

GRZEGORZ MAZUREK
Kielce University of Technology
e-mail: gmazurek@tu.kielce.pl

IMPLEMENTATION OF THE GENERALIZED VISCOELASTIC HUET-SAYEGH AND BURGERS MODEL TO DETERMINE THE STIFFNESS MODULUS OF ASPHALT CONCRETE

Abstract

The aim of this paper is to compare the possibility of application of two physical models, namely generalized Huet-Sayegh and Burgers model to describe the changes in stiffness modulus of asphalt concrete. Both models make sense only in range of the linear viscoelasticity. The modern design of the pavement structure increasingly forced to use more sophisticated techniques for modeling the properties of the bituminous mixtures. The study was found that the application of popular Burgers model is not capable to properly predict the properties of the asphalt concrete at high frequency load/low temperature and at high temperature/low frequency in comparison with the generalized Huet-Sayegh model.

Keywords: linear visco-elasticity, modelling, Quasi-Newton algorithm, dynamic test

1. Introduction

The design of flexible roadway structures requires increasingly sophisticated rheological models for bituminous materials. The scale of explanation of real asphalt mixtures behavior (MMA) influences on the durability of the pavement design. Currently, the most widely used model for the design of the pavement structure is the elastic model. This model assumes a linear stress-strain relationship [1]. Unfortunately, there is no possibility to take into account the time causing a lack of capability to predict a relaxation phenomenon that takes place in the design of the flexible road surface [2]. Therefore its use is limited only to cases where the pavement structure is loaded for a time equals to 0.02 s or at low temperature below +13°C [3]. Currently, in the world the main attention is paid on the introduction of linear visco-elasticity models for the design of roadway structures characterized by a stress relaxation [4, 5]. These models are discussed in Burgers and Huet-Sayegh (2S2P1D) that allow the estimation of the stiffness modulus expressed in frequency and temperature domain. Accordingly, it is required to make a decomposition of the complex modulus (E^*) into its

elastic part (E') and viscous part (E'') described by additional parameter denoted as phase angle (δ) [6].

2. Materials and methods

2.1. Asphalt concrete AC 16W

Reference bituminous mixture type AC16W had to meet Polish requirements of WT-2/2010 [7]. Pavement layer AC16W has been designated for traffic category KR3-6 ($ESAL_{100kN} < 2.5 \cdot 10^6 \div 7.3 \cdot 10^6$ axles). The composition of the bituminous mixture AC16W was designed using gradation limits imposed by the requirements of WT-2/2010. The mix of mineral aggregate AC16W with gradation such as 8/16 and 2/8 consisted of limestone while gradation 0/4 was the dolomite. The optimum amount of bitumen was set at 4.6%.

2.2. Stiffness modulus according to DTC-CY

The Direct Tension-Compression Test on Cylindrical Samples (DTC-CY) was performed on the specimens of asphalt concrete AC16W to determine complex stiffness modulus according to PN-EN 12697-26 Annex D [8]. The specimen was subjected to a sinusoidal strain with an amplitude of $\epsilon_0 < 25 \mu\epsilon$. The complex modulus was calculated at temperatures

of 20°C and frequencies: 0.1 Hz, 0.3 Hz, 1 Hz, 3 Hz, 10 Hz and 20 Hz. In result the complex modulus (E^*) and the phase shift angle (δ) were determined.

3. Models estimation parameters algorithm

In engineering applications the most popular model is Burgers model [9]. Despite the good compromise between the number of parameters and the capacity to explain the behavior of the material this model it is not able to accurately predict a stiffness modulus for many modern composite materials. In addition, the rheological parameters described by this model are strongly temperature dependent preventing the formation of master curve. Thus, the wider use of Burgers model in the pavement structures design is limited. Therefore, recently it is used a more appropriate model which is a generalization of Huet-Sayegh model based on parabolic dashpots (2S2P1D) [10]. This model can precisely describe the phenomenon of relaxation in bituminous mixtures but requires the determination of seven parameters. Graphical representation of these models is shown in Figure 1.

