

Robert T. WIRSKI, Bogdan STRZESZEWSKI
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I INFORMATYKI POLITECHNIKI KOSZALIŃSKIEJ,
ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin

Liniowa filtracja obrazów cyfrowych za pomocą struktur bezstratnych

Dr inż. Robert WIRSKI

Po ukończeniu Technikum Elektronicznego rozpoczął studia w Wyższej Szkole Inżynierskiej w Koszalinie. Tytuł magistra uzyskał w 1995. W 2004 roku obronił rozprawę doktorską pt. "Stanowa synteza ortogonalnych systemów dyskretnych" w Instytucie Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej. Aktualnie jest zatrudniony w Katedrze Systemów Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów Politechniki Koszalińskiej. Zajmuje się tematyką filtracji dyskretnych za pomocą systemów bezstratnych.



e-mail: robert.wirski@tu.koszalin.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono nową technikę implementacji filtrów dwuwymiarowych. Polega ona na rozkładzie macierzy modelu Roessera na kaskadowe połączenie rotatorów Givens'a. Dzięki nowatorskiemu zastosowaniu permutacji otrzymuje się strukturę potokową o dużej odporności na błędy obliczeń o skończonej precyzji.

Słowa kluczowe: filtr cyfrowy, przetwarzanie 2-D, filtr ortogonalny, skończona odpowiedź impulsowa.

Linear image filtration based on loss-less structures

Abstract

In this paper, a novel two-dimensional FIR filter implementation technique is presented. It is based on a concept of orthogonal filters known from 1-D domain. The key of the algorithm is to represent a 2-D system as a cascade connection of two 1-D systems, which are described by 1-D transfer function vectors, given by (7). Each 1-D system is transformed into an orthogonal system via the synthesis of a paraunitary transfer matrix [5]. As a result, one obtains a cascade connection of two 1-D systems described by orthogonal state-space equations. Then, the equations can be combined to form orthogonal Roesser model matrices (14), and can be implemented using Givens Rotations and delay elements. The technique is illustrated by an example of an edge detection kernel filter whose convolution matrix is given by (15). Following the algorithm presented in the paper, there was obtained the Roesser model (22) and its decomposition into the cascade connection of Givens rotations whose parameters are collected in Tab 1. It was implemented using Audio Video Development Kit Stratix II GX. Givens rotation blocks were built by means of DSP blocks available in FPGA chip. Additionally, a system that realizes the same convolution matrix (15), but based on a direct structure (nine multipliers), was built for comparable purposes. Two tests were performed: an impulse response and sensitivity of frequency response to coefficient changes. The impulse response of both systems is the same up to finite precision errors. The sensitivity is much lower for the rotation structure (Fig. 2) when compared to the direct structure (Fig. 3).

Keywords: digital filter, 2-D processing, orthogonal filter, finite impulse response.

1. Wprowadzenie

Zainteresowanie cyfrowym przetwarzaniem sygnałów sięga okresu międzywojennego ubiegłego stulecia (kodowanie PCM). Za pierwszą publikację wprowadzającą opis systemów dyskretnych za pomocą równań stanu uważa się [1], współcześnie stosuje się je w postaci

$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = S_1 \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Dr inż. Bogdan STRZESZEWSKI

Tytuł magistra inżyniera w 1994 roku na Politechnice Gdańskiej. Tytuł doktora nauk technicznych w dyscyplinie elektronika w 2003 roku na Politechnice Koszalińskiej. W latach 1994-2003 zatrudniony na stanowisku asystenta na Wydziale Elektroniki i Informatyki Politechniki Koszalińskiej, a od 2003 roku na stanowisku adiunkta. Głównym tematem badań naukowych są układy działające w trybie prądowym.



