymujemy:

$$8S_n + 1 + 2 + \cdots + (n+1) = 1 + (8P_1 + 2) + (8P_2 + 3) + \cdots + (8P_n + n + 1),$$

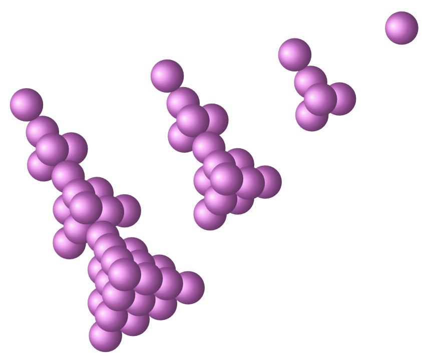
a stąd dostajemy charakteryzację liczb S_n:

$$8S_n + T_{n+1} = 1^2 + (1^2 + 3^2) + (1^2 + 3^2 + 5^2) + \ldots + (1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2).$$

Możemy ją również zapisać w postaci:

$$8S_n + T_{n+1} = (n+1) \cdot 1^2 + n \cdot 3^2 + (n-1) \cdot 5^2 + \cdots + 1 \cdot (2n+1)^2.$$

Na koniec stwórzmy eskadrę statków kosmicznych E_n. Na przykład:



$n = 4$

$E_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 35$

Wtedy $E_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$.

Oczywiście możemy tę zabawę kontynuować tworząc eskadrę eskadr układów planetarnych, galaktycznych. Ponieważ jednak większe eskadry nie zmieszczą się w żadnym planie budżetowym, to my, podobnie jak starożytni Grecy, nie będziemy prowadzili rozważań donikąd nieprowadzących.

4. Symbol dwumianowy Newtona

Dany jest dowolny zbiór złożony z n elementów, na przykład $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ i liczba całkowita k. Zbiór X_n interpretujemy jako zbiór obiektów ponumerowanych liczbami od 1 do n. Liczbę wyborów k obiektów ze zbioru X_n oznaczamy przez $\binom{n}{k}$ i nazywamy symbolem dwumianowym Newtona (lub po prostu symbolem Newtona). Ponieważ ze zbioru n-elementowego można wybrać maksymalnie n obiektów, to $\binom{n}{k} = 0$ dla $k > n$.

Każdy wybór wyznacza pewien podzbiór zbioru X_n, więc $\binom{n}{k}$ interpretujemy również jako liczbę podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowym.

Wyznaczmy wartość symbolu Newtona dla niektórych wartości k. Niewybranie żadnego podzbioru w kombinatoryce utożsamiamy z wybraniem podzbioru pustego. Liczba elementów zbioru pustego to 0, więc $\binom{n}{0} = 1$ dla każdego n. Wartość $\binom{n}{n}$ też jest równa 1, bo na jeden sposób możemy wybrać wszystkie obiekty. Jeden obiekt możemy wybrać na n sposobów, więc $\binom{n}{1} = n$.

Oto wszystkie możliwe wybory dwóch obiektów ze zbioru $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

Jak widać, wypisanych zostało sześć możliwości, więc $\binom{4}{2} = 6$.

Zanim podamy własności symbolu Newtona przypomnijmy, że permutacją zbioru X_n nazywamy ustawienie wszystkich elementów tego zbioru w dowolnej kolejności. Liczba różnych permutacji zbioru X_n jest równa $n!$ (n silnia). W pracy będziemy wykorzystywać równości

- $0! = 1$,
- $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ dla $n > 0$,
- $n! = (n-1)! \cdot n$ dla $n > 0$.

Własności symbolu Newtona.

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(iii) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

(iv) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dla $0 \leq k \leq n$.

Podamy uzasadnienia tych równości. Wprawdzie do uzasadnienia wzorów (i) i (ii) moglibyśmy wykorzystać równość (iv), ale zrobimy to w sposób kombinatoryczny. A w kombinatoryce można uzasadniać równości poprzez tworzenie opowieści o wyborach i pokazując jak można w różny sposób tych wyborów dokonywać.

Uzasadnienia.

