

**Sławomir Adam SORKO**

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI**

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: s.sorko@pb.edu.pl, t.teleszewski@pb.edu.pl

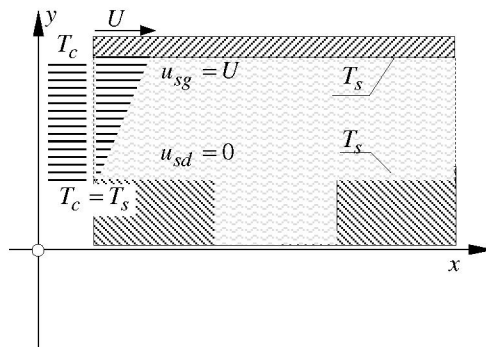
## **Symulacja pól prędkości i temperatury w przepływie cieczy lepkiej metodą elementów brzegowych**

### 1 Wstęp

Przepływy cieczy lepkiej – laminarne i turbulenty – przez przewody, kanały otwarte i układy przepływowe o różnej konfiguracji geometrycznej, pomimo wielu lat badań teoretycznych i aplikacyjnych, są nadal przedmiotem teoretycznych analiz w zakresie budowy matematycznych modeli opisujących przepływy i metod numerycznego rozwiązywania zagadnień przepływowych, jak też w zakresie rozwijających się różnorodnych zastosowań praktycznych w wielu dziedzinach techniki.

W rozwijającej się intensywnie w wielu zastosowaniach technicznych analizie przepływów cieczy lepkiej w mikrokanalich urządzeń technicznych i zagadnieniach techniki mikrobiologicznej szczególnie istotnym elementem jest wyznaczenie współczynników dyssypacji energii (dyssypacji lepkościowej) oraz pól prędkości i temperatury.

Przedmiotem opracowania jest metoda wyznaczania przepływu newtonowskiej cieczy lepkiej, wymuszonego ruchem ścianki, w układzie pomiędzy równoległymi ściankami, płaską ścianką poruszającą się ze stałą prędkością i nieruchomą ścianką profilowaną (rys. 1)



*Rys. 1. Przepływ Stokesa pomiędzy równoległymi ściankami - ścianką płaską w jednostajnym ruchu i nieruchomą ścianką profilowaną*

*Fig. 1. Stokes flow between two parallel walls - moving flat wall with constant velocity and immoveable profiled wall*

Ustalony, laminarny, izotermiczny przepływ ciecży lepkiej opisują równania: równanie Stokesa, równanie ciągłości i równanie zachowania energii [1, 2, 3]:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \equiv \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0; \quad (1a)$$

(równanie (1a) opisuje przepływ Stokesa z pominięciem wektora sił masowych)

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla[(\lambda \nabla T)] = -\Phi, \quad (1c)$$

gdzie  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  jest tensorem naprężenia,  $\Phi$  jest funkcją dyssypacji energii  $\Phi \equiv \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , natomiast  $\lambda$  oznacza przewodność cieplną ciecży, a  $\mu$  jej lepkość dynamiczną.

W przypadku płaskiego laminarnego przepływu ciecży lepkiej równania 1a, 1c przyjmują formę:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1a^*)$$

z warunkiem brzegowym wynikającym z postulatu przyczepności płynu do ścianek materialnych ograniczających przepływ (warunek braku poślizgu ciecży na ściance):

$$u|_{sr} = u_s = U \quad \text{na ściance ruchomej poruszającej się z prędkością } U, \quad (1a^{*1})$$

$$u|_{sn} = 0 \quad \text{na ściance nieruchomej} \quad (1a^{*2})$$

oraz:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{-1}{\lambda} \Phi; \quad \Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1c^*)$$

z warunkiem brzegowym wynikającym z założenia przepływu izotermicznego:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_s = q_s = 0, \quad \text{gdzie } q_s \text{ jest strumieniem ciepła przenikającym przez} \quad (1c^{*1})$$

ściankę,

i warunkiem brzegowym opisującym profil temperatury w strumieniu ciecży:

$$T|_s = T_s. \quad (1c^{*2})$$

Algorytm obliczeniowy wyznaczania rozkładu prędkości i pola temperatury w laminarnym przepływie ciecży lepkiej pomiędzy ściankami: płaską i profilowaną, pozostającymi we względnym ruchu, opisanym równaniami (1a\*) i (1c\*) z określonymi wyżej warunkami brzegowymi zakłada dyskretne rozwiązanie równania (1a\*) względem wektora sił powierzchniowych  $\mathbf{f} (\equiv \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n})$  [4] przy użyciu metody elementów brzegowych, następnie dyskretne wyznaczenie pola prędkości i jej pochodnych,

a w dalszej kolejności dyskretne rozwiązanie przy użyciu metody elementów brzegowych równania (1c\*) z wykorzystaniem wyznaczonych uprzednio dyskretne wartości.