e-mail: bogdan.strzeszewski@tu.koszalin.pl

gdzie

$$S_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$u(n)$, $y(n)$ to odpowiednio wejście i wyjście systemu, $x(n)$ to wektor stanu. Początki przetwarzania wielowymiarowego (2-D i 3-D) sięgają lat sześćdziesiątych ubiegłego stulecia. Przegląd rozwoju przetwarzania 2-D i 3-D znajduje się w [2]. Są tam przedstawione znane modele opisu systemów 2-D: Fornasini-Marchesiniego, Attasiego i Roessera. Ostatni z wymienionych przyjmuje postać [3]

$$\begin{bmatrix} x^h(n+1, m) \\ x^v(n, m+1) \\ y(n, m) \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \\ u(n, m) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_R & B_R \\ C_R & D_R \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Problemy związane ze skończoną precyzją obliczeniową systemów DSP zaowocowały odkryciem filtrów falowych i ortogonalnych. Mówi się, że systemy opisane przez (1) i (3) są filtrami ortogonalnymi, jeżeli S_1 i S_2 są macierzami ortogonalnymi. Takie systemy charakteryzują się bardzo dobrymi parametrami, jak niska wrażliwość charakterystyk częstotliwościowych, niskie szумы, brak przepięć i oscylacji pasożytniczych [4]. Otrzymane rezultaty były uogólniane na przypadek wielowymiarowy. Jedną z metod syntezy ortogonalnego systemu 2-D o skończonej odpowiedzi impulsowej zamieszczono w [5]. Rozpoczyna się ona od przedstawienia transmitancji w postaci

$$T(z_h, z_v) = Z_h G Z_v, \quad (5)$$

gdzie $Z_h = \begin{bmatrix} 1 & z_h^{-1} & \dots & z_h^{-k+1} \end{bmatrix}$, $Z_v = \begin{bmatrix} 1 & z_v^{-1} & \dots & z_v^{-l+1} \end{bmatrix}^T$, a G jest macierzą rzeczywistą rozmiaru $k \times l$, która posiada faktoryzację:

$$G = G_h G_v \quad (6)$$

taką, że G_h i G_v są macierzami pełnego rzędu o rozmiarach odpowiednio $k \times r$ i $r \times l$. Podstawiając (6) do (5) otrzymuje się

$$T(z_h, z_v) = H_h(z_h) H_v(z_v), \quad (7)$$

gdzie $H_h(z_h) = Z_h G_h$ i $H_v(z_v) = G_v Z_v$ są wektorami transmitancji odpowiednio wierszowymi i kolumnowymi. Następnie tworzy się wektory:

$$U_v(z_v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_v}} H_v(z_v) \\ F_v(z_v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_h^T(z_h) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_h}} H_h^T(z_h) \\ 0 \\ F_h(z_h) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie $F_v(z_v)$ i $F_h(z_h)$ to wielomiany otrzymane z faktoryzacji

$$M_v(z_v) = F_v(z_v^{-1})F_v(z_v) = 1 - \frac{1}{k_v} H_v^T(z_v^{-1})H_v(z_v) \quad (9)$$

$$M_h(z_h) = F_h(z_h^{-1})F_h(z_h) = 1 - \frac{1}{k_h} H_h^T(z_h^{-1})H_h(z_h). \quad (10)$$

Stałe k_v i k_h otrzymuje się z zależności:

$$k_h = \max T_h(e^{-j\omega})T_h^T(e^{j\omega}) \quad \text{dla wszystkich } \omega, \quad (11)$$

$$k_v = \max T_v^T(e^{-j\omega})T_v(e^{j\omega}) \quad \text{dla wszystkich } \omega. \quad (12)$$

Dla $U_v(z_v)$ i $U_h^T(z_h)$ wyznacza się równania stanu (1) dowolną metodą. Autorzy stosowali algorytm syntezy przedstawiony w [6]. Niech otrzymane macierze równań stanu dla $U_v(z_v)$ wynoszą: A_v , B_v , C_v , D_v oraz dla $U_h^T(z_h)$: A , B , C , D . W celu utworzenia kaskadowego połączenia realizującego (7), w równaniach stanu $U_h^T(z_h)$ wyrównuje się liczbę wejść i wyjść techniką opisaną w [7], a następnie tworzy się system transponowany za pomocą podstawienia

$$A_h = A^T, B_h = C^T, C_h = B^T, D_h = D^T. \quad (13)$$

Model Roessera otrzymuje się z zależności:

$$\begin{aligned} A_R &= \begin{bmatrix} A_v & 0 \\ B_h C_v & A_h \end{bmatrix} & B_R &= \begin{bmatrix} B_v \\ B_h D_v \end{bmatrix} \\ C_R &= \begin{bmatrix} D_h C_v & C_h \end{bmatrix} & D_R &= D_h D_v \end{aligned} \quad (14)$$