(i) Chcemy wybrać k z n obiektów. Możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów wskazując obiekty wybrane lub na $\binom{n}{n-k}$ sposobów wskazując te obiekty, których nie wybieramy. Oba sposoby dają odpowiedni wybór, więc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Zaprezentujmy to na przykładzie wyborów dwóch obiektów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Obiekty wybrane	**Obiekty niewybrane**	**Numer wyboru**
$1,2$	$3,4,5$	1
$1,3$	$2,4,5$	2
$1,4$	$2,3,5$	3
$1,5$	$2,3,4$	4
$2,3$	$1,4,5$	5
$2,4$	$1,3,5$	6
$2,5$	$1,3,4$	7
$3,4$	$1,2,5$	8
$3,5$	$1,2,4$	9
$4,5$	$1,2,3$	10

(ii) Zbiór wyborów k obiektów ze zbioru n-obiektowego dzielimy na dwa rozłączne podzbiory.

- Wybory, w których występuje obiekt z numerem 1. Tych wyborów jest $\binom{n-1}{k-1}$, bo do pierwszego obiektu musimy dobrać $k-1$ obiektów z pozostałych $n-1$ obiektów.
- Wybory, w których nie ma pierwszego obiektu. Wtedy mamy $\binom{n-1}{k}$ możliwości, bo musimy wybrać k obiektów z pozostałych $n-1$.

Każdy wybór mieści się w jednym z powyższych, więc liczba wyborów $\binom{n}{k}$ jest sumą liczby wyborów z pierwszego zbioru i liczby wyborów z drugiego. Zatem $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Dla wyborów dwóch obiektów ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$, podział na powyższe zbiory wygląda następująco:

$\binom{5}{2} = 10$	
Wybrano 1 – $\binom{4}{1} = 4$	**Nie wybrano** 1 – $\binom{4}{2} = 6$
$1,2$	$2,3$
$1,3$	$2,4$
$1,4$	$2,5$
$1,5$	$3,4$
	$3,5$
	$4,5$

(iii) Chcemy wyznaczyć wszystkie wybory pewnej liczby elementów ze zbioru $X = \{1,2,\ldots,n\}$. Mamy tu na myśli wybory dowolnej liczby elementów. Z jednej strony możemy wybrać zero elementów na $\binom{n}{0} = 1$ sposobów, jeden element na $\binom{n}{1}$ sposobów i tak dalej aż do $\binom{n}{n}$ wyborów wszystkich elementów. Tak więc liczba wyborów jest równa

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Teraz policzmy wybory w inny sposób. Jeśli chcemy wybrać elementy ze zbioru $\{1\}$, to mamy dwie możliwości: nie wybieramy nic lub wybieramy 1. Przypuśćmy, że dokonaliśmy wszystkich wyborów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ i że ich liczba jest równa 2^{n-1}. Zauważmy, że wybór elementów ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$ jest też wyborem elementów ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Te wybory nie zawierają elementu n. Aby otrzymać, te do których należy n trzeba do każdego wyboru z mniejszego zbioru dołączyć n. W ten sposób otrzymamy wszystkie wybory. To oznacza, że liczba wyborów się podwaja i wynosi $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

W poniższej tabeli prezentujemy zasadę podwajania wyborów przy przejściu od trzech wybranych elementów do czterech.

Wybory ze zbiorów			
	$1, 2, 3$	$1, 2, 3, 4$	
1.	$\varnothing$	$\varnothing$	**1.**
		4	**2.**
2.	1	1	**3.**
		$1, 4$	**4.**
3.	2	2	**5.**
		$2, 4$	**6.**
4.	3	3	**7.**
		$3, 4$	**8.**
5.	$1, 2$	$1, 2$	**9.**
		$1, 2, 4$	**10.**
6.	$1, 3$	$1, 3$	**11.**
		$1, 3, 4$	**12.**
7.	$2, 3$	$2, 3$	**13.**
		$2, 3, 4$	**14.**
8.	$1, 2, 3$	$1, 2, 3$	**15.**
		$1, 2, 3, 4$	**16.**

Ponieważ oba zaprezentowane sposoby zliczają liczbę wszystkich wyborów, więc spełniona jest równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(iv) Chcemy obliczyć liczbę wyborów k różnych obiektów ze zbioru złożonego z n obiektów. Najpierw ustawimy wszystkie obiekty w dowolnej kolejności. Możemy to zrobić na $n!$ sposobów. Następnie z każdego ustawienia wybieramy k pierwszych obiektów. Zauważmy, że otrzymamy dokładnie te same wybory jeśli k pierwszych elementów w danym ustawieniu pozamieniamy w dowolny sposób pomiędzy sobą i to samo zrobimy z pozostałymi obiektami, których jest $(n-k)$. Ponieważ k obiektów można przemieścić na $k!$ sposobów, a pozostałe obiekty na $(n-k)!$, to liczba takich samych wyborów będzie równa $k!(n-k)!$. Zatem na liście wszystkich ustawień każdy wybór pojawi się dokładnie $k!(n-k)!$ razy. Wynika stąd, że liczba wyborów jest równa $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Prześledźmy tok powyższego rozumowania na przykładzie wyborów dwóch elementów z czterech.