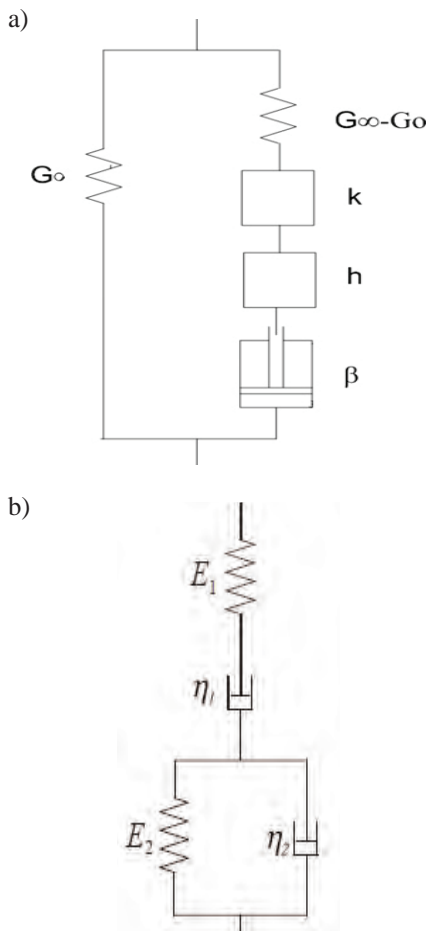


Fig. 1. Scheme of rheological models: a) generalized Huet-Sayegh (2S2P1D); b) Burgers

Either 2S2P1D and Burgers models can be transformed from the time domain to the frequency domain using Fourier transformation function [4], [11]. Therefore, after necessary function transformations the relaxation function of Burgers model has the form (1):

$$E^*(\omega) = \frac{i(\eta_1) \cdot \omega - \left(\frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{E_2}\right) \cdot \omega^2}{1 + i\left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2}\right) \cdot \omega - \left(\frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{E_1 \cdot E_2}\right) \cdot \omega^2} \quad (1)$$

where: η_1, E_1 – viscosity and linear spring of Maxwell model, η_2, E_2 – viscosity and linear spring of Kelvin model, ω – loading time (frequency).

In contrast the relaxation function of 2S2P1D (S_H) model is formulated by (2):

$$E^*(\omega) = E_o + \frac{E_g - E_o}{1 + \alpha(i\omega\tau)^{-k} + (i\omega\tau)^{-h} + (i\omega\beta\tau)^{-1}} \quad (2)$$

where: $E^*(\omega)$ – shear stiffness modulus expressed in frequency, k and h – exponents (parabolic dashpot) $0 < k < h < 1$, α – constant, τ – characteristic time, E_o – long-term modulus and E_g – instantaneous modulus, β – constants expressed zero shear viscosity η_o .

Parameters determination of analyzed models requires the use of optimization techniques aimed at minimizing the differences between the measured and modeled values of stiffness modulus. Therefore, the script written in MathCad [12] using the solver Quasi-Newton was elaborated. As a measure of goodness of fit the root mean square error (RMSE) and the value of the standard error of estimation (S_e) were utilized. The results of matching parameters were shown in Table 1.

Table 1. Matching parameters of Burgers and 2S2P1D model in relation to stiffness modulus of elasticity E^*

Parameters of generalized Huet-Sayegh model (2S2P1D)								
E_o [MPa]	E_g [MPa]	h [-]	k [-]	α [-]	β [-]	τ [s]	S_e [MPa]	RMSE [%]
438	66050	0,42	0,10	2,9	3312	0,1	786	3,99
Parameters of Burgers model								
η_1 [MPa·s]	E_1 [MPa]	η_2 [MPa·s]	E_2 [MPa]	S_e [MPa]	RMSE [%]			
46239	14496	10590	29744	3622	10,02			

It should be noted that the fit of the model 2S2P1D is high from the point of view of RMSE parameter amounted to 3.99% while the Burgers model is characterized by an almost threefold greater RMSE standing at 10.02%. Also, the estimation

standard error of complex modulus (E^*) of Burgers model is 3622 MPa, and it is more greater than the estimation standard error observed in 2S2P1D model representing the value of 786 MPa. Therefore, it can be concluded that the quality of the explanation of the relaxation phenomenon is better in case of application of 2S2P1D model.

4. Results and comparisons

On the basis of conducted approximation of Burgers and 2S2P1D models parameters the extrapolation of stiffness modulus results (E^*) out of tested frequency range was studied. The aim of this was to observe how they will proceed modeled relaxation function of the asphalt concrete AC11W in a wide frequency spectrum. Figure 2 shows changes in stiffness modulus in the range from 0.01 Hz to 20 Hz.