2. Synteza filtru wykrywającego krawędzie

Do wykrywania krawędzi w obrazie można zastosować filtr, którego maska współczynników ma postać

$$G = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Stosując algorytm przedstawiony w sekcji 1 otrzymuje się transmitancję (7), gdzie

$$H_h^T(z_h) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_h^{-1} + 0.07178z_h^{-2} \\ 0.26790 + 0.05255z_h^{-1} + 0.26790z_h^{-2} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$H_v(z_v) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_v^{-1} + 0.07178z_v^{-2} \\ -0.26790 - 0.05255z_v^{-1} - 0.26790z_v^{-2} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Następnie wyznacza się paraunitarne wektory (8) w postaci

$$U_v(z_v) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_v^{-1} + 0.07178z_v^{-2} \\ -0.26790 - 0.05255z_v^{-1} - 0.26790z_v^{-2} \\ 0.44876 + 0.27735z_v^{-1} - 0.17141z_v^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$U_h^T(z_h) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_h^{-1} + 0.07178z_h^{-2} \\ 0.26790 + 0.05255z_h^{-1} + 0.26790z_h^{-2} \\ 0 \\ 0.44876 + 0.27735z_h^{-1} - 0.17141z_h^{-2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Dla transmitancji (18) można wyznaczyć jednowymiarowe ortogonalne równania stanu (1), gdzie

$$\begin{aligned} A_v &= \begin{bmatrix} -0.11917 & -0.03893 \\ 0.36483 & 0.11917 \end{bmatrix} & B_v &= \begin{bmatrix} 0.84952 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_v &= \begin{bmatrix} -0.86156 & -0.04981 \\ -0.06186 & -0.88459 \\ 0.32648 & -0.44643 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_v &= \begin{bmatrix} 0.07178 \\ -0.26790 \\ 0.44876 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Wyznaczając jednowymiarową ortogonalną realizację (1) dla (19) oraz stosując algorytm opisany w [7] otrzymuje się system posiadający cztery wejścia i wyjścia

$$\begin{aligned} A_h^T &= A & C_h &= \begin{bmatrix} 0.84952 & 0 & 0 & -0.51244 \\ 0 & 0.91863 & 0 & 0.09389 \end{bmatrix} \\ B_h^T &= C & D_h &= \begin{bmatrix} 0.07178 & -0.38165 & 0 & 0.32314 \\ 0.26790 & 0.10226 & 0 & 0.36254 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.44876 & 0 & 0 & 0.70195 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Korzystając z (20) i (21) można wyznaczyć macierze modelu Roessera filtru ortogonalnego (14), w którym

$$A_R = \begin{bmatrix} -0.11917 & -0.03893 & 0 & 0 \\ 0.36483 & 0.11917 & 0 & 0 \\ 0.73846 & -0.01180 & -0.11917 & -0.36483 \\ 0.01180 & 0.78003 & 0.03893 & 0.11917 \end{bmatrix} \quad (22a)$$

$$B_R = \begin{bmatrix} 0.84952 \\ 0 \\ -0.07842 \\ 0.24056 \end{bmatrix} \quad D_R = \begin{bmatrix} -0.06662 \\ -0.05479 \\ 0.44876 \\ -0.07393 \end{bmatrix} \quad (22b)$$

$$C_R = \begin{bmatrix} -0.07842 & -0.24056 & 0.84952 & 0 \\ 0.32249 & -0.07145 & 0 & 0.91863 \\ 0.32648 & -0.44643 & 0 & 0 \\ -0.30083 & -0.33680 & -0.51244 & 0.09389 \end{bmatrix}. \quad (22c)$$