Ustawienie	Wybór	Numer wyboru
1234	12	1
2134		
1243		
2143		
1324	13	2
3124		
1342		
3142		
1423	14	3
4123		
1432		
4132		
2314	23	4
3214		
2341		
3241		
2413	24	5
4213		
2431		
4231		
3412	34	6
4312		
3421		
4321		

Powyżej użyliśmy typowych w kombinatoryce uzasadnień równości. Najpierw opisujemy zadanie polegające na pewnym wyborze obiektów, a następnie pokazujemy jak można w różny sposób dokonywać tych wyborów. Czasem zadanie wyraża się przy pomocy historii z życia wziętej. Przykładami są twierdzenie Halla o małżeństwach (patrz [1], rozdział 3) lub zasada szufladkowa Dirichleta, której angielska nazwa „pigeonhole principle” nawiązuje do anegdoty o spacerze podczas, którego niemiecki matematyk Peter Gustav Lejeune Dirichlet odkrył tą zasadę obserwując gołębie zmierzające do gołębników ([1], rozdział 4).

Teraz możemy, korzystając z własności (ii) oraz $\binom{n}{n} = 1$, obliczyć liczbę piramidkową P_5:

$$
\begin{aligned}
P_5 = \; & T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \\
& \tbinom{2}{2} + \tbinom{3}{2} + \tbinom{4}{2} + \tbinom{5}{2} + \tbinom{6}{2} = \tbinom{3}{3} + \tbinom{3}{2} + \tbinom{4}{2} + \tbinom{5}{2} + \tbinom{6}{2} = \\
& \underbrace{\binom{3}{3} + \binom{3}{2}}_{\binom{4}{3}} + \tbinom{4}{2} + \tbinom{5}{2} + \tbinom{6}{2} = \underbrace{\binom{4}{3} + \binom{4}{2}}_{\binom{5}{3}} + \tbinom{5}{2} + \tbinom{6}{2} = \\
& \underbrace{\binom{5}{3} + \binom{5}{2}}_{\binom{6}{3}} + \tbinom{6}{2} = \tbinom{6}{3} + \tbinom{6}{2} = \tbinom{7}{3} = \tfrac{7!}{3!4!} = \tfrac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 5 \cdot 7 = 35.
\end{aligned}
$$

Ogólniej, spełniona jest równość:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}. \tag{5}$$

Uzasadnimy ją dwiema metodami.

Metoda I. Tak jak powyżej, w kolejnych krokach sumę $\binom{m}{3} + \binom{m}{2}$ zastępujemy przez $\binom{m+1}{3}$, a w przedostatnim kroku otrzymujemy

$$\underbrace{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}}_{\binom{n}{3}} + \binom{n}{2} = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Czytelnicy, którzy znają metodę indukcji matematycznej pewnie zauważyli jej zastosowanie w powyższej argumentacji.

Metoda II. Metoda kombinatoryczna. Wybieramy trzy spośród $n+1$ elementów. Możemy to zrobić na $\binom{n+1}{3}$ sposobów. Teraz ponumerujmy elementy liczbami od 1 do $n+1$. Jeśli najmniejszym wybranym elementem jest k, to z pozostałych $n-k$ większych elementów wybieramy dwa na $\binom{n-k}{2}$ sposobów. Zatem dzieląc wybory ze względu na najmniejszy wybrany stwierdzamy, że ich liczba wynosi

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2}.$$

Zobrazujmy ten tok rozumowania dla $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ w poniższej tabelce:

Najmniejsza wybrana liczba	**Wybory**	**Liczba wyborów**
1	123	$\binom{5}{2} = 10$
	124	
	125	
	126	
	134	
	135	
	136	
	145	
	146	
	156	
2	234	$\binom{4}{2} = 6$
	235	
	236	
	245	
	246	
	256	
3	345	$\binom{3}{2} = 3$
	346	
	356	
4	456	$\binom{2}{2} = 1$

5. Liczby kulek w T_n, P_n, S_n, E_n

W tym rozdziale podajemy wzory na liczbę kulek w trójkątach, piramidkach, statkach i eskadrach. Ze wzoru (iv) wynika, że

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n(n+1)}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zatem $T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$. Zauważmy, że równość $1+2+\cdots+n = \binom{n+1}{2}$ możemy uzasadnić w podobny sposób jak (5), dzieląc wybory dwóch elementów z $n+1$ ze względu na najmniejszy wybrany element.

