dr n. tech. Andrzej Antoni CZAJKOWSKI[a,b], Ewa Teresa CZAJKOWSKA[b]

[a] Uniwersytet Szczeciński, Wydział Matematyczno-Fizyczny, Katedra Edukacji Informatycznej i Technicznej
University of Szczecin, Faculty of Mathematics and Physics, Department of Informatics & Technical Education

[b] Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Szczecinie, Edukacja Informatyczno-Techniczna
Higher School of Technology and Economics in Szczecin, Informatics and Technical Education

MODEL ANALITYCZNO-NUMERYCZNY PARAMETRÓW PRACY KORBOWODU I MECHANIZMU PRZEGUBOWEGO

Streszczenie

Wstęp i cele: W pracy przedstawiono dwa zagadnienia mechaniczne, a mianowicie analizę prędkości korbowodu oraz badanie prędkości wznoszenia się mechanizmu przegubowego. Głównym celem pracy jest opracowanie modelu analitycznego oraz numerycznego dla analizy prędkości korbowodu i przegubu.
Materiał i metody: Materiał stanowi model mechaniczny korbowodu i przegubu. W opracowaniu stosuje się metodę analityczną oraz numeryczną z zastosowaniem programu *Mathematica.*
Wyniki: Dla obu zagadnień opracowano modele analityczne z zastosowaniem rachunku różniczkowego. Opracowano algorytmy w programie *Mathematica* kreujące wykresy 2D i 3D ruchu punktu korbowodu po torze eliptycznym.
Wniosek: Pokazanie technicznego zastosowania pochodnej funkcji jednej zmiennej, a w szczególności wyznaczania ekstremum funkcji, w wybranych zagadnieniach mechaniki technicznej, sprzyja lepszemu zrozumieniu i stosowaniu podstawowych pojęć rachunku różniczkowego.

Słowa kluczowe: Rachunek różniczkowy i całkowy, zastosowania, mechanika techniczna, korbowód, mechanizm przegubowy.
(Otrzymano: 01.05.2014; Zrecenzowano: 15.05.2014; Zaakceptowano: 01.06.2014)

ANALYTICAL AND NUMERICAL MODEL OF WORK PARAMETERS OF CONNECTING-ROD AND BAR LINK-AGE MECHANISM

Abstract

Introduction and aims: *The paper presents two mechanical problems, namely the analysis of the velocity of the connecting-rod and the test velocity of bar link-age mechanism. The main aim of this work is to develop the analytical and numerical model for the analysis of the velocity of the connecting-rod and bar link-age.*
Material and methods: *Material is a mechanical model of a connecting-rod and bar link-age. The study used an analytical method and numerical by using Mathematica program.*
Results: *For both problems has been developed analytical models using differential calculus. Also have been written some algorithms in Mathematica program that creates 2D and 3D graphs of connecting-rod movement of the point on the elliptical path.*
Conclusion: *Showing technical application of a function of one variable, in particular case for determining extreme of function, in technical mechanics of selected problems, promotes better understanding and applying the fundamental concepts of calculus.*

Keywords: *Differential calculus, applications, technical mechanics, connecting-rod, bar link-age mechanism.*
(Received: 01.05.2014; Revised: 15.05.2014; Accepted: 01.06.2014)

1. Wstęp

We współczesnych naukach technicznych daje się zauważyć posługiwanie się metodami analitycznymi jak rachunkiem różniczkowym, ale i również metodami numerycznymi przy użyciu pakietów numerycznych takich jak *Mathematica*, *MathCAD*, *MS-Excel*, *Matlab*.

Z drugiej strony w nauczaniu szkolnym i wyższym mamy okazję poznać podstawy rachunku różniczkowego w postaci pojęć taki jak: granica ciągu, granica funkcji, pochodna funkcji jednej zmiennej oraz jej zastosowania geometryczne (styczna i normalna do wykresu funkcji, monotoniczność funkcji, ekstremum funkcji, punkt przegięcia wykresu funkcji a także kształt wykresu funkcji).

W rozważaniach skupimy się nad zastosowaniem pochodnej (pierwszego i drugiego rzędu) do analizy pewnych funkcji, które opisują konkretne zagadnienia w mechanice technicznej.