Jak wiadomo [8], macierz A równań stanu systemu FIR posiada jedynie zerowe wartości własne, zatem może zostać przekształcona w macierz dolną lub górną trójkątną z zerowymi elementami na przekątnej. Dzięki temu zmniejsza się liczba rotatorów w strukturze. W metodzie tej wyznaczana jest ortogonalna macierz Q spełniająca

$$Q^T A_R Q = A'_R \tag{23}$$

taka, że A'_R posiada minimalną liczbę niezerowych elementów. Systemy cyfrowe o różnej liczbie wejść i wyjść, dla celów przeprowadzenia transformacji podobieństwa, muszą być sprowadzane do systemów o jednakowej liczbie wejść i wyjść (do macierzy kwadratowej). Zwykle wykorzystywane będzie tylko wejście i wyjście realizujące zadaną transmitancję. Na dodatkowe wejścia będzie podawany sygnał zerowy. W celu doprowadzenia S_2 do macierzy kwadratowej zastosowany zostanie algorytm QR z obrotem kolumny [9].

3. Implementacja filtru za pomocą struktury potokowej

Idea implementacji modelu Roessera opiera się na koncepcji rozkładu macierzy (4) do postaci

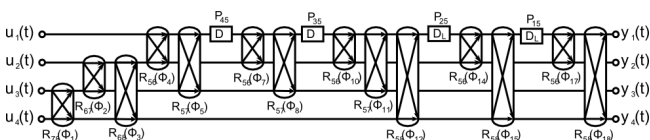
$$S_2 = E \prod_i O_{s_i, t_i} \tag{24}$$

gdzie $O_{s,t}$ to macierz spełniająca warunek (ortogonalności) $O_{s,t}^T O_{s,t} = I$. E to macierz diagonalna z elementami ± 1 na diagonalu. Do uzyskania struktury potokowej wykonany został rozkład (4) na macierze rotacji Givensa [9] oraz macierze permutacji, które zamieniają między sobą sygnały na liniach s_i, t_i . Stosuje się je w trakcie prowadzenia rozkładu (24), aby usuwać pętle sprzężenia zwrotnego występującego w równaniach stanu (3). Dla modelu Roessera (22) uzyskano rozkład przedstawiony w tab. 1.

Tab. 1. Parametry rotatorów i permutacji filtru wykrywającego krawędzie
Tab. 1. Rotator parameters of the edge detection filter

i	s_i	t_i	$\cos\Phi_i$	$\sin\Phi_i$
1	7	8	0.9565423	0.2915937
2	6	7	0.6666110	-0.7454058
3	6	8	-0.9425083	0.3341829
4	5	6	0.9675418	-0.2527109
5	5	7	0.8346250	0.5508186
6	4	5	Permutacja	
7	5	6	0.6063263	0.7952159
8	5	7	0.6659007	0.7460404
9	3	5	Permutacja	
10	5	6	0.9050405	-0.4253254
11	5	7	0.8139804	-0.5808924
12	5	8	0.8506508	0.5257311
13	2	5	Permutacja	
14	5	6	0.4122407	0.9110750
15	5	8	0.9794110	-0.2018765
16	1	5	Permutacja	
17	5	6	0.9584580	0.2852336
18	5	8	-0.8425352	0.5386413

Tworzy on strukturę potokową projektowanego filtru, którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Potokowa struktura filtru wykrywającego krawędzie
Fig. 1. Pipeline structure of edge detection filter

Do weryfikacji parametrów opracowanych filtrów wykonano ich sprzętową implementację za pomocą płyty uruchomieniowej Audio Video Development Kit Stratix II GX. Rotator Givensa został zbudowany z wykorzystaniem bloków DSP dostępnych w strukturze układu FPGA. Dla celów porównawczych zaimplementowano również filtr wykrywający krawędzie za pomocą struktury bezpośredniej, poprzez zastosowanie maski postaci

$$C = \begin{bmatrix} -0.06662 & -0.06662 & -0.06662 \\ -0.06662 & 0.53294 & -0.06662 \\ -0.06662 & -0.06662 & -0.06662 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Jego implementacja polegała na wykonywaniu przemnożenia współczynników C_{ij} przez grupę dziewięciu sąsiadujących wartości obrazu i sumowaniu wyniku. Do porównania wybrano parametry:

- odpowiedź impulsowa i charakterystyka amplitudowa
- wrażliwość charakterystyki amplitudowej na zmianę współczynników struktury

W przypadku filtrów FIR 2-D, odpowiedzią impulsową jest maska zadanych współczynników. Do badania rzeczywistych systemów konieczne jest zastosowanie zmodyfikowanego pobudzenia (26) tak, aby zminimalizować wpływ skończonej precyzji obliczeń na otrzymany wynik. Dla liczb wejściowych o rozdzielczości 8 bitów w kodzie U2 zastosowano pobudzenie postaci:

$$u = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Wrażliwość charakterystyki amplitudowej na zmianę parametru struktury k dla przypadku 2-D można zdefiniować następująco:

$$S_k(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{A_k(\omega_1, \omega_2) - A_{k+\Delta}(\omega_1, \omega_2)}{\Delta} \tag{27}$$

gdzie

- $A_k(\omega_1, \omega_2)$ to charakterystyka amplitudowa otrzymana dla struktury, w której wybrany parametr wynosił k ;
- Δ oznacza wielkość o jaką zmienił się parametr k .

Zależność (27) ma charakter teoretyczny ze względu na niemożność wyznaczenia jego wartości w systemach rzeczywistych z powodu skończonej precyzji liczb. Dlatego zastępuje się ją skończonymi przyrostami o małych wartościach, jednak tak dobranych, aby nie uległy wyzerowaniu poprzez obcięcie lub zaokrąglenie. Zwykle wyznacza się wrażliwość bezwzględną, dla której $\Delta = k - k_d$ oznacza odchyloną na potrzeby pomiaru wartość parametru k . Jest ona jednak mało przydatna do porównywania filtrów zbudowanych w oparciu o różne koncepcje – tak jak ma to miejsce w opisywanym przypadku. Aby otrzymać miarodajne wyniki porównania struktury rotatorowej i bezpośredniej zastosowano wrażliwość względną, w której $\Delta = (k - k_d) - k$, gdzie k to wartość uznana za poprawną w założonej arytmetyce. Stąd wrażliwość względną przyjmie postać

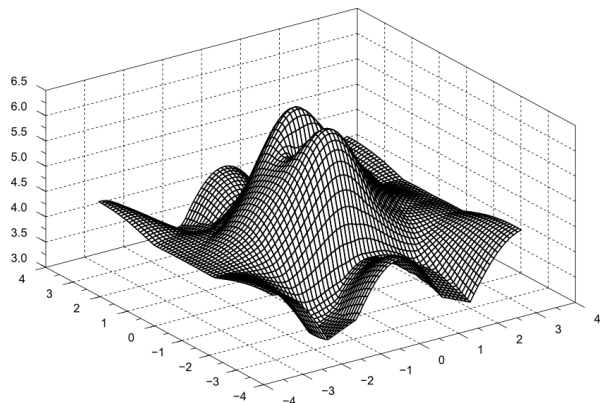
$$S_k(\omega_1, \omega_2) = \frac{k}{k - k_d} \left[A_k(\omega_1, \omega_2) - A_{k_d}(\omega_1, \omega_2) \right] \tag{28}$$

Do oceny wrażliwości całej struktury stosuje się odpowiednio miarę globalną statystyczną i pesymistyczną:

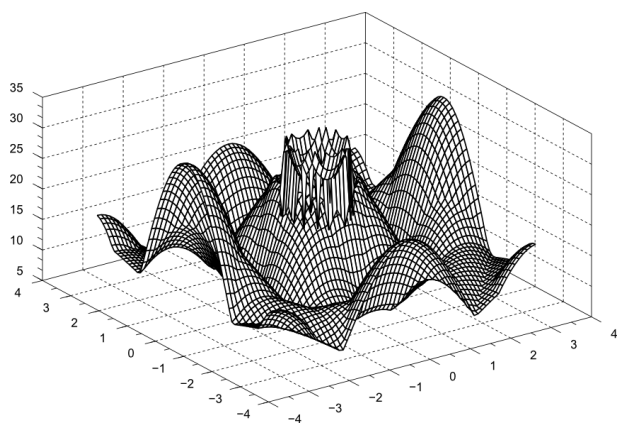
$$S_{stat}(\omega_1, \omega_2) = \text{mean}(S_k(\omega_1, \omega_2)) \tag{29}$$

$$S_{pessim}(\omega_1, \omega_2) = \sum_k |S_k(\omega_1, \omega_2)|. \quad (30)$$