Korzystając z (5) możemy obliczyć liczbę kulek w piramidzie:

$$P_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

Wzór (5) ma uogólnienie

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{6}$$

Uzasadnia się go w analogiczny sposób jak (5), dzieląc wybory $k+1$ elementów ze zbioru $n+1$-elementowego ze względu na najmniejszy wybrany element.

Z tej ostatniej zależności wynikają wzory pozwalające obliczyć liczby kulek składających się na statek kosmiczny oraz eskadrę statków:

$$S_n = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \tbinom{3}{3} + \tbinom{4}{3} + \cdots + \tbinom{n+2}{3} = \tbinom{n+3}{4}.$$

$$E_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \tbinom{4}{4} + \tbinom{5}{4} + \cdots + \tbinom{n+3}{4} = \tbinom{n+4}{5}.$$

Zestawmy otrzymane wyniki w tabeli:

Nazwa liczby	**Oznaczenie**	**Ilość kulek**
Liczba trójkątna	T_n	$\binom{n+1}{2}$
Liczba piramidkowa	P_n	$\binom{n+2}{3}$
Statek	S_n	$\binom{n+3}{4}$
Eskadra	E_n	$\binom{n+4}{5}$
...	...	...

6. Zadania dla zainteresowanych

W tym rozdziale proponujemy zainteresowanym czytelnikom kilkanaście zadań, a w następnym prezentujemy ich rozwiązania. Niektóre z poniższych zadań to kolejne układanki z kulek.

Będziemy używać tak zwanej notacji sigma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Na przykład $\sum_{i=1}^{n} 1$ oznacza sumę n jedynek, więc $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$. Zauważmy, że liczby T_n, P_n, S_n i E_n możemy zapisać jako

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i, \quad P_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} P_i, \quad E_n = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

1. Na ile sposobów można wybrać cztery osoby z grupy ośmioosobowej?

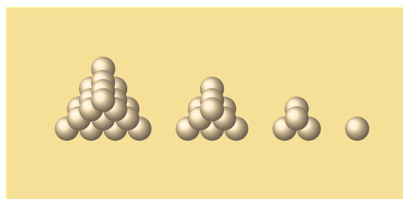
2. W pewnej firmie, w której pracowało n osób, odbywały się wybory k-osobowego zarządu oraz prezesa, który wchodził w skład zarządu. Obliczając na dwa sposoby liczbę możliwych wyborów uzasadnić równość $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3. Niech $n = 2m+1$ będzie liczbą nieparzystą. Udowodnić, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = 2^{n-1}.$$

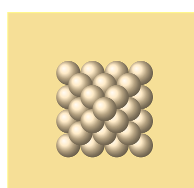
4. Wobec zagrożenia nadciągającego z Proximy Centauri, Wielka Rada Układu Słonecznego postanowiła utworzyć eskadrę eskadr EE_n bojowych statków kosmicznych. Planeta o numerze n w układzie musiała wystawić eskadrę E_n. Tak więc Merkury wystawił eskadrę E_1, Wenus E_2 itd. Z ilu kulek zbudowano eskadrę eskadr zakładając, że włączone zostały także planety karłowate Ceres i Pluton?

5. Dawno temu panował w Egipcie młody faraon, który bardzo chciał, żeby po śmierci o nim nie zapomniano. Niestety panował pokój i władca nie mógł się zapisać na kartach historii jako wielki wódz. Nadarzyła się jednak okazja, gdy do Egiptu przybył tajemniczy mędrzec ze wschodnich krain i zaoferował, że może wybudować faraonowi cztery piramidy z wielkich złotych kul. Piramidy miały mieć podstawy trójkątne, najwyższa z nich miała mieć podstawę T_4, a każda następna miała być o jeden poziom niższa od poprzedniej. Faraon chciał wiedzieć ile będzie kosztowało postawienie tych piramid. Akurat była promocja i jedna złota kula kosztowała 100 debenów[1]. Ile faraon zapłaci za postawienie wszystkich piramid jeśli za ułożenie jednej kuli zapłaci (oprócz jej kosztu) dodatkowe 5 debenów?