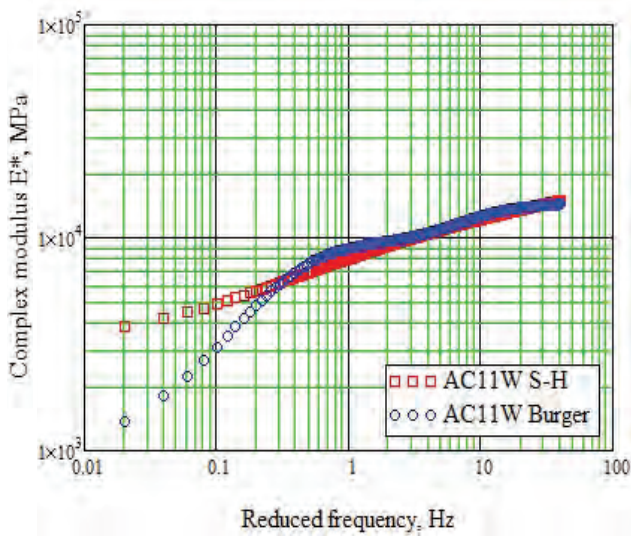


Fig. 2. The comparison between analytical solutions of Burgers and 2S2P1D (S-H) models

Comparing these two models it should be noted that Burgers model is not able to properly explain the behavior of the asphalt concrete at frequencies below 0.2 Hz. The first non-convergence appears at frequency approximately of 2 Hz (Figure 2 and Figure 3a). As a result, model Burgers in relation to 2S2P1D model underestimates the stiffness of the asphalt concrete for a long loading time. It is associated with the dominance of Maxwell dashpot element (η_2) that makes the modulus tending to zero. This points to the existence of creep and consequently the dissipation of elastic energy. It is known that in the linear viscoelasticity there is no dissipation energy.

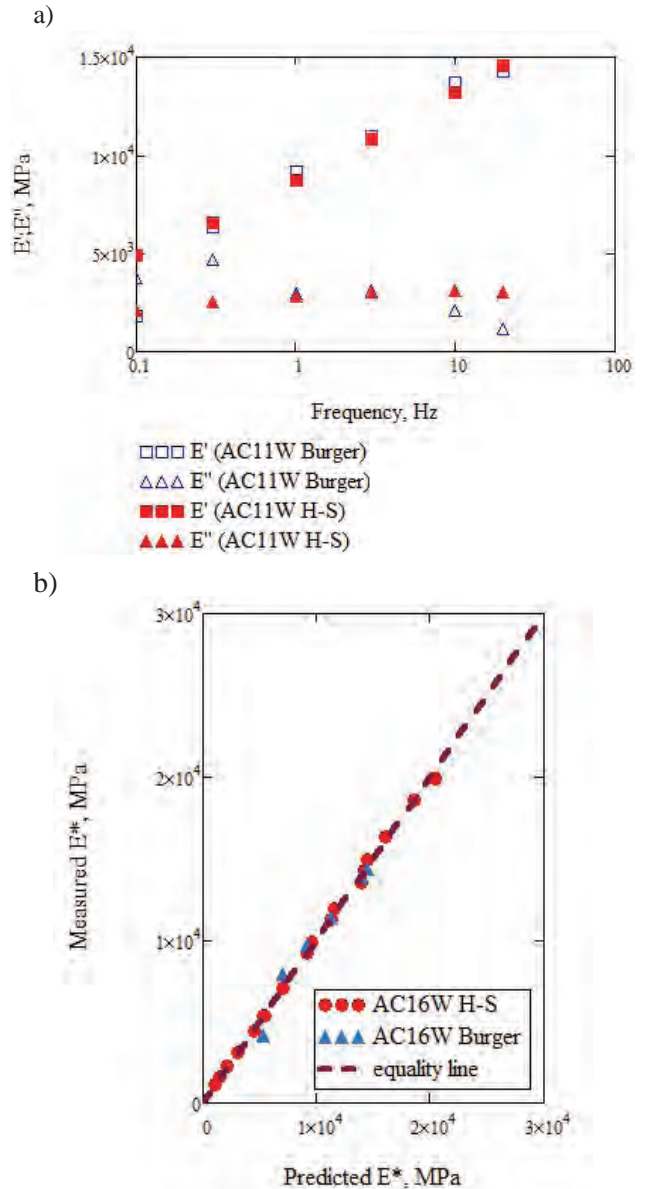


Fig. 3. Relation between E' and E'' (a); Models matching quality (b)