W tych wybranych zagadnieniach badamy ekstremum funkcji przy zastosowaniu rachunku różniczkowego. Przypomnimy pojęcie ciągu liczbowego, funkcji jednej zmiennej, ilorazu różnicowego funkcji, pochodnej pierwszego drugiego rzędu oraz warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum funkcji.

Definicja 1. *(Ciąg liczbowy)*

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych:

$$n \to a_n \tag{1}$$

i odznaczamy $\{a_n\}$, a jego wyraz ogólny przedstawiamy symbolem a_n [2], [4], [10].

Definicja 2. *(Pojęcie funkcji)*

Funkcją nazywamy odwzorowanie, w którym każdemu argumentowi x ze zbioru X jest przyporządkowany jeden i tylko jeden element y ze zbioru Y. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a zbiór Y – zbiorem wartości funkcji [8].

Definicja 3. *(Iloraz różnicowy)*

Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja $f=f(x)$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0,\varepsilon)$, gdzie $\varepsilon>0$. Ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx, gdzie $0<|\Delta x|<\varepsilon$, zmiennej niezależnej nazywamy liczbę [5], [8]-[10]:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Definicja 4. *(Pochodna obustronna właściwa funkcji w punkcie)*

Niech $x_0 \in R$ i niech funkcja $f=f(x)$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0,\varepsilon)$. Pochodną właściwą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą [5], [8]-[10]:

$$f'(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Definicja 5. *(Druga pochodna właściwa funkcji w punkcie)*

Niech $x_0 \in R$ i niech funkcja $f=f(x)$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0,\varepsilon)$. Druga pochodna właściwa funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest określona wzorem [8]-[10]:

$$f''(x_0) \equiv [f'(x_0)]'. \tag{4}$$

Twierdzenie 1. (*Pochodna funkcji na przedziale otwartym)* [6], [8]-[10]

Funkcja f ma pochodną w przedziale (a,b), jeżeli ma pochodną w każdym punkcie tego przedziału.

Twierdzenia 2-6. *(O arytmetyce pochodnych funkcji)*

Jeżeli funkcje f =f(x) i g=g(x) mają pochodne właściwe w przedziale (a,b), to [8]

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x), \tag{5}$$

$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x), \tag{6}$$

$$[k\cdot f(x)]' = k\cdot f'(x), \tag{7}$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x), \tag{8}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \quad g(x)\neq 0. \tag{9}$$

Twierdzenie 7. *(Warunki wystarczające monotoniczności funkcji)*

Niech A oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x\in A$ funkcja f spełnia warunek [8]:

$f'(x) = 0$ to jest stała na A, (10)

$f'(x) > 0$ to jest rosnąca na A, (11)

$f'(x) < 0$ to jest malejąca na A. (12)

Definicja 6. *(Minimum lokalne właściwe funkcji)*

Funkcja *f* ma w punkcie $x_0\in A$ minimum lokalne właściwe, jeżeli [8]-[10]

$$\bigvee_{\varepsilon>0}\ \bigwedge_{x\in S(x_0,\varepsilon)} f(x) > f(x_0)\,. \tag{13}$$

Definicja 7. *(Maksimum lokalne właściwe funkcji)*

Funkcja *f* ma w punkcie $x_0\in A$ maksimum lokalne właściwe, jeżeli [8]-[10]

$$\bigvee_{\varepsilon>0}\ \bigwedge_{x\in S(x_0,\varepsilon)} f(x) < f(x_0)\,. \tag{14}$$

Twierdzenie 8. *(Warunek konieczny istnienia ekstremum) (WKIE)*

Jeżeli funkcja f ma [6], [8]-[10]:

ekstremum lokalne w punkcie x_0, (15)

pochodną $f'(x_0)$, to (16)

$f'(x_0) = 0$. (17)

Twierdzenie 9. *(O lokalizacji ekstremów funkcji)*

Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach, w których jej pochodna równa się zero albo w punktach, w których jej pochodna nie istnieje [8].