## 2 Sformułowanie zagadnienia obliczeniowego

Całkowe sformułowanie zagadnienia ustalonego, laminarnego przepływu newtonowskiej cieczy lepkiej w obszarze płaskim ( $\Lambda$ ), ograniczonym ciągłym brzegiem ( $L$ ), opisanego równaniami różniczkowymi (1a\*) z fizycznymi warunkami brzegowymi wynikającymi z lepkiej natury cieczy stanowi układ równań całkowych [5], [6]:

$$\begin{aligned} -c_m(\mathbf{p})u_m(\mathbf{p}) + \int_L [u_m(\mathbf{q})E_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_n(\mathbf{q})E_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_{\mathbf{q}} \\ = \frac{1}{\mu} \int_L [f_m(\mathbf{q})G_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_n(\mathbf{q})G_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{p}; \mathbf{q} \in L$

gdzie:  $u_m(\mathbf{q})$ ;  $u_n(\mathbf{q})$  i  $f_m(\mathbf{q})$ ;  $f_n(\mathbf{q})$  są odpowiednio składowymi prędkości i wektora naprężeń w punktach: punkcie ustalonym  $\mathbf{p} \equiv (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$  na brzegu ( $L$ ) i punkcie bieżącym  $\mathbf{q} \equiv (x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$  całkowania po brzegu ( $L$ ). Stała  $c_m(\mathbf{p})$  na gładkiej części brzegu ( $L$ ) jest równa  $2\pi$ . W równaniach (2) rozwiązania podstawowe  $G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  i  $E_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  są odpowiednio równe:

$$G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta_{mn} \ln \left( \frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) + \frac{(\chi_{m\mathbf{p}} - \chi_{m\mathbf{q}})(\chi_{n\mathbf{p}} - \chi_{n\mathbf{q}})}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}, \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \quad (2^1)$$

gdzie  $\chi_m, \chi_n$  oznaczają współrzędne punktów ustalonego ( $\mathbf{p}$ ) i bieżącego ( $\mathbf{q}$ ) zgodne z indeksami funkcji  $G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , natomiast  $\delta_{mn}$  jest deltą Kroneckera, oraz:

$$E_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_k K_{mnk}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) n_{k\mathbf{q}}, \quad (2^2)$$

gdzie  $n_{k\mathbf{q}}$  oznacza normalną w kierunku  $k$  w punkcie  $\mathbf{q} \equiv (x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ :

$$K_{mnk}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\delta_{mk} p_n + \frac{\partial G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \chi_k} \Big|_{\mathbf{q}} + \frac{\partial G_{kn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \chi_m} \Big|_{\mathbf{q}}, \quad p_n = \frac{(\chi_{n\mathbf{p}} - \chi_{n\mathbf{q}})}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}. \quad (2^{2*})$$

Funkcja  $G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  jest funkcją symetryczną  $G_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -G_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , co skutkuje również symetrią funkcji ( $K_{mkn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_{nkm}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ), przy czym w przypadku jednoimiennych wskaźników jest ona funkcją osobliwą z osobliwością rzędu  $O(\ln r)$ , wobec czego pierwsza z całek w równaniach (2) jest całką w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

Składowe wektora naprężenia będącego skutkiem działania tensora naprężenia  $\sigma_{mn}(\mathbf{p}) = \tau_{mn}(\mathbf{p}) - p \delta_{mn}$  na normalną do powierzchni działania sił powierzchniowych w rozpatrywanym przypadku są równe:

$$f_m(\mathbf{p}) = \sigma_{mn}(\mathbf{p}) n_{np} \quad ; \quad \sigma_{mn}(\mathbf{p}) = \mu \left( \frac{\partial u_m(\mathbf{p})}{\partial \chi_{np}} + \frac{\partial u_n(\mathbf{p})}{\partial \chi_{mp}} \right), \quad (3)$$

co z uwagi na symetrię składowych tensora naprężeń stycznych ( $\sigma_{mn}(\mathbf{p}) = \sigma_{nm}(\mathbf{p})$ ), przy założeniu, że znane są wartości składowych prędkości  $u_m(\mathbf{q})$ ;  $u_n(\mathbf{q})$  na brzegu ( $L$ ) obszaru, pozwala na sprowadzenie zagadnienia obliczeniowego do dwóch niezależnych równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju względem funkcji  $f_*(\mathbf{p}) \equiv \sigma_{mn}(\mathbf{p})$  :

$$\begin{aligned} & \int_L f_*(\mathbf{q}) \left[ G_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) n_{mp} + G_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) n_{np} \right] dL_{\mathbf{q}} \\ & = -2\pi\mu u_m(\mathbf{p}) + \mu \int_L \left[ u_m(\mathbf{q}) E_{mm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_n(\mathbf{q}) E_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{p}; \mathbf{q} \in L$