In Figure 3a after decomposition of the complex modulus into its elastic part (E') and viscous part (E'') it can be concluded that for Burgers model above 10 Hz is observed a rapid reduction in the viscous part suggesting that the material reached a elastic state. The level of the elastic modulus described by Burgers model is 4.6 times less (E_g/E_1) than in 2S2P1D model. Unfortunately, from the point of view of the real structure behavior this stiffness modules level for high-frequency loading time (in the model Burgers) is not acceptable. Analyzing the fit results in Figure 3b it should be noted that, despite some differences with the 2S2P1D model the considered Burgers model can be used in certain engineering

applications. However, the biggest differences between Burgers and 2S2P1D models appears for a long loading time/high temperature. In addition at the low temperatures Burgers model achieves very fast the level of the asymptote of elastic modulus (where stiffness modulus is independent of loading time) and it is lower than results of experimental data. In this connection, the Burgers model should not be used to estimate the modulus MMA in a wide range of loading time and temperature.

5. Conclusions

Based on conducted analyses the following conclusions can be draw:

- The generalized Huet-Sayegh (2S2P1D) model more better explains the relaxation phenomenon for asphalt concrete than Burgers model.
- The matching quality of 2S2P1D model regarding RMSE equals approximately 4% whereat for Burgers model it stands at 10%.
- Burgers model it doesn't explain precisely behavior of the material according to the linear viscoelasticity theory.
- In spite of its simplification, Burgers model can be used to predict bituminous mixtures.
- Burgers model should not be used in a wide range of the loading time especially for the frequency range below 0.1 Hz and above 20 Hz.

References

[1] Obara P., Iwański M.: *Strict and approximate dynamic analysis of rod structures taking into account the impact of axial forces*, Procedia Engineering, XXIV

R-S-P seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering (24RSP) (TFoCE 2015) 111, 324-330, 2015. doi:10.1016/j.proeng.2015.07.096.

- [2] Stefańczyk B., Mieczkowski P.: *Mieszanki mineralno-asfaltowe. Wykonawstwo i badania*, WKŁ, Warszawa 2008.
- [3] Katalog wzmocnień i remontów nawierzchni podatnych i półsztywnych [Flexible and Semi-Rigid Pavement Maintenance and Rehabilitation Catalogue], GDDKiA, 2012.
- [4] Kim Y.R.: *Modeling of Asphalt Concrete*, McGraw-Hill Construction, 2009.
- [5] Monismith C.L., Alexander R.L., Secor, K.E.: *Rheological behaviour of asphalt concrete*, Association of Asphalt Paving Technologies (AAPPT), (1966), 556, 401-449.
- [6] Marques S.P., Creus G.J.: *Computational Viscoelasticity*, Springer Briefs in Computational Mechanics, 2012.
- [7] WT-2/2010 – Technical requirements – Bituminous mixtures - Annex 2, order nr 102, GDDKiA 2010.
- [8] EN 12697-26 Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt- Part 26: Stiffness, Annex D.
- [9] Kisiel I.: *Reologia w budownictwie*, Arkady, 206, 1967.
- [10] Benedetto H.D.: *Modelling the rheological properties of bituminous binders using the 2S2P1D Model*, Construction and Building Materials, 38, (2013), pp. 395-406.
- [11] Nagórski R.: *Mechanika nawierzchni drogowych w zarysie [Road structures mechanics in general principle]*, PWN, Warsaw 2014.
- [12] Benker H.: *Practical Use of Mathcad – Solving Mathematical Problems with a Computer Algebra System*, Springer 1999.

