

Anna Justyna WERNER-JUSZCZUK

Sławomir Adam SORKO

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok,

E-mail: a.juszczuk@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl,

Rozwiązanie zagadnienia przewodzenia ciepła w obszarach wielospójnych metodą elementów brzegowych

1 Wstęp

Analityczne rozwiązania różniczkowych równań opisujących zjawiska i procesy fizyczne są możliwe w nielicznych przypadkach, kiedy kształt rozpatrywanych obiektów jest dostatecznie prosty. W zagadnieniach technicznych, kształt ten jest z reguły skomplikowany, uniemożliwiając analityczny opis geometrii powierzchni. Dlatego, z punktu widzenia zastosowań technicznych, istotne znaczenie mają metody numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych, które pozwalają na uwzględnienie skomplikowanej geometrii rozpatrywanych obiektów, złożonych warunków brzegowych oraz różnych typów nieliniowości.

Najbardziej rozpowszechnionymi metodami numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych są metody różnicowe: metoda różnic skończonych (MRS) i metoda elementów skończonych (MES). Metody te znalazły szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu zarówno problemów naukowych opisanych równaniami różniczkowymi fizyki matematycznej, jak też szerokiego wachlarza praktycznych zagadnień o znaczeniu technicznym.

Jakościowo różną od wyżej wymienionych metod jest metoda elementów brzegowych MEB (wywodząca się z teorii brzegowych równań całkowych [1], [2]).

Metoda elementów brzegowych, w matematycznym sensie, polega na sprowadzeniu zagadnienia brzegowego dla równania różniczkowego do odpowiedniego równania całkowego, którego rozwiązanie ze względu na skomplikowany kształt powierzchni brzegowej dokonuje się metodą numeryczną [2], [3], [4].

Metoda elementów brzegowych znajduje szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień wymiany ciepła (równania różniczkowe Laplace'a i Poissona opisujące zjawiska stacjonarne oraz równanie Fouriera opisujące zjawiska niestacjonarne), zagadnień falowych (równanie Helmholtza) i szeregu innych zagadnień, które poprzez przekształcenia opisujących je równań można sprowadzić do wymienionych wyżej równań i formułowanych dla nich zagadnień brzegowych i brzegowo-początkowych. Zagadnienia brzegowe formułowane dla równań opisujących procesy i zjawiska stacjonarne prowadzą do równań całkowych Fredholma względem niewiadomej funkcji na powierzchni lub linii brzegowej, natomiast zagadnienia początkowo-brzegowe dla równań różniczkowych opisujących zjawiska i procesy niestacjonarne dają w rezultacie równania całkowe Volterry.

Zagadnienia przewodzenia ciepła są przedmiotem istotnych badań, zarówno w sensie naukowym, jak też w zastosowaniach inżynierskich. Symulacja pól temperatury i analiza wymiany ciepła w obiektach inżynierskich, konstrukcjach, systemach przepływowych, elementach maszyn, jest nieodzownym elementem ich projektowania i technicznej optymalizacji ich konstrukcji. Są także elementem technologii materiałów o generowanych właściwościach fizyczno-chemicznych, w tym cieplnych.

Zagadnienia niestalonego i ustalonego przewodzenia ciepła w złożonych geometrycznie wieloelementowych obszarach przestrzennych i płaskich, są przedmiotem licznych opracowań zarówno w zakresie rozwiązań analitycznych [5], [6] [7], jak też sformułowań numerycznych, w tym jako rozwiązania zagadnień potencjałowych metodą elementów brzegowych: w pracach o charakterze podstawowym [3], [8], [9],[10], jak też w piśmiennictwie [11], [12], [13], [14].

Przedmiotem opracowania jest rozwiązane zagadnienia przewodzenia ciepła w układach obiektów materialnych jednorodnych w sensie właściwości materiałowych w poszczególnych komponentach układu, a różnych w poszczególnych elementach układu.

W szczególności dotyczy to współczynnika przewodzenia ciepła (λ) stykających się ze sobą obiektów, będących elementami składowymi układu.