Po wyznaczeniu wartości funkcji  $f_*(\mathbf{q})$  na brzegu ( $L$ ) w rezultacie dyskretnego rozwiązania równań (4) składowe prędkości  $u_m(\mathbf{v})$ ;  $u_n(\mathbf{v})$  w punktach  $\mathbf{v} \equiv (x_{\mathbf{v}}, y_{\mathbf{v}})$  obszaru ( $\Lambda$ ) ograniczonego brzegiem ( $L$ ) wyznaczają się z równań:

$$\begin{aligned} u_m(\mathbf{v}) = & -\frac{1}{4\pi} \int_L \left[ u_m(\mathbf{q}) E_{mm}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) + u_n(\mathbf{q}) E_{nm}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \right] dL_{\mathbf{q}} + \\ & + \frac{1}{4\pi\mu} \int_L f_*(\mathbf{q}) \left[ G_{mm}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) n_m + G_{nm}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) n_n \right] dL_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5)$$

$\mathbf{v} \in \Lambda; \mathbf{q} \in L$

gdzie  $n_n, n_m$  są wersorami układu współrzędnych.

Całkowie sformułowanie zagadnienia dyssypacji energii w przepływie cieczy lepkiej opisanego równaniem różniczkowym (1c\*) z fizycznymi warunkami brzegowymi (1c\*<sup>1</sup>) i (1c\*<sup>2</sup>) w obszarze płaskim ( $\Lambda$ ), ograniczonym ciągłym brzegiem ( $L = L_T \cup L_Q$ ) na którym na części brzegu  $L_Q$  jest zadana temperatura  $T_s(\mathbf{p})$ , a na dopełniającej części brzegu  $L_T$  jest zadany strumień ciepła  $q_s(\mathbf{p})$ , opisuje równanie [3, 7]:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} T(\mathbf{p}) + \int_{L_T} T(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \int_{L_Q} q(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = \\ & = - \int_{L_Q} T_s(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \int_{L_T} q_s(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \iint_{\Lambda} \Phi(\mathbf{v}) G(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \in \Lambda$

gdzie rozwiązania podstawowe są odpowiednio równe:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left( \frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right), \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \sqrt{(\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2 + (\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2}, \quad (6^1)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{y\mathbf{q}} + \delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{x\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}, \quad (6^2)$$

przy czym  $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} = [n_{x\mathbf{q}}, n_{y\mathbf{q}}] = \left[ \frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, \frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$  jest wektorem  $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} \perp L$  w punkcie  $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ .

Po wyznaczeniu brzegowych wartości gęstości funkcji  $T(\mathbf{q})$  i  $q(\mathbf{q})$  temperaturę w dowolnym punkcie rozpatrywanego obszaru ( $\Lambda$ ) wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{v}) = \int_L T(\mathbf{q}) E(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \int_L q(\mathbf{q}) G(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \iint_{\Lambda} \Phi(\mathbf{w}) G(\mathbf{v}, \mathbf{w}) d\Lambda_{\mathbf{w}}, \quad (7)$$

$\mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \equiv \mathbf{w} \in \Lambda.$

Do rozwiązania równania (6) niezbędna jest znajomość funkcji dyssypacji energii  $\Phi(\mathbf{v})$  w punktach  $\mathbf{v} \equiv (x_{\mathbf{v}}, y_{\mathbf{v}})$  obszaru ( $\Lambda$ ):

$$\Phi(\mathbf{v}) \equiv \sigma_{nm} \frac{\partial u_m(\mathbf{v})}{\partial \chi_n} = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u_m(\mathbf{v})}{\partial \chi_m} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_n(\mathbf{v})}{\partial \chi_n} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m(\mathbf{v})}{\partial \chi_{nv}} + \frac{\partial u_n(\mathbf{v})}{\partial \chi_{mv}} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Pochodne składowych prędkości względem koordynat w punktach  $\mathbf{v} = (x_{\mathbf{v}}, y_{\mathbf{v}}); \mathbf{v} \in \Lambda$  otrzymuje się z różniczkowania (pod znakiem całki) zależności (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m(\mathbf{v})}{\partial \chi_{kv}} = & -\frac{1}{4\pi} \int_L \left[ u_m(\mathbf{q}) \frac{\partial E_{mm}(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial \chi_{kv}} + u_n(\mathbf{q}) \frac{\partial E_{nm}(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial \chi_{kv}} \right] dL_{\mathbf{q}} + \\ & + \frac{1}{4\pi\mu} \int_L f_*(\mathbf{q}) \left[ \frac{\partial G_{mm}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) n_m}{\partial \chi_{kv}} + \frac{\partial G_{nm}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) n_n}{\partial \chi_{kv}} \right] dL_{\mathbf{q}} \quad \mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \in \Lambda \end{aligned} \quad (9)$$