Grzegorz Mazurek

Implementacja lepkosprężystego uogólnionego modelu Hueta-Sayegh oraz Burgersa do określenia modułu sztywności betonu asfaltowego

1. Wstęp

Projektowanie konstrukcji podatnych wymaga stosowania coraz to bardziej zaawansowanych modeli reologicznych dla materiałów bitumicznych. Skala wyjaśnienia przez nie rzeczywistego zachowania

mieszanek mineralno-asfaltowych (mma) decyduje o trwałości konstrukcji nawierzchni drogowej. Obecnie najczęściej stosowanym modelem do projektowania konstrukcji nawierzchni jest model sprężysty. Jest, to model który zachowuje liniową relację naprę-

zenie-odkształcenie [1]. Niestety brak możliwości uwzględnienia czasu powoduje, że nie odwzoruje on zjawiska relaksacji, które ma miejsce w zachowaniu konstrukcji podatnych nawierzchni drogowej [2]. W związku z tym jego stosowanie jest ograniczone do przypadków, w którym konstrukcja nawierzchni jest krótko obciążona – około 0,02 s lub niskiej temperatury poniżej +13°C [3]. Obecnie główny nacisk na świecie [4, 5] jest stawiany na wprowadzenie modeli liniowej lepko-sprężystości do projektowania konstrukcji charakteryzujących relaksację naprężeń w mma. Wśród nich są omawiane modele Burgersa oraz Huet-Sayegh (2S2P1D), które umożliwiają estymację modułu sztywności w dziedzinie częstotliwości oraz temperatury. W związku z tym jest wymagana dekompozycja modułu zespolonego (E^*) na jego część sprężystą (E') oraz lepką (E'') przy pomocy dodatkowego parametru postaci kąta przesunięcia fazowego (δ)[6].

2. Metody i materiały

2.1. Beton asfaltowy AC 16W

Referencyjna mieszanka mineralno-asfaltowa typu AC16W musiała spełniać polskie wymagania WT-2/2010 [7]. Warstwa AC16W została przeznaczona na projektowany ruch pojazdów kategorii KR3-6 (ESAL100 kN < $2,5 \cdot 10^6 \div 7,3 \cdot 10^6$ axles). Skład mieszanki mineralnej warstwy AC16W zaprojektowano metodą krzywych granicznych, których wartości krytyczne są podyktowane wymaganiami WT-2/2010. W mieszance mineralnej AC16W jako frakcje kruszywa 8/16 oraz 2/8 zastosowano skały wapienne natomiast frakcję 0/4 stanowił dolomit. Optymalna ilość asfaltu wynosiła 4,6%.

2.2. Pomiar modułu zespolonego DTC-CY

Moduł zespolony betonu asfaltowego (AC16W) próbek został oznaczony metodą DTC-CY (Direct Tension-Compression Test on Cylindrical Samples) według normy PN-EN 12697-26 Annex D [8]. Próbkę poddano sinusoidalnemu stałemu odkształceniu o amplitudzie $\varepsilon_0 < 25 \mu\epsilon$. Moduł zespolony został określony w temperaturze 20°C. Częstotliwość obciążenia wynosiła 0,1 Hz, 0,3 Hz, 1 Hz, 3 Hz, 10 Hz oraz 20 Hz. Wynikiem badania był moduł zespolony (E^*) oraz kąt przesunięcia fazowego (δ).

3. Algorytm estymacji parametrów modelu

Najbardziej popularnym modelem reologicznym w zastosowaniach inżynierskich jest model Burgersa [9]. Mimo dobrego kompromisu między ilością parametrów a zdolnością do wyjaśnienia zachowania

materiału model Burgersa nie jest w stanie precyzyjnie prognozować modułu sztywności wielu nowoczesnych materiałów kompozytowych. Ponadto parametry reologiczne w nim zawarte zależą od temperatury, co uniemożliwia kształtowanie krzywych wiodących za pomocą modelu Burgersa. Tym samym ogranicza to jego szersze stosowanie do projektowania konstrukcji nawierzchni metodami mechanistycznymi. W związku z tym od niedawna stosowany jest znacznie bardziej adekwatny model, będący uogólnieniem modelu Huet-Sayegh, wykorzystujący tłumiki paraboliczne (2S2P1D) [10]. Jest to model, który bardzo precyzyjnie opisuje zjawisko relaksacji mma, jednak wymaga określenia siedmiu parametrów. Graficzny schemat omawianych modeli przedstawiono na rysunku 1. Zarówno model Burgersa i 2S2P1D można transformować z domeny czasu do domeny częstotliwości, korzystając z transformacji Fouriera [4], [11]. W związku z tym po niezbędnych przekształceniach funkcja relaksacji modelu Burgersa ma postać (1). Natomiast funkcja relaksacji modelu 2S2P1D ma postać (2).