Analizę ograniczono do obszarów dwuwymiarowych (obszarów płaskich), co istotnie upraszcza algorytmy obliczeniowe. W przypadku wielu zjawisk fizycznych opisanych równaniami różniczkowymi, które z natury są zjawiskami przestrzennymi, ich matematyczny opis można uprościć poprzez poszukiwanie rozwiązań w ortogonalnych układach dwuwymiarowych. Jednocześnie nie obniża się w sposób istotny przydatności generowanego modelu analizowanych zjawisk, do zastosowań w praktyce inżynierskiej. Przykładem jest zjawisko przewodzenia ciepła w takich obiektach inżynierskich, jak ustroje wydłużone o stałym kształcie przekroju poprzecznego: płyty profilowe, wsady wymienników ciepła, żebra, czy radiatory, kiedy zakłada się rezygnację z analizy zjawisk na powierzchniach ograniczających te obiekty

Skuteczności proponowanego algorytmu obliczeniowego dowiedziono przez porównanie rezultatów obliczeń numerycznych metodą elementów brzegowych z rozwiązaniami analitycznymi dwóch podstawowych jednowymiarowych zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła przez pólnieskończoną dwuelementową przegrodę płaską i dwuwarstwową ściankę cylindryczną [15].

2. Sformułowanie zagadnienia przewodzenia ciepła w obszarze płaskim metodą elementów brzegowych

Ustalony proces przewodzenia ciepła w izotropowej substancji jednorodnej o stałym współczynnikiem przewodzenia ciepła (λ) opisuje równanie różniczkowe Laplace'a:

$$\nabla^2 T(\mathbf{p}) = 0 \quad (1)$$

z warunkami brzegowymi:

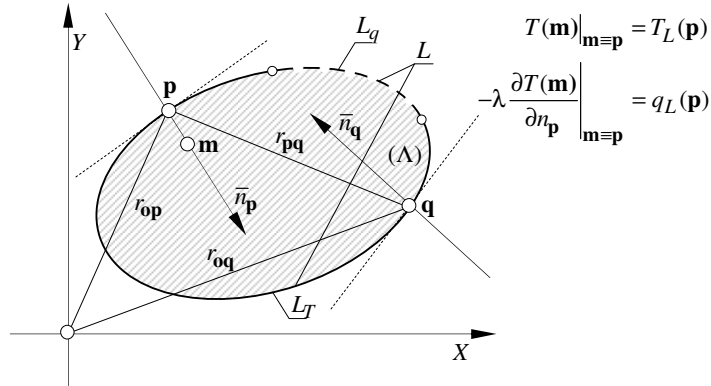
warunkiem Cauchy'ego dotyczącym wartości funkcji $T(\mathbf{p})$ (temperatury) na części (L_T) linii brzegowej (L)

$$T(\mathbf{m})|_{\mathbf{m}=\mathbf{p}} = T_L(\mathbf{p}); \quad (\mathbf{p}) \in (L_T) \quad (1a)$$

warunkiem Neumanna dotyczącym wartości pochodnej normalnej do brzegu funkcji $T(\mathbf{p})$ (strumienia ciepła) na części (L_q) linii brzegowej (L)

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{m})}{\partial n_{\mathbf{p}}}|_{\mathbf{m}=\mathbf{p}} = q_L(\mathbf{p}) \quad (\mathbf{p}) \in (L_q) \quad (1b)$$

w płaskim obszarze (Λ) (rys.1)



Rys. 1. Zagadnienia brzegowe w obszarze płaskim
Fig. 1. Boundary conditions on flat area

Przyjmując, że na części linii brzegowej (L_T) jest zadana temperatura $T(\mathbf{q})=T_L(\mathbf{q})$ natomiast na części linii brzegowej (L_q) jest zadany strumień ciepła $q(\mathbf{q})=q_L(\mathbf{q})$, przy czym $L \equiv L_T \cup L_q$, rozwiązanie zagadnienia opisanego równaniem różniczkowym (1) z warunkami brzegowymi (1a), (1b) na brzegu (L) obszaru (Λ) , można opisać równaniem całkowym:

$$\chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) = - \int_{(L_q)} T(\mathbf{q})H(\mathbf{p},\mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \int_{(L_T)} q(\mathbf{q})G(\mathbf{p},\mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - T_L^*(\mathbf{q}) + q_L^*(\mathbf{q}), \quad (2)$$

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (L); \quad (L \equiv L_T \cup L_q)$$

gdzie:

$$q_L^*(\mathbf{q}) = \int_{(L_q)} q_L(\mathbf{q})G(\mathbf{p},\mathbf{q})dL_{\mathbf{q}}, \quad (2a)$$

$$T_L^*(\mathbf{q}) = \int_{(L_T)} T_L(\mathbf{q})H(\mathbf{p},\mathbf{q})dL_{\mathbf{q}}, \quad (2b)$$