### 3 Numeryczne rozwiązanie zagadnienia obliczeniowego

Dyskretne rozwiązanie równań całkowych polega w ogólności na sprowadzeniu całek do układu algebraicznych równań liniowych względem dyskretnych wartości niewiadomej funkcji w obranych punktach (punkty kolokacji) na brzegu rozpatrywanego obszaru. Najprostszą formą rozwiązania jest podział brzegu na elementy liniowe, na których wartości poszukiwanej funkcji w punktach kolokacji tożsamy z punktami centralnymi elementów przyjmuje się za stałe.

Przyjmując przybliżenie brzegu ( $L$ )  $J$ -elementowym układem elementów liniowych  $[L_j]_{j=1}^J$ , na których wartości funkcji  $[f_*(\mathbf{q}_j)]_{j=1}^J$  w punktach centralnych elementów mają stałe wartości, równania całkowe (4) sprowadza się do układów algebraicznych równań liniowych:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J f_*(\mathbf{q}_j) K_x^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \sum_{j=1}^J K_x^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \\ \sum_{j=1}^J f_*(\mathbf{q}_j) K_y^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \sum_{j=1}^J K_y^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \end{aligned} \quad (10)$$

w których funkcje wpływowe  $K_x^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)$ ,  $K_y^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)$  i  $K_x^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)$ ,  $K_y^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)$  są odpowiednio równe:

$$\left. \begin{aligned} K_x^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left[ G_{xx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) n_{yp_i} + G_{yx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) n_{xp_i} \right] dL_{\mathbf{q}_j} \\ K_y^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left[ G_{yy}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) n_{yp_i} + G_{xy}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) n_{xp_i} \right] dL_{\mathbf{q}_j} \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left[ E_{xx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) + E_{yx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \right] dL_{\mathbf{q}_j} \\ K_y^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left[ E_{yy}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) + E_{xy}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \right] dL_{\mathbf{q}_j} \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

Wartości składowych prędkości  $\left[ u_x(\mathbf{v}_k), u_y(\mathbf{v}_k) \right]_{k=1}^K$  opisanych zależnościami (5) oraz pochodnych  $\left[ \partial u_x(\mathbf{v}_k)/\partial x_k, \partial u_y(\mathbf{v}_k)/\partial y_k; \partial u_x(\mathbf{v}_k)/\partial y_k, \partial u_y(\mathbf{v}_k)/\partial x_k \right]_{k=1}^K$  opisanych zależnościami (9) w wybranych punktach obszaru ( $\Lambda$ ) otrzymuje się przez sumowanie, przy czym w tym wypadku funkcje podcałkowe w obrębie poszczególnych elementów są funkcjami argumentów  $\left[ \mathbf{q}_j = (x_{qj}, y_{qj}) \right]_{j=1}^J$  i  $\left[ \mathbf{v}_k = (x_{vk}, y_{vk}) \right]_{k=1}^K$  odpowiednio na brzegu ( $L$ ) obszaru i w obszarze ( $\Lambda$ ).

Analogicznie rozwiązuje się dyskretnie równanie całkowe (6) o niewiadomych wartościach temperatury i jej gradientu (strumienia ciepła) na brzegu ( $L$ ) obszaru ( $\Lambda$ ). W tym przypadku podział brzegu na elementy liniowe i przyjęcie stałych wartości niewiadomych funkcji w obrębie poszczególnych elementów prowadzi do układu algebraicznych równań liniowych.

Wprowadzając funkcje jednostkowe:

$$\delta_j^T = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } T_j \\ 0 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } q_j \end{cases} \quad (10^1)$$

$$\delta_j^Q = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } q_j \\ 0 & \text{jeżeli na elemencie } L_j \text{ poszukiwaną funkcją jest } T_j \end{cases} \quad (10^2)$$

równanie całkowe (6) sprowadza się do układu algebraicznych równań liniowych względem niewiadomych funkcji  $[T(\mathbf{q}_j)]_{j=1}^J$  i  $[q(\mathbf{q}_j)]_{j=1}^J$  odpowiednio na elementach  $L_{Tj}$  i  $L_{Qj}$  :

$$\sum_{j=1}^J \delta_j^T T(\mathbf{q}_j) \hat{K}^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - \sum_{j=1}^J \delta_j^Q q(\mathbf{q}_j) K^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \sum_{j=1}^J \left[ -\delta_j^Q T_s(\mathbf{q}_j) K^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - \delta_j^T q_s(\mathbf{q}_j) K^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^K \Phi(\mathbf{v}_k) K^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k \right] \quad (11)$$

gdzie:

$$K^G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \int_{L_j} G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_{\mathbf{q}_j} \quad (11a)$$

$$K^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \int_{L_j} E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_{\mathbf{q}_j} \quad ; \quad \hat{K}^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \begin{cases} K^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) & j \neq i \\ K^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) + 1/2 & i = j \end{cases} \quad (11b)$$