Określenie parametrów analizowanych modeli wymaga zastosowania technik optymalizacyjnych mających na celu minimalizację różnic pomiędzy zmierzonymi wartościami modułu zespolonego sztywności a ich wartościami modelowymi. W związku z tym opracowano makroskrypt w programie MathCad [12] wykorzystując solver Quasi-Newtona. Jako miary jakości dopasowania wykorzystano błąd średniokwadratowy (RMSE) oraz wartość błędów standardowych estymacji (S_e). Rezultaty dopasowania parametrów przedstawiono w tabeli 1.

4. Rezultaty badań

Na podstawie przeprowadzonej aproksymacji parametrów modelu Burgersa oraz 2S2P1D dokonano ekstrapolacji wyników modułu zespolonego E^* poza zakres badanych częstotliwości. Celem tego działania jest obserwacja w jaki sposób będzie przebiegać modelowana funkcja relaksacji betonu asfaltowego AC11W w szerokim spektrum częstotliwości. Na rysunku 2 przedstawiono prognozę modułu sztywności w zakresie od 0,01 Hz do 20 Hz.

Porównując obydwa modele należy zwrócić uwagę, że model Burgersa nie jest w stanie poprawnie scharakteryzować zachowania betonu asfaltowego w zakresie częstotliwości poniżej 0,2 Hz przy czym pierwsze niezbieżności pojawiają się już przy częstotliwości około 2 Hz (rys. 2 oraz rys. 3a). W związku z tym model Burgersa w stosunku do modelu 2S2P1D niedoszacowuje sztywności betonu asfaltowego

w zakresie długiego czasu obciążenia. Jest to związane z dominacją tłumika elementu Maxwella (η_1), który sprawia, że wartości modułu sztywności dążą do zera. Taki stan rzeczy sugeruje istnienie pełzania i w konsekwencji dyssypację energii sprężystej. Należy pamiętać, że praca materiału w zakresie liniowej lepko-sprężystości nie zakłada dyssypacji energii.

Na podstawie rysunku 3a, po wykonaniu dekompozycji modułu zespolonego na jego część sprężystą (E') i lepka (E'') można stwierdzić, że w modelu Burgersa powyżej 10 Hz następuje gwałtowny spadek części lepkiej sugerując, że materiał osiągnął stan sprężysty. Poziom modułu sprężystości, określony przez model Burgersa, jest 4,6 (E_g/E_1) razy mniejszy niż w przypadku modelu 2S2P1D. Niestety należy dodać, że punktu widzenia rzeczywistej pracy nawierzchni taki poziom modułu dla wysokiej częstotliwości obciążenia (w modelu Burgersa) nie jest uzasadniony. Analizując rezultaty dopasowania na rysunku 3b należy zwrócić uwagę, że pomimo pewnych rozbieżności z modelem 2S2P1D model Burgersa może być wykorzystany w pewnych zastosowaniach inżynierskich. Jednak najwięcej rozbieżności modułu sztywności według modelu Burgersa z modelem 2S2P1D oraz rezultatami eksperymentu pojawia się w niskich wartościach pomiaru częstotliwości, czyli dla długich czasów obciążenia/wysoka temperatura. Ponadto dla

niskich temperatur model Burgersa osiąga w szybkim tempie poziom asymptoty modułu sztywności (moduł sztywności niezależny od czasu obciążenia) i jest on niższy niż wskazują na to dane eksperymentalne. W związku z tym model Burgersa nie powinien być stosowany do estymacji modułu sztywności mma w szerokim zakresie czasu i temperatury.

5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych analiz sformułowano następujące wnioski:

- Uogólniony model Huet-Sayegh (2S2P1D) znacznie lepiej odwzorowuje zjawisko relaksacji w betonie asfaltowym niż model Burgersa.
- Jakość dopasowania modelu 2S2P1D w ocenie błędu RMSE wynosi ok. 4% natomiast dla modelu Burgersa około 10%.
- Model Burgersa nie odzwierciedla precyzyjnie zachowania materiału w zakresie liniowej lepko-sprężystości.
- Model Burgersa pomimo swojej symplifikacji może być stosowany do prognozowania mieszanek mineralno-asfaltowych.
- Model Burgersa nie powinien być wykorzystywany w dla szerokiego zakresu czasu obciążenia szczególnie dla zakresu częstotliwości powyżej 20 Hz i poniżej 0,1 Hz.