Funkcje $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, będące rozwiązaniami podstawowymi równania (1), są równe:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) ; \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| , \quad (2c^1)$$

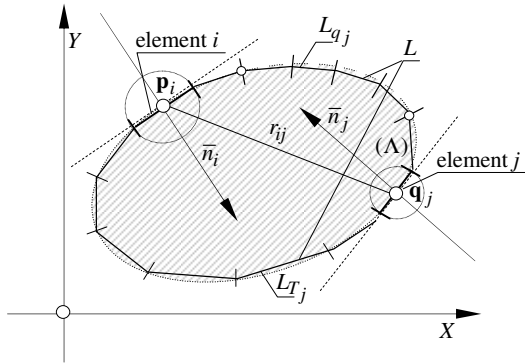
$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_{\mathbf{q}} - x_{\mathbf{p}})\mathbf{n}^x + (y_{\mathbf{q}} - y_{\mathbf{p}})\mathbf{n}^y}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} , \quad (2c^2)$$

Współczynnik $\chi(\mathbf{p})$ jest odpowiednio równy:

$$\chi(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \mathbf{p} \in (\Lambda^*) \text{ obszar } (\Lambda^*) \text{ jest dopełnieniem } (\Lambda) \\ 1 & \text{jeżeli } \mathbf{p} \in (\Lambda) \\ 1/2 & \text{gdy } \mathbf{p} \in (L) \text{ na gładkiej części brzegu } (L) \\ \theta/2\pi & \text{gdy } \mathbf{p} \in (L) \text{ w narożu o kącie rozwarcia } (\theta) \end{cases}$$

Ze względu na dowolną złożoność linii brzegowej rozpatrywanego obszaru, rozwiązania równania całkowego, opisującego wartości poszukiwanej funkcji na brzegu analizowanego obszaru, dokonuje się numerycznie. Przyjmuje się podział linii brzegowej na skończoną liczbę elementów brzegowych, będących układem odcinków stanowiących zamkniętą linię łamaną lub układem łuków, zakładając, że równanie całkowe jest spełnione na każdym elemencie, a warunki brzegowe są spełnione w wybranych punktach na każdym z elementów (rys.2).

Przybliżenie linii brzegowej skończonym układem elementów prowadzi do zastąpienia równania całkowego układem algebraicznych równań liniowych o wymiarze równym liczbie przyjętych elementów brzegowych. Rozwiązując układ algebraicznych równań liniowych wyznacza się dyskretnie funkcję będącą przybliżonym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego na poszczególnych elementach brzegowych. Za pomocą tej funkcji, przy zachowaniu dokonanej wcześniej podziału linii brzegowej na linie cząstkowe, drogą numerycznego całkowania wyznacza się rozwiązania równania różniczkowego opisującego rozpatrywane zjawisko w analizowanym obszarze.



Rys. 2. Dyskretyzacja linii brzegowej obszaru płaskiego (elementy liniowe)

Fig. 2. Discretization of boundary line of flat area (linear elements)

Przyjmując podział linii brzegowej (L) na $J = m + n$ elementów liniowych, przy podziale części (L_T) brzegu na m elementów i części (L_q) brzegu na n elementów, na których wartości temperatury $T(\mathbf{q}_j)$ i strumienia ciepła $q(\mathbf{q}_j)$ przyjmuje się stałe, równanie całkowe (2) sprowadza się do układu J równań algebraicznych:

$$\sum_{j=1}^J T(\mathbf{q}_j) \int_{L_j} H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_j = \sum_{j=1}^J q(\mathbf{q}_j) \int_{L_j} G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_j, \quad (3)$$

gdzie:

$$G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{ij}} \right); \quad r_{ij} = |\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_j|, \quad (3a)$$

$$H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)n_j^x + (y_i - y_j)n_j^y}{r_{ij}}, \quad (3b)$$

przy czym: $\mathbf{n}_j = [n_j^x, n_j^y] = [\Delta y_j / L_j, \Delta x_j / L_j]$.

Ponieważ funkcja (3a) jest osobliwa w punktach $\mathbf{p}_i \equiv \mathbf{q}_j$ wartość jej wyznacza się z zależności:

$$G(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} L_j \left[\ln \left(\frac{L_j}{2} \right) - 1 \right], \quad (3c)$$

natomiast wartości funkcji (3b) w punktach $\mathbf{p}_i \equiv \mathbf{q}_j$ można wyznaczyć z zależności:

$$H(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^J H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j). \quad (3d)$$

Ostatecznie układ równań (3) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$[\mathbf{H}]\{T\} = [\mathbf{G}]\{q\}, \quad (4)$$

gdzie $[\mathbf{H}]$ i $[\mathbf{G}]$ są macierzami o wymiarze $J \times J$, natomiast $\{T\}$ i $\{q\}$ są wektorami o wymiarze J , przy czym zgodnie z przedstawionymi wyżej założeniami wartości funkcji $\{T\}$, $j = 1, \dots, m$ oraz $\{q\}$, $j = m+1, \dots, J$ są zadane warunkami brzegowymi.