Całkę powierzchniową w równaniu (6) po triangulacji obszaru ( $\Lambda$ ) na  $K$ -elementów  $\Delta_k$  i wyznaczeniu wartości funkcji podcałkowej  $[\Phi(\mathbf{v}_k)]_{k=1}^K$  w punktach centralnych elementów przyjmując, że w obrębie poszczególnych elementów ma ona stałą wartość, sprowadza się kubatury [8]:

$$\iint_{\Lambda} \Phi(\mathbf{v}) G(\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \Phi(\mathbf{v}_k) K^E(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_k) \Delta_k \quad , \quad (11c)$$

gdzie:

$$\Phi(\mathbf{v}_k) = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u_x(\mathbf{v}_k)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y(\mathbf{v}_k)}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y(\mathbf{v}_k)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(\mathbf{v}_k)}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (11c^*)$$

#### 4 Weryfikacja algorytmu MEB

Dogodnym modelem do weryfikacji sformułowanego wyżej zagadnienia przepływowego jest przepływ Couette'a cieczy lepkiej pomiędzy równoległymi płaskimi ściankami, pozostającymi we względnym ruchu ze stałą prędkością. W przepływie Couette'a zarówno profil prędkości ruchu cieczy, jak też profil temperatury w cieczy generowany dyssypacją energii w ruchu cieczy lepkiej jest opisany zależnościami analitycznymi [9, 10]:

$$u^a(y) = U \frac{y}{h} \quad , \quad (12a)$$

$$T^a(y) = \frac{1}{2} \frac{\mu U^2}{\lambda} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) + T_s \quad . \quad (12b)$$

Obliczenia testowego zagadnienia przepływowego przy użyciu metody elementów brzegowych przeprowadzono w obszarze jednostkowym  $\Delta x = \Delta y = h = 1.0 \times 10^{-2} m$ , przyjmując wartość współczynnika lepkości dynamicznej  $\mu = 1000.0 Pa \cdot s$ , wartość współczynnika przewodności cieplnej  $\lambda = 0.1 W / (m \cdot K)$  oraz prędkość ruchu ścianki  $U = 0.01 m/s$  temperaturę ścianek i temperaturę strumienia cieczy  $T_s = 1.0 ^\circ C$ , przy równomiernym podziale brzegu rozpatrywanego obszaru odpowiednio na 400 i 800 elementów liniowych oraz podziale obszaru  $\Delta \Lambda = \Delta x \cdot \Delta y$  siatką 50x50 i 100x100 prostokątnych elementów z wartościami funkcji dyssypacji energii  $\Phi(x,y)$ , wyznaczonymi w punktach środkowych elementów powierzchniowych.

Wartości błędu numerycznego rozwiązania względem obydwu poszukiwanych funkcji: profilu prędkości  $u(y)$  i rozkładu temperatury  $T(y)$ , rozumiane jako różnica wartości funkcji opisanej wzorem analitycznym  $f^a$  i funkcji wartości funkcji wyznaczonej w rezultacie numerycznego rozwiązania  $f^n$  odniesione do wartości rozwiązania analitycznego (błąd względny):

$$\delta f^{an} = \left| (f^a - f^n) / f^a \right| * 100\% . \quad (13)$$

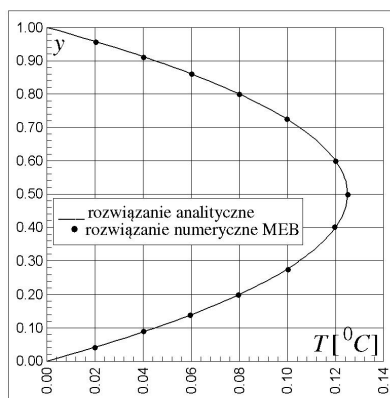
W przypadku liniowego rozkładu prędkości jednokierunkowego ruchu cieczy błąd numerycznego rozwiązania jest mniejszy niż 0.001%, natomiast profil temperatury cieczy generowany rozproszeniem energii przedstawiono na rysunku 1. Błąd numerycznego rozwiązania w odniesieniu do znormalizowanych (względnych) wartości, przy jednostkowych przyjętych wyżej wartościach parametrów fizycznych i sposobie dyskretyzacji brzegu i wnętrza rozpatrywanego obszaru, zestawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Profil temperatury w przepływie Couette'a - błąd rozwiązania MEB