Tak piramidy będą wyglądały z lotu ptaka

6. Niestety w trakcie budowy piramid doszło do tragicznego wypadku. Jedna z kul stoczyła się i przygniotła młodego faraona (niektórzy dopatrywali się celowego działania osób nieżyczliwych młodemu władcy). Ponieważ faraon nie zostawił potomstwa, nowym władcą został najwyższy kapłan. Nowy faraon postanowił, że zbuduje jedną piramidę o podstawie kwadratowej. Okazało się, że cena za jedną kulę wzrosła do 140 debenów, a cena za jej ułożenie do 10 debenów. Faraon nakazał mędrcowi obliczyć liczbę kul w piramidzie o n poziomach, a następnie obliczyć dla jakiego n cena nie przekroczy 9000 debenów. Jaka wartość n wyszła mędrcowi?



Piramida o czterech poziomach z lotu ptaka

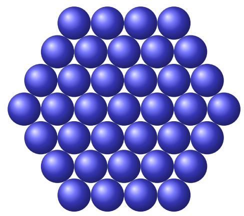
7. Obliczyć sumy $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = 1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2$ oraz $\sum_{i=0}^{n}(2i)^2 = 2^2+4^2+\cdots+(2n)^2$.

8. Obliczyć $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(2j+1)^2$.

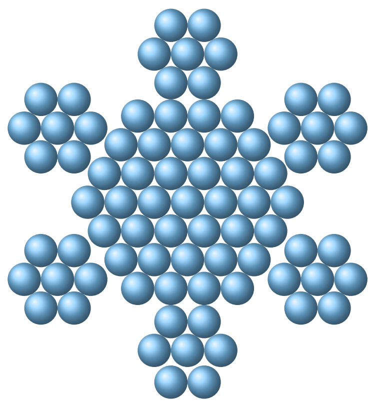
[1]O systemach pieniężnych starożytnego Egiptu można przeczytać na stronie internetowej [3]. Zgodnie z wyliczeniami z tej strony jeden deben wart był około 27 dzisiejszych złotych.

9. Obliczyć $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}(2k+1)^2$.

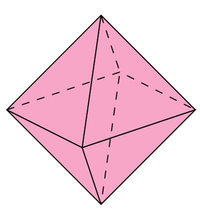
10. Układamy kulki w sześciokąty. Ile kulek trzeba zużyć na ułożenie sześciokąta jeśli bok tego sześciokąta składa się z n kulek? Na rysunku prezentujemy sześciokąt dla $n = 4$.



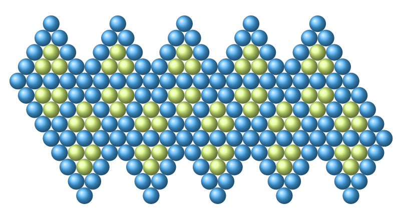
11. Tworzymy płatek śniegu jak na poniższym rysunku. Z ilu kulek składa się płatek śniegu, jeśli środkowy sześciokąt ma bok złożony z n kulek?



12. Wyobraźmy sobie, że łączymy osiem trójkątów T_n otrzymując ośmiościan foremny w taki sposób, że krawędzie dwóch sąsiednich ścian pokrywają się. Z ilu kulek będzie składała się ta figura? Z ilu kulek będzie się składał podobnie utworzony dwudziestościan foremny?



Ośmiościan foremny



Siatka dwudziestościanu foremnego

13. Obliczyć $\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}1$.

14. Obliczyć sumę wszystkich liczb w poniższym trójkącie złożonym z n poziomów.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 2\\
1 \quad 2 \quad 3\\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad \cdots \quad n
\end{array}$$

15. Wyznaczyć sumę

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (n-i+1) = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-2) \cdot 3 + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1.$$

16. Obliczyć sumę wszystkich liczb na każdym poziomie i sumę wszystkich liczb w poniższym trójkącie złożonym z n poziomów.

$$\begin{array}{c}
1 \cdot 2\\
1 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3\\
1 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad 3 \cdot 4\\
1 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad 3 \cdot 4 \quad 4 \cdot 5\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
1 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad 3 \cdot 4 \quad 4 \cdot 5 \quad \cdots \quad n \cdot (n+1)
\end{array}$$

17. Tworzymy trójkąt Pascala układając w nim liczby $\binom{n}{k}$ poziomami (które tym razem numerujemy od 0).

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \cdots \quad \binom{n}{n}
\end{array}$$

Wyznaczyć pięć pierwszych poziomów trójkąta Pascala oraz obliczyć sumę wszystkich liczb tego trójkąta od poziomu zerowego do n-tego.