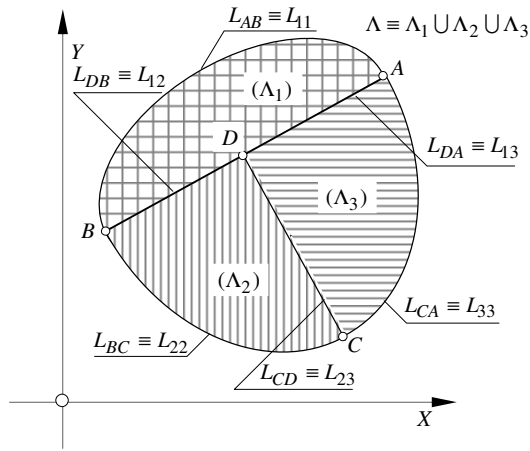
3 Rozwiązanie zagadnienia przewodzenia ciepła w wielospójnym obszarze płaskim

Złożone ustroje i konstrukcje inżynierskie, elementy maszyn i urządzeń składają się z zespolonych ze sobą elementów składowych wykonanych z różnych materiałów. Komponenty takich układów mają zróżnicowane właściwości fizyczno-chemiczne, w tym różną zdolność przewodzenia ciepła wyrażaną współczynnikiem przewodzenia ciepła.

Współczynnik ten dla większości materiałów izotropowych w sensie struktury cząsteczkowej ma wartość stałą i niezależną od temperatury.

Komponenty układu złożonego mogą być w kontakcie cieplnym o charakterze idealnym, w którym ma miejsce jednakowa wartość temperatury po obydwu stronach powierzchni styku (model trójwymiarowy) lub linii styku (modelu dwuwymiarowy), a także ciągłość strumienia ciepłego przenikającego powierzchnię styku. Komponenty mogą też pozostawać w kontakcie z oporem cieplnym, gdzie po obydwu stronach styku temperatura obydwu materiałów jest różna i zależna od oporu cieplnego.

Przedmiotem dalszych rozważań jest zagadnienie kontaktu cieplnego idealnego w płaskim obszarze wielospójnym w sensie materiałowym. Jakkolwiek, przedstawiony algorytm generowania układu liniowych równań algebraicznych do wyznaczania brzegowych wartości temperatury i strumienia ciepła, w odniesieniu do drugiego przypadku, wymaga tylko nieznacznych modyfikacji elementów macierzy **[G]** i **[H]**.



Rys. 3. Wielostrukturalny płaski obszar wielospójny

Fig. 3. Flat connected multidomain

W obszarze wielospójnym o i komponentach strukturalnych (w rozpatrywanym przypadku $i=3$) w poszczególnych podobszarach w punktach kolokacji poszukuje się wartości temperatury $\{T\}_{ik}^i$ i strumienia ciepła $\{q\}_{ik}^i$ ($k=1,2,3$).

$$\text{w podobszarze } (\Lambda_1): \left. \begin{array}{l} \{T\}_{11}^1, \{q\}_{11}^1 \text{ na linii brzegowej } L_{11} \\ \{T\}_{12}^1, \{q\}_{12}^1 \text{ na linii brzegowej } L_{12} \\ \{T\}_{13}^1, \{q\}_{13}^1 \text{ na linii brzegowej } L_{13} \end{array} \right\}, \quad (5a)$$

$$\text{w podobszarze } (\Lambda_2): \left. \begin{array}{l} \{T\}_{22}^2, \{q\}_{22}^2 \text{ na linii brzegowej } L_{22} \\ \{T\}_{12}^2, \{q\}_{12}^2 \text{ na linii brzegowej } L_{12} \\ \{T\}_{23}^2, \{q\}_{23}^2 \text{ na linii brzegowej } L_{23} \end{array} \right\}, \quad (5b)$$

$$\text{w podobszarze } (\Lambda_3): \left. \begin{array}{l} \{T\}_{33}^3, \{q\}_{33}^3 \text{ na linii brzegowej } L_{33} \\ \{T\}_{13}^3, \{q\}_{13}^3 \text{ na linii brzegowej } L_{13} \\ \{T\}_{23}^3, \{q\}_{23}^3 \text{ na linii brzegowej } L_{23} \end{array} \right\}. \quad (5c)$$