Tab. 1. Temperature distribution in the Couette flow - error analysis applied in BEM

Współrzędne węzłów		Rozwiązanie analityczne	Rozwiązanie		Błąd met.	
			MEB	MEB	MEB	MEB
		400 elementów			800 elementów	
$x$	$y$	$T^a$	$T^n$	$\delta T^{an}$	$T^n$	$\delta T^{an}$
-	-	$^\circ C$	$^\circ C$	%	$^\circ C$	%
Siatka podziału obszaru 50x50						
0.50	0.00	0.00000	0.00000	0.0000	0.00000	0.0000
0.50	0.20	0.08000	0.07996	0.0500	0.07997	0.0375
0.50	0.40	0.12000	0.11996	0.0333	0.11997	0.0250
0.50	0.050	0.12500	0.12497	0.0240	0.12498	0.0216
Siatka podziału obszaru 100x100						
0.50	0.00	0.00000	0.00000	0.0000	0.00000	0.0000
0.50	0.20	0.08000	0.07998	0.0250	0.07999	0.0125
0.50	0.40	0.12000	0.11998	0.0166	0.11999	0.0083
0.50	0.050	0.12500	0.12498	0.0160	0.12499	0.0800





*Rys. 2. Profil temperatury - dyssypacja energii w przepływie Couette'a; porównanie rozwiązania MEB i analitycznego*

*Fig. 2. Profile of the temperature - energy dissipation in the Couette flow arises from irreversible viscous work; comparison BEM and analytical solutions*

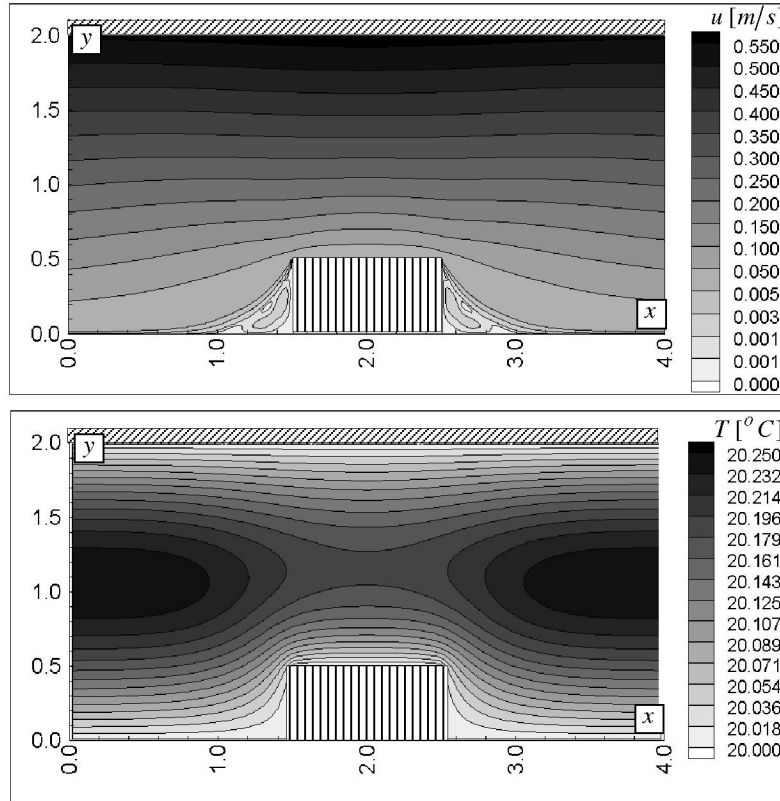
## 5 Przykład obliczeniowy

Niżej zaprezentowano przykłady zastosowania przedstawionego algorytmu obliczeniowego wyznaczania ruchu ciecży lepkiej, w tym pola prędkości i pola temperatury, w płaskim układzie pomiędzy płaską ścianką poruszającą się ze stałą prędkością i nieruchomą ścianką profilowaną. Przepływ gliceryny w temperaturze  $T_s = 20.0 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $\mu = 1.499 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\rho = 1261.08 \text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda = 0.2797 \text{ W/(mK)}$ ) wyznaczono odpowiednio:

(1) - w układzie dwóch ścianek odległych o  $h = 2 \text{ mm}$  z prostokątnym progiem na ścianie dolnej (nieruchomej) o wysokości  $\Delta h = 0.5 \text{ mm}$ , przy prędkości  $U = 0.60 \text{ m/s}$ ;

(2) - w układzie dwóch ścianek odległych o  $h = 2 \text{ mm}$  z prostokątnym wgłębieniem ścianki dolnej (nieruchomej) o głębokości  $\Delta h = 0.5 \text{ mm}$ , przy prędkości  $U = 0.60 \text{ m/s}$ .