7. Rozwiązania zadań

1. Liczba wyborów jest równa $\binom{8}{4}$. Wykorzystując równość $8! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ otrzymujemy:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 7 \cdot 2 = 70.$$

2. Pierwszy sposób, to wybór zarządu, który ze swojego grona wyłoni prezesa. Zarząd możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, a potem prezes jest wybierany na $\binom{k}{1} = k$ sposobów. Zatem wybór zarządu i prezesa odbywa się na $\binom{n}{k}k$ sposobów.

W drugim sposobie najpierw wybrano prezesa na $\binom{n}{1} = n$ sposobów, a potem prezes wybrał pozostałe osoby do zarządu. Może to zrobić na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów. Ten sposób postępowania daje $n\binom{n-1}{k-1}$ możliwości. Ponieważ obie metody rozwiązują to samo zadanie, to równość $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$ jest spełniona.

Innym sposobem uzasadnienia równości jest użycie wzoru (iv):

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \cdot n \cdot (n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

3. Z własności (iii) symbolu Newtona wynika, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m+2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Wykorzystując (i) dla $n = 2m+1$ otrzymujemy

$$\binom{n}{m+s} = \binom{2m+1}{m+s} = \binom{2m+1}{2m+1-(m+s)} = \binom{n}{m-s+1},$$

a stąd

$$\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m+2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} + \cdots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + \cdots + \tbinom{n}{m-1} + \tbinom{n}{m} + \tbinom{n}{m+1} + \tbinom{n}{m+2} + \cdots + \tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n} = \\
&\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + \cdots + \tbinom{n}{m-1} + \tbinom{n}{m} + \tbinom{n}{m} + \tbinom{n}{m-1} + \cdots + \tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{0} = \\
&2\left(\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + \cdots + \tbinom{n}{m-1} + \tbinom{n}{m}\right) = 2^n.
\end{aligned}$$

Po podzieleniu przez 2 otrzymamy żądany wzór.

4. Liczba planet wraz z Ceres i Plutonem jest równa 10. Zatem wykorzystując wzór (6) otrzymujemy

$$EE_{10} = E_1 + E_2 + \cdots + E_{10} = \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \cdots + \binom{14}{5} = \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!9!} = 5005.$$

5. Liczba kulek zużytych do budowy piramid wynosi

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = S_4 = \binom{4+3}{4} = \binom{7}{4} = 35.$$

Zatem faraon musi zapłacić $35 \cdot 105 = 3675$ debenów.

6. Na kolejnych poziomach mamy $n^2, (n-1)^2, \ldots, 2^2, 1^2$ kulek. Ze wzoru (1) wynika, że $n^2 = n+2T_{n-1}$. Przyjmujemy dodatkowo $T_0 = 0$. Zatem liczba kulek w piramidzie jest równa

$$n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = n + 2T_{n-1} + (n-1) + 2T_{n-2} + \cdots + 2 + 2T_1 + 1 + 2T_0 =$$
$$n + (n-1) + \cdots + 1 + 2(T_{n-1} + \cdots + T_1 + T_0) = T_n + 2P_{n-1} = \tbinom{n+1}{2} + 2\tbinom{n+1}{3} =$$
$$\tfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2\tfrac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \tfrac{(n+1)!3}{3!(n-1)!} + 2\tfrac{(n+1)!(n-1)}{3!(n-1)!} = \tfrac{(n+1)!(3+2n-2)}{3!(n-1)!} = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Koszt piramidy wyniesie $150 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Musimy, więc rozwiązać nierówność

$$150 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq 9000.$$

Po wymnożeniu przez 6 i podzieleniu przez 150 otrzymujemy $n(n+1)(2n+1) \leq 360$. Dla $n = 5$ otrzymujemy $5 \cdot 6 \cdot 11 = 330$, a dla $n = 6$ mamy $6 \cdot 7 \cdot 13 = 546$. Zatem rozwiązaniem jest $n = 5$.