Warunki równej temperatury i strumienia ciepła na styku liniowym L_{12}, L_{13}, L_{23} podobszarów $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ przyjmują postać:

$$\left. \begin{array}{l} \{T\}_{12}^1 = \{T\}_{12}^2 \\ \{T\}_{13}^1 = \{T\}_{13}^3 \\ \{T\}_{23}^1 = \{T\}_{23}^3 \end{array} \right\} \quad (6a) \quad \left. \begin{array}{l} \{q\}_{12}^2 = -\{q\}_{12}^1 \\ \{q\}_{13}^3 = -\{q\}_{13}^1 \\ \{q\}_{23}^3 = -\{q\}_{23}^2 \end{array} \right\} \quad (6b)$$

Na zewnętrznych liniach brzegowych $L_{11}, L_{22}, L_{33} \rightarrow L^i; i=1,2,3$ przyjmując odpowiednio, że na częściach linii brzegowych L_T^i podzielonych na m_i elementów brzegowych jest zadana temperatura $\{T_L\}_{m_i}^i$, a na częściach L_q^i podzielonych na n_i elementów brzegowych jest zadany strumień ciepła $\{q_L\}_{n_i}^i$, układ równań (4) można przedstawić w postaci:

$$\left[\begin{array}{cc} [H]_{m_i m_i}^i & [H]_{m_i n_i}^i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{T_L\}_{m_i}^i \\ \{T\}_{n_i}^i \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} [G]_{m_i m_i}^i & [G]_{m_i n_i}^i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{q\}_{m_i}^i \\ \{q_L\}_{n_i}^i \end{array} \right\}. \quad (8)$$

$$\text{Generując wektor niewiadomych: } \{X\}^i = \left\{ \begin{array}{l} \{T\}_{n_i}^i \\ \{q\}_{m_i}^i \end{array} \right\}, \quad (9a)$$

$$\text{wektor prawej strony układu równań: } \{B\}^i = [H]_{m_i m_i}^i \{T_L\}_{m_i}^i + [G]_{m_i n_i}^i \{q_L\}_{n_i}^i, \quad (9b)$$

$$\text{macierz współczynników układu: } [A]^i = \left[[H]_{m_i n_i}^i \quad -[G]_{m_i m_i}^i \right], \quad (9c)$$

układ równań na liniach brzegowych $L^i; i=1,2,3$ można zapisać w postaci:

$$[A]^i \{X\}^i = \{B\}^i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 . \quad (9)$$

Korzystając z przedstawionych wyżej warunków zgodności wartości temperatury i strumienia ciepła na liniach granicznych wspólnych dla komponentów analizowanego obszaru złożonego, układ równań liniowych (4) można przedstawić na brzegu poszczególnych podobszarów w postaci:

na brzegu $L_1 \equiv L_{11} \cup L_{12} \cup L_{13}$ obszaru (Λ_1)

$$\begin{bmatrix} [A]_1^1 & [H]_{12}^1 & [H]_{13}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [X]_1^1 \\ \{T\}_{12}^1 \\ \{T\}_{13}^1 \end{Bmatrix} = \{B\}_1^1 + \begin{bmatrix} [G]_{12}^1 & [G]_{13}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}_{12}^1 \\ \{q\}_{13}^1 \end{Bmatrix} , \quad (10a)$$

na brzegu $L_2 \equiv L_{22} \cup L_{12} \cup L_{23}$ obszaru (Λ_2)

$$\begin{bmatrix} [A]_2^2 & [H]_{12}^2 & [H]_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [X]_2^2 \\ \{T\}_{12}^2 \\ \{T\}_{23}^2 \end{Bmatrix} = \{B\}_2^2 + \begin{bmatrix} [G]_{12}^2 & [G]_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}_{12}^2 \\ \{q\}_{23}^2 \end{Bmatrix} , \quad (10b)$$

na brzegu $L_3 \equiv L_{33} \cup L_{13} \cup L_{23}$ obszaru (Λ_3)

$$\begin{bmatrix} [A]_3^3 & [H]_{13}^3 & [H]_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [X]_3^3 \\ \{T\}_{13}^3 \\ \{T\}_{23}^3 \end{Bmatrix} = \{B\}_3^3 + \begin{bmatrix} [G]_{13}^3 & [G]_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}_{13}^3 \\ \{q\}_{23}^3 \end{Bmatrix} . \quad (10c)$$

Ostatecznie układ algebraicznych równań liniowych opisujących wartości brzegowe temperatury i strumienia ciepła na linii brzegowej obszaru wielospójnego generuje się zestawiając wektor niewiadomych, wektor prawych stron układu równań oraz macierz współczynników z podukładów równań opisanych zależnościami (10a,b,c).