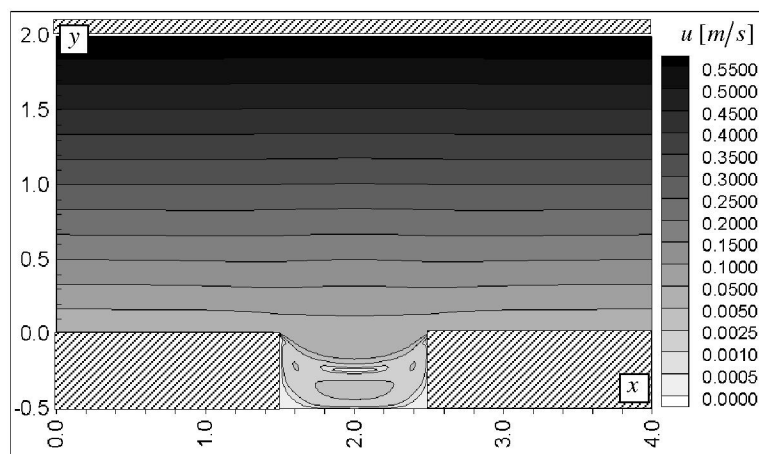
Na rysunku 3a-b przedstawiono rezultaty obliczeń MEB dla przypadku prostokątnego progu, odpowiednio: pole prędkości (rys. 3a), pole temperatury (rys. 3c), natomiast na rysunku 4a-b zaprezentowano graficzne wyniki obliczeń MEB dla prostokątnego wgłębienia, odpowiednio: pole prędkości (rys. 4a), pole temperatury (rys. 4b).



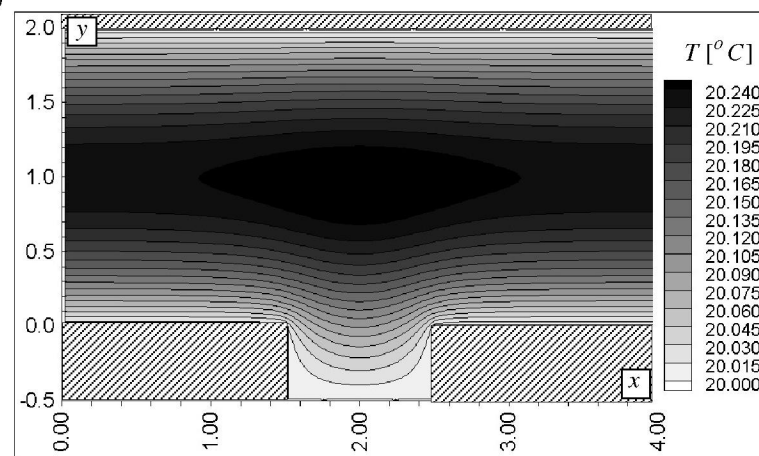
Rys. 3. Przepływ w kanale nad prostokątnym progiem generowany ruchem górnej ścianki - rozwiązanie MEB: a) pole prędkości, b) pole temperatury

Fig. 3. Flow through plane channel between flat plate and plate with rectangle obstacle generated by upper plate uniform moving - BEM solution: a) velocity field, b) temperature field

(a)



(b)



Rys. 4. Przepływ nad prostokątnym zagłębieniem - rozwiązanie MEB: a) pole prędkości, b) pole temperatury

Fig.4. Flow through plane channel between flat plate and plate with rectangle cavity generated by upper plate uniform moving - BEM solution: a) velocity field, b) temperature field

## 6 Podsumowanie

Prezentowany wyżej algorytm wyznaczania laminarnego ruchu cieczy lepkiej pomiędzy dwiema równoległymi ściankami, ścianka płaską i ścianką dowolnie profilowaną, generowanego jednostajnym ruchem ścianki płaskiej, jest użytecznym modelem do komputerowej symulacji i numerycznego rozwiązywania wielu zagadnień

tribologicznych [11] oraz do konstrukcji szeregu przyrządów i urządzeń w nanotechnice [12].

Użycie metody brzegowych równań całkowych (metody elementów brzegowych) do matematycznego sformułowania zagadnienia przepływowego i dyskretnego rozwiązania równań opisujących pola prędkości i temperatury umożliwia tworzenie stosunkowo prostych algorytmów, znacząco mniej czasochłonnych w maszynowej realizacji obliczeń w porównaniu z rozwiązaniami przy użyciu metody różnic skończonych i elementów skończonych. Realizacja zagadnienia obliczeniowego przy użyciu metod siatkowych (MRS, MES [13,14]) wymaga generowania w analizowanym obszarze siatek, równolicznych z rozmiarem układów algebraicznych równań liniowych uzyskiwanych w ramach dyskretyzacji równań różniczkowych opisujących zagadnienie. Metoda równań brzegowych wymaga jedynie dyskretyzacji brzegu rozpatrywanego obszaru, dopuszczając przy tym dowolność jego kształtu, co prowadzi do mniej licznych układów algebraicznych równań liniowych, o dobrze uwarunkowanych, z reguły, macierzach współczynników, umożliwiając ich rozwiązywanie metodami bezpośrednimi [15].