7. Dodając te dwie sumy do siebie otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 + \sum_{i=0}^{n}(2i)^2 = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 + 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2n+1)^2.$$

Teraz możemy zastosować wzór wypracowany w poprzednim zadaniu (wstawiamy w nim $2n+1$ zamiast n):

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 + \sum_{i=0}^{n}(2i)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}.$$

Ze wzoru (4) wynika, że

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = 8P_n + n + 1 = 8\binom{n+2}{2} + n + 1.$$

Obliczmy tą ostatnią liczbę

$$8\tbinom{n+2}{2} + n + 1 = 8 \cdot \tfrac{(n+2)!}{3!(n-1)!} + n + 1 = \tfrac{8n(n+1)(n+2)}{6} + n + 1 = \tfrac{4n(n+1)(n+2)+3(n+1)}{3} =$$
$$\tfrac{(n+1)(4n(n+2)+3)}{3} = \tfrac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3} = \tfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

Zatem $\sum\limits_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$. Teraz obliczamy drugą sumę

$$\sum_{i=0}^{n}(2i)^2 = \tfrac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3} - \sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = \tfrac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3} - \tfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} =$$
$$\tfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

8. Wykorzystując wzór (4) obliczamy

$$\sum_{j=0}^{i}(2j+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2i+1)^2 = 8P_i + i + 1.$$

Stąd

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(2j+1)^2 = \sum_{i=0}^{n}(8\cdot P_i + i + 1) = 8\sum_{i=0}^{n} P_i + \sum_{i=0}^{n}(i+1) = 8\cdot S_n + T_{n+1} = 8\binom{n+3}{4} + \binom{n+2}{2}.$$

Korzystając ze wzoru (iv) mamy

$$8\tbinom{n+3}{4} + \tbinom{n+2}{2} = 8\cdot \tfrac{(n+3)!}{4!(n-1)!} + \tfrac{(n+2)!}{2!n!} = \tfrac{2n(n+1)(n+2)(n+3)+3(n+1)(n+2)}{6} =$$
$$= \tfrac{(n+1)(n+2)(2n(n+3)+3)}{6} = \tfrac{(n+1)(n+2)(2n^2+6n+3)}{6}.$$

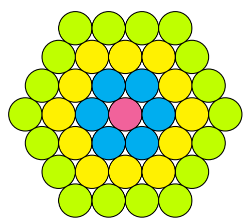
Zatem

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(2j+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n^2+6n+3)}{6}.$$

9. Korzystając z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}(2k+1)^2 = \sum_{i=0}^{n}(8S_i + T_{i+1}) = 8\sum_{i=0}^{n} S_i + \sum_{i=0}^{n} T_{i+1} = 8E_n + P_{n+1} = 8\binom{n+4}{5} + \binom{n+3}{3}.$$

10. Zliczamy kulki w kolejnych sześciokątnych obramowaniach tworzących cały sześciokąt, zgodnie z kolorami na poniższym rysunku.



Liczba kulek na n-tym obramowaniu wynosi $6(n-2)+6 = 6(n-1)$, bo do $6(n-2)$ kulek wewnątrz każdej krawędzi dodajemy 6 kulek położonych w wierzchołkach. Stąd liczba kulek w całym sześciokącie jest równa

$$1 + 6\cdot 1 + 6\cdot 2 + \cdots + 6\cdot(n-1) = 1 + 6\cdot(1 + \cdots + (n-1)) = 1 + 6\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 6\binom{n}{2}.$$

11. Płatek śniegu składa się z jednego sześciokąta o krawędzi n i sześciu sześciokątów o krawędzi $n-1$. Korzystając z poprzedniego zadania otrzymujemy liczbę kulek:

$$1 + 6\binom{n}{2} + 6\left(1 + 6\binom{n-1}{2}\right) = 7 + 6\binom{n}{2} + 36\binom{n-1}{2} = 6n + 6 + 42\binom{n-1}{2}.$$

12. Wnętrze każdej ściany ośmiokąta jest trójkątem T_{n-1}. Zatem wewnątrz wszystkich ścian znajduje się $8T_{n-1}$ kulek. Policzmy teraz liczbę kulek na krawędziach. Ośmiościan ma 12 krawędzi. Wewnątrz każdej krawędzi jest $n-2$ kulek. Do liczby kulek wewnątrz krawędzi dodamy sześć kulek znajdujących się w wierzchołkach. Zatem na krawędziach znajduje się

$$12(n-2) + 6 = 12n - 18$$

kulek.