Twierdzenie 10. *(Pierwszy warunek konieczny istnienia maksimum) (1WDIE)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki [6], [8]-[10]:

$$f'(x_0) = 0, \tag{18}$$

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{dla} \quad x \in O(x_0^-, \varepsilon) \\ f'(x) < 0 & \text{dla} \quad x \in O(x_0^+, \varepsilon) \end{cases}, \tag{19}$$

to w punkcie x_0 istnieje maksimum lokalne właściwe. (20)

Twierdzenie 11. *(Pierwszy warunek konieczny istnienia minimum) (1WDIE)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki [6], [8]-[10]:

$$f'(x_0) = 0, \tag{21}$$

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{dla} \quad x \in O(x_0^-, \varepsilon) \\ f'(x) > 0 & \text{dla} \quad x \in O(x_0^+, \varepsilon) \end{cases}, \tag{22}$$

to w punkcie x_0 istnieje minimum lokalne właściwe. (23)

Twierdzenie 12. *(Drugi warunek konieczny istnienia maksimum) (2WDIE)*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki [6], [8]-[10]:

$$f'(x_0) = 0, \tag{24}$$

$$f''(x_0) < 0, \tag{25}$$

to w punkcie x_0 istnieje maksimum lokalne właściwe. (26)

Twierdzenie 13. *(Drugi warunek konieczny istnienia minimum) (2WDIE)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki [6], [8]-[10]:

$$f'(x_0) = 0, \tag{27}$$

$$f''(x_0) > 0, \tag{28}$$

to w punkcie x_0 istnieje minimum lokalne właściwe. (29)

Twierdzenie 14. *(O pochodnej funkcji złożonej)* Jeżeli [6], [8], [9]:

1. funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0
2. funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$, to

$$(f \circ g)'(x_0) \equiv g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{30}$$

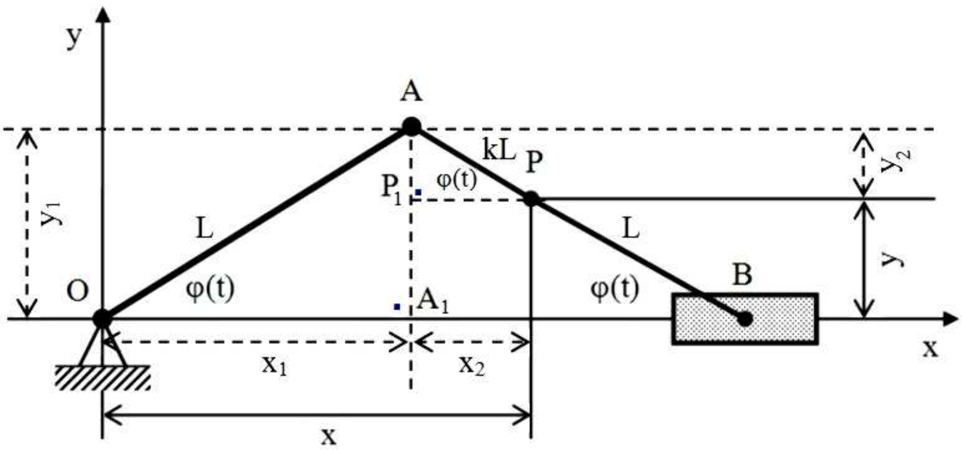
2. Analiza prędkości punktu korbowodu

2.1. Opis problemu

Układ mechaniczny składa się z dwóch prętów OA i AB o jednakowej długości L, połączonych przegubowo w punkcie A. Pręt OA może się obracać dookoła nieruchomego punktu O, natomiast punkt B porusza się po prostej poziomej (Rys. 1). Należy wyznaczyć równanie ruchu punktu P leżącego na pręcie AB odległego o kL od punktu A oraz jego prędkość jeśli pręt porusza się zgodnie z równaniem:

$$\varphi(t) = \omega t\,, \tag{31}$$

gdzie ω = const. oraz $k \in \langle 0,1 \rangle$ [11].



Rys. 1. Szkic układu mechanicznego przedstawiającego korbowód
Źródło: Opracowanie własne Autorów (MS-Word 2003)
Fig. 1. Sketch showing mechanical system of a connecting-rod
Source: Elaboration of the Authors (MS-