4 Weryfikacja algorytmu obliczeniowego przewodzenia ciepła w płaskich obszarach wielospójnych metodą elementów brzegowych

Klasycznymi zagadnieniami teorii wymiany ciepła są zagadnienia ustalonego jednokierunkowego przewodzenia ciepła przez wielowarstwową półnieskończoną przegrodę płaską i ściankę cylindryczną, mające rozwiązania analityczne [15].

Zagadnienie przewodzenia ciepła przez przegrodę płaską (rys.4a.) rozwiązano metodą elementów brzegowych przyjmując:

wymiary przegrody	$h_1=0.1 \text{ m}, h_2=0.1 \text{ m}, H=0.3 \text{ m}$
współczynnik przewodnictwa	$\lambda_1=1.0 \text{ W/(mK)}, \lambda_2=0.5 \text{ W/(mK)},$
temperatura na ściance DE	$T_1 = 20.0 \text{ } ^\circ\text{C},$

*Rozwiązanie zagadnienia przewodzenia ciepła
w obszarach wielospójnych metodą elementów brzegowych*

gęstość strumienia ciepła $q_x=100.0 \text{ W/m}^2$ na ściance AB,
gęstość strumienia ciepła $q_y=0.0 \text{ W/m}^2$ na ściankach AB,CD,EF,FA,

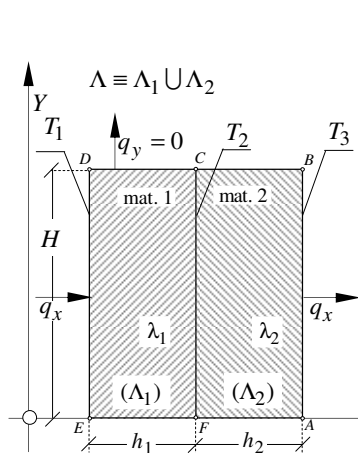
Rozkład temperatury i gęstość strumienia ciepła w ustroju płaskim są opisane zależnościami [15]:

$$T(x_i) = T_i - \frac{T_i - T_{i+1}}{h_i} x_i \quad 0 \leq x_i \leq h_i \quad ; \quad q = (T_i - T_{i-1}) \frac{\lambda_i}{h_i} ,$$

przy czym w rozpatrywanym przypadku płaskiego ustroju dwuwarstwowego:

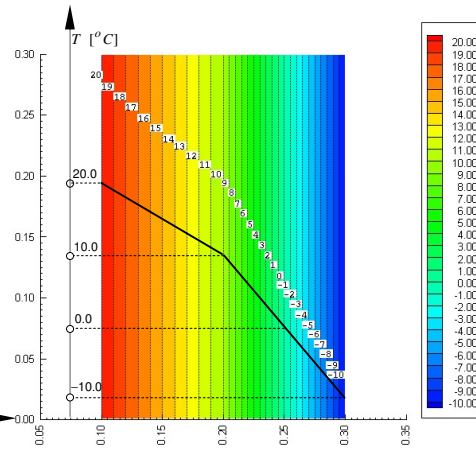
$$i = 1 \rightarrow T_i = T_1, T_{i+1} = T_2 \quad ; \quad h_i = h_1 \quad ; \quad \lambda_i = \lambda_1$$

$$i = 2 \rightarrow T_i = T_2, T_{i+1} = T_3 \quad ; \quad h_i = h_2 \quad ; \quad \lambda_i = \lambda_2$$



Rys. 4a. Przegroda płaska.
Schemat układu.

Fig. 4a. Flat baffle.
System scheme.



Rys. 4b. Przegroda płaska.
Wykres pola temperatury.

Fig. 4b. Flat baffle.
Diagram of temperature field.

Obliczenia pola temperatury i gęstości strumienia ciepła metodą elementów brzegowych wykonano przyjmując 1000 prostoliniowych elementów brzegowych odpowiednio po 100 elementów na brzegu EF, FA, BC, CD oraz po 300 elementów na brzegach AB i CD.