Dla obydwu filtrów wyznaczono miary globalne wrażliwości pesymistycznej przedstawione odpowiednio na rys. 2 i rys. 3.



Rys. 2. Wrażliwość pesymistyczna filtru ortogonalnego
Fig. 2. Pessimistic sensitivity of the orthogonal filter



Rys. 3. Wrażliwość pesymistyczna filtru bezpośredniego
Fig. 3. Pessimistic sensitivity of the direct structure filter

4. Wnioski

Wykonane pomiary odpowiedzi impulsowej obydwu struktur filtru wykrywającego krawędzie wskazują na ich poprawną implementację. Struktura ortogonalna posiada dobre własności wrażliwościowe w porównaniu do struktury bezpośredniej, tzn. bardziej precyzyjnie odtwarza założone charakterystyki. Dzięki zastosowaniu permutacji, ze struktury FIR usuwa się sprzężenia zwrotne, które naturalnie występują w równaniach stanu. W dalszych badaniach autorzy skupią się na badaniu ortogonalnych filtrów IIR, których przewaga nad filtrami o strukturze bezpośredniej będzie jeszcze większa.

5. Literatura

- [1] Zadeh L. A., Desoer C. A.: Linear System Theory: The State Space Approach, McGraw-Hill Series in System Science, New York, NY: McGraw-Hill, 1963.
- [2] Bose N. K.: Multidimensional digital signal processing: Problems, progress and future scopes, Proc. IEEE, vol. 78, no. 4, pp. 590 – 597, Apr. 1990.
- [3] Roesser R. P.: A discrete state-space model for linear image processing, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 20, no. 1, pp. 1–10, Feb. 1975.
- [4] Vaidyanathan P. P.: A unified approach to orthogonal digital filters and wave digital filters, based on LBR two-pair extraction, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-32, pp. 673-686, July 1985.
- [5] Wirski R. T.: Synthesis of orthogonal Roesser model for two-dimensional FIR filters, in International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA2010), Taichung - Taiwan, Oct. 2010.
- [6] Piekarski M.: Stanowa metoda syntezy macierzy transmitancji cyfrowych filtrów ortogonalnych. Materiały X KK TOiUE, Gdańsk, 1987, ss. 145–150
- [7] Wirski R. T.: On the realization of 2-D orthogonal state-space systems, Signal Processing, vol. 88, pp. 2747–2753, 2008.
- [8] Wawryn K., Wirski R. and Strzeszewski B.: Implementation of finite impulse response systems using rotation structures, in Information Theory and its Applications (ISITA), 2010 International Symposium on, Oct. 2010, pp. 606–610.
- [9] Golub G. H. and Van Loan C. F.: Matrix Computations, 3rd ed. Baltimore, MD: The Johns Hopkins Univ. Press, 1996.

otrzymano / received: 08.07.2014

przyjęto do druku / accepted: 02.09.2014

artykuł recenzowany / revised paper

INFORMACJE

Wydawnictwo PAK

specjalizuje się w wydawaniu czasopisma *Pomiary Automatyka Kontrola* i książek popularno-naukowych w dziedzinie automatyki i pomiarów

Osoby i firmy przemysłowe zainteresowane współpracą z Wydawnictwem proszone są o kontakt bezpośredni dla uściślenia szczegółów współpracy

Wydawnictwo PAK
00-050 Warszawa
ul. Świętokrzyska 14A
tel./fax 22 827 25 40

Redakcja PAK
44-100 Gliwice
ul. Akademicka 10, p. 30b
tel./fax 32 237 19 45
e-mail: wydawnictwo@pak.info.pl