Jakkolwiek w prezentowanym wyżej algorytmie obliczeniowym ma miejsce wyznaczanie całki obszarowej, to w tym przypadku istotna jest dokładność jej numerycznego obliczenia (kubatury), przy czym zadanie to nie nakłada żadnych szczególnych uwarunkowań w zakresie wyboru węzłów kolokacji zadanych wartości całkowanej funkcji w elementach obszarowych, którymi mogą być elementy trójkątne lub dowolne elementy wielokątne. Nadto rozwiązanie zagadnień przepływowych, jak sformułowane wyżej, i podobnych przy użyciu metody elementów brzegowych daje swobodę w zakresie kształtowania brzegów obszarów o złożonej geometrii w zagadnieniach przepływowych płaskich, jak też przestrzennych.

Obliczenia zagadnień przepływowych w zakresie przepływów newtonowskich cieczy lepkich są realizowane w Centrum Komputerowych Sieci Rozległych Politechniki Białostockiej na wieloprocesorowej maszynie wirtualnej (16xXSEON 2,4GHz, 16 GB RAM) przy wykorzystaniu oprogramowania sporządzonego w Politechnice Białostockiej (programy sporządzone przez autorów opracowania w języku programowania FORTRAN, modyfikowane i kompilowane w systemie maszyny wirtualnej).

## Literatura

1. Batchelor G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1967
2. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann Ltd, 1987
3. Fletcher C.A.J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol. I. *Fundamental and General Techniques*, Vol. II. *Specific Techniques for Different Flow Categories*. Springer-Verlag, 1991
4. Prosnak W.J.: *Równania klasycznej mechaniki płynów*, Wyd. Naukowe PWN, 2006
5. Kythe P. K.: *An Introduction to Boundary Element Method*, CRC Press, 1955
6. Wrobel L.C.: *The Boundary Element Method*, Vol. I *Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*, John Willey & Sons, LTD, 2002
7. Pozrikidis C.: *A Practical Guide to Boundary element method with the software Library BEMLIB*, Chapman & Hall / CRC, 2002

8. Press W.H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling, W.T.: *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1988
9. Spurk J.H.: T.1. *Fluid Mechanics*, T.2. *Fluid Mechanics Problems and Solutions*, Springer, 1997
10. Khonsari M.M., Booser E.R.: *Applied Tribology: Bearing Design and Lubrication*, John Wiley & Sons, Ltd, 2008
11. Płaza S., Margielewski L., Celichowski G.: *Wstęp do tribologii i tribochemia*, Wydawnictwo PŁ, 2005
12. Palaci I.: *Atomic Force Microscopy Studies Nanotribology and Nanomechanics*, DPH Thesis École Polytechnique Federale de Lausanne, 2007
13. Mitchell A.R.: *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*, John Wiley&Sons Inc., 1980
14. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P.: *Finite Element Method for Fluid Dynamics*, 6th ed. Butterworth Heinemann, 2005
15. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania płaskich przepływów cieczy lepkiej, *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 5, nr 1, 2011

## Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono algorytm rozwiązania zagadnienia przepływowego płaskiego, laminarnego ruchu cieczy lepkiej pomiędzy ściankami: płaską i profilowaną, generowanego względnym wzdłużnym ruchem ścianek przy użyciu metody elementów brzegowych. Przedstawiono matematyczny opis zagadnienia przepływowego i metodę wyznaczania pola prędkości cieczy i pola temperatury generowanego w izotermicznym przepływie cieczy lepkiej dyssypacją energii.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów brzegowych, przepływ Stokesa, dyssypacja energii

# **Simulation of velocity and temperature fields of viscous fluid flow by using Boundary Element Method**

## **Summary**

In the elaboration was presents the algorithm of solution of the problem of two dimensional, laminar viscous fluid flow between parallel plates: flat and arbitrary profiled, whereat the flow is generated by longitudinal, steady moving of one of the walls.

The problem was formulated and solved by using Boundary Element Method. One introduced the mathematical description of the problem of flow and the method of calculating of the velocity field of liquid and of the temperature field generated in the isothermal flow of viscous fluid by dissipation of the energy.

**Keywords:** boundary element method, Stokes flow, viscous dissipation

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014 Katedry Ciepłownictwa Politechniki Białostockiej.