Błąd obliczeń wymienionych wyżej wielkości wyznaczono jako: $100 \cdot (f_i - f_n) / f_i$ [%], gdzie f_i i f_n oznaczają odpowiednio wartość funkcji wyznaczoną ze wzoru analitycznego i wartość funkcji wyznaczoną z obliczeń numerycznych.

W rozwiązaniu zadania testowego błąd metody obliczeniowej w odniesieniu do rozkładu temperatury nie przekracza wartości 0.07%, natomiast w odniesieniu do gęstości strumienia ciepła wartości 0.09%. Pole temperatury i rozkład temperatury przewodzenia ciepła przez przegrodę płaską przedstawiono na wykresie (4b).

Zagadnienie przewodzenia ciepła przez ściankę cylindryczną (rys.5a.) rozwiązano metodą elementów brzegowych przyjmując:

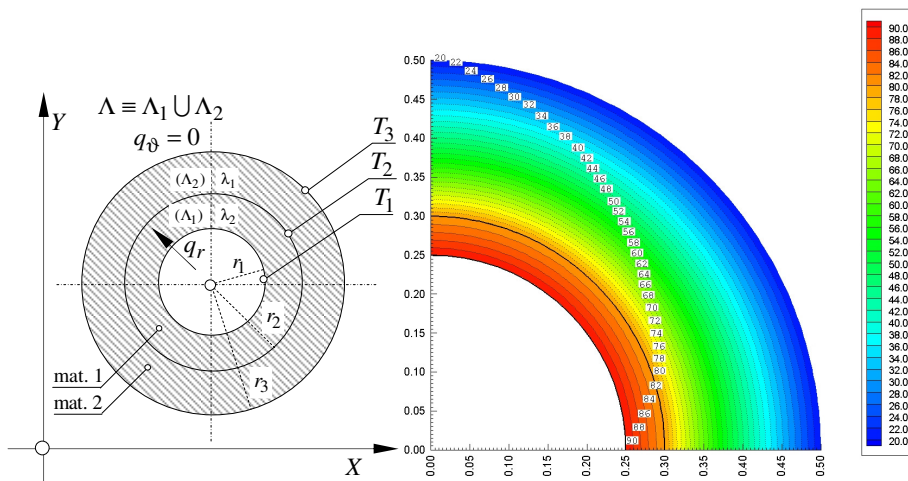
promień ścianki cylindrycznej $r_1=0.25 \text{ m}, r_2=0.3 \text{ m}, r_3=0.5 \text{ m},$
współczynnik przewodnictwa $\lambda_1=0.2900 \text{ W/(mK)}, \lambda_2=0.1355 \text{ W/(mK)},$

temperatura na ścianie wewnętrznej $T_1 = 90.0 \text{ } ^\circ\text{C}$,
 temperatura na ścianie zewnętrznej $T_3 = 20.0 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Rozkład temperatury i gęstość strumienia ciepła w ustroju cylindrycznym są opisane zależnościami [15]:

$$T(r) = T_w + (T_z - T_w) \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(r_z/r_w)} ; \quad q_r = \frac{\lambda(T_w - T_z)}{r \ln(r_z/r_w)} ,$$

przy czym w rozpatrywanym przypadku ścianki dwuwarstwowej:
 dla ustroju wewnętrznego (1) $r_w = r_1$, $r_z = r_2$, $T_w = T_1$, $T_z = T_2$, $\lambda = \lambda_1$; natomiast
 dla ustroju zewnętrznego (2) $r_w = r_2$, $r_z = r_3$, $T_w = T_2$, $T_z = T_3$, $\lambda = \lambda_2$.



Rys.5a. Ścianka cylindryczna.
 Schemat układu.

Fig.5a. Cylindrical wall.
 System scheme

Rys.5b. Ścianka cylindryczna.
 Wykres pola temperatury.

Fig.5b. Cylindrical wall.
 Diagram of temperature field

Obliczenia pola temperatury i gęstości strumienia ciepła metodą elementów brzegowych wykonano przyjmując 1050 prostoliniowych elementów brzegowych odpowiednio 630 elementów na brzegu wewnętrznym i 320 zewnętrznym oraz po 50 elementów na brzegach ograniczających wycinek kołowy odpowiednio 10 elementów w części wewnętrznej ustroju i 40 elementów na linii brzegowej części zewnętrznej.