Liczba wszystkich kulek w ośmiokącie jest równa

$$8T_{n-1} + 12n - 18 = 8\binom{n}{2} + 12n - 18 = 4n^2 + 8n - 18.$$

Gdybyśmy ośmiościan stworzyli z dwóch piramid o podstawach kwadratowych, łącząc ich podstawy, to otrzymalibyśmy

$$2(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2+1)}{3}$$

kulek.

Dwudziestościan foremny ma 20 trójkątnych ścian, 12 wierzchołków i 30 krawędzi. Kulki na krawędziach zliczamy podobnie jak dla ośmiokąta:

$$30(n-2) + 12 = 30n - 48.$$

Dodajemy do tego $20T_{n-1}$ kulek wewnątrz każdej ściany. Liczba kulek w dwudziestościanie wynosi, więc

$$20T_{n-1} + 30n - 48 = 10n^2 + 20n - 48.$$

13. Obliczamy sumy od prawej strony do lewej, wykorzystując wzory z ostatniej tabeli

$$\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{k} \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{j} = \sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{k} j = \sum_{k=1}^{5}(1+2+\dots+k) =$$
$$\sum_{k=1}^{5}\tfrac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{5}\tbinom{k+1}{2} = \tbinom{2}{2} + \tbinom{3}{2} + \tbinom{4}{2} + \tbinom{5}{2} + \tbinom{6}{2} = \tbinom{7}{3} = \tfrac{7!}{3!4!} = 35.$$

14. Suma na poziomie k-tym wynosi $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} = \binom{k+1}{2}$. Aby obliczyć sumę wszystkich liczb w trójkącie sumujemy najpierw liczby w poziomie, a potem dodajemy wyniki i wykorzystując wzór (5) otrzymujemy

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

15. Sumujemy liczby w trójkącie z zadania **14.** skosami idącymi od góry w lewo. Na pierwszym skosie mamy n jedynek, na drugim $n-1$ dwójek itd. Zatem poszukiwana suma jest równa sumie wszystkich liczb w trójkącie, a więc wynosi tak jak w poprzednim zadaniu $\binom{n+2}{3}$.

16. Suma liczb na k-tym poziomie jest równa

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + k(k+1) = 2\left(\tfrac{1\cdot 2}{2} + \tfrac{2\cdot 3}{2} + \dots + \tfrac{k\cdot(k+1)}{2}\right) =$$
$$2(T_1 + T_2 + \dots + T_k) = 2P_k.$$

Zatem suma liczb w trójkącie wynosi

$$2P_1 + 2P_2 + \dots + 2P_n = 2S_n = 2\binom{n+3}{4}.$$

17. Każdy wiersz zaczyna się i kończy jedynką, bo $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Ponadto z własności (ii) wynika, że każda liczba na danym poziomie stojąca pomiędzy dwiema liczbami na wyższym poziomie jest równa ich sumie. Wykorzystując te własności otrzymujemy

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Zgodnie z własnością (iii), suma liczb na k-tym poziomie jest równa 2^k. Zatem suma wszystkich liczb wynosi

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Ten ostatni wynik możemy też otrzymać sumując elementy trójkąta Pascala skosami i wykorzystując wzór (6). W pierwszym skosie mamy sumę

$$\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \cdots + \binom{n}{0} = \binom{n+1}{1},$$

w drugim

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2},$$

a trzecim

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Sumując liczby w trójkącie skosami otrzymamy

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Czytelnikom, którzy chcieliby poszerzyć swoją wiedzę w tej tematyce polecamy dwie świetne książki [1], [2] oraz niewymienione tu inne książki z kombinatoryki.

Literatura

1. V. Bryant, Aspekty kombinatoryki, WNT, Warszawa 2007.
2. R.L.Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik, Matematyka konkretna, PWN, Warszawa 2023.
3. K. Janicki, Ceny i zarobki w starożytnym Egipcie. Kwoty przeliczone na dzisiejsze złotówki, https://wielkahistoria.pl/ceny-i-zarobki-w-starozytnym-egipcie-kwoty-przeliczone-na-dzisiejsze-zlotowki/ [widziane:12-04-2023]