W rozwiązaniu zadania testowego błąd metody obliczeniowej w odniesieniu do rozkładu temperatury nie przekracza wartości 0.09%, natomiast w odniesieniu do gęstości strumienia ciepła wartości 0.08%. Pole temperatury i rozkład temperatury przewodzenia ciepła przez przegrodę cylindryczną przedstawiono na wykresie (5b).

5 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm i program obliczeniowy do wyznaczania pól temperatury i składowych strumienia ciepła w płaskich obszarach wieloelementowych, w których elementy mają różną przewodność cieplną, charakteryzuje się dużą dokładnością

obliczeń przy stosunkowo niewielkiej liczbie elementów, jak wykazano to wyżej i może być stosowany do układów wieloelementowych o złożonej geometrii. Takimi układami są płaskie modele wieloelementowych układów konstrukcji budowlanych, w których właściwości materiałowe pewnych elementów i ich lokalizacja w konstrukcji prowadzi do powstawania tzw. "mostków cieplnych", będących źródłem strat ciepła w konstrukcjach budowlanych. Istotnym obszarem zastosowań prezentowaną metodą obliczeniową są wielowarstwowe układy radiatorów stosowanych w urządzeniach grzewczych, chłodniczych, urządzeniach elektronicznych i innych zastosowaniach.

Literatura

1. Kok Hwa Y, Kadarman A.H., Djojodihardjo H.: *Development and implementation of some BEM variants-A critical review*. Eng. Analysis with Boundary Elements 34, 2010
2. Brebbia C A , Dominguez J.: *Boundary Elements An Introductory Course*, Wit Press, 1998
3. Katsikadelis J.T.: *Boundary Elements. Theory and Applications*. Elsevier, 2002
4. Kythe P.K.: *An Introduction to Boundary Element Methods*, CRC, 1995
5. Sigh S., Jaim P.K., Rizwan-uddin An exact analytical solution for two-dimensional, unsteady, multilayer heat conduction in spherical
Int. J. of Heat and Mass Transfer 53, 2010
6. Sigh S., Jaim P.K., Rizwan-uddin Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction, *Int. J. of Thermal Sciences* 47, 2008
7. X. Lu, M. Viljanen, An analytical method to solve heat conduction in layered spheres with time-dependent boundary conditions, *Phys. Lett. A* 351, 2006
8. Majchrzak E.: *Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła*, Wyd. Pol. Częstochowskiej, 2001
9. Divo E.A, Kassab A.J.: *Boundary element methods for heat conduction: with applications in non-homogeneous media*, WIT Press, 2003
10. Sikora J.: *Numeryczne metody zagadnień brzegowych. Podstawy metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych*, Wyd. Pol. Lubelskiej, 2011
11. Atalay M.A. Dilara E.D. Aydin M.: Multi-region heat conduction problems by boundary element method, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 47, 2004
12. Gao X.W. Wang J. Interface integral BEM for solving multi-medium heat conduction problems, *Eng. Analysis with Boundary Elements* 33, 2009
13. Gil J., Divo E., Kassab A.J.: Estimating thermal contact resistance using sensitivity analysis and regularization, *Eng. Analysis with Boundary Elements* 33, 2009
14. Lee B.Y.: *Design sensitivity analysis and optimization of interface shape for zoned-inhomogeneous thermal conduction problems using boundary integral formulation* Eng. Analysis with Boundary Elements 34, 2010
15. Madejski J.: *Teoria wymiany ciepła*, Wyd. Uczelniane Pol. Szczecińskiej, 1998

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono rozwiązanie zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła w układach obszarów płaskich o różnych własnościach materiałowych, metodą elementów brzegowych. Dokonano porównania wyników rozwiązania zagadnienia

przewodzenia ciepła w przegrodzie płaskiej oraz ścianie cylindrycznej przy pomocy MEB oraz metody analitycznej. Uzyskano wysoki stopień zgodności wyników, co potwierdza skuteczność metody elementów brzegowych w rozwiązywaniu zagadnień wymiany ciepła w obszarach wielospójnych.

Słowa kluczowe: obszary wielospójne, przewodzenie ciepła, metoda elementów brzegowych.

Solution of the heat conduction problem in connected multidomain by boundary element method

Summary

In the paper, the solution of steady heat conduction problem in the system of flat domains of various material properties, by boundary element method, is presented. One made the comparison between the results of solving the heat conduction problem with BEM and with analytical method. The results achieved by both methods are in a good agreement, what confirms the efficacy of boundary element method in solving the heat transfer problems in connected multidomain.

Keywords: connected multidomain; heat conduction; boundary element method

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy nr S/WBiŚ/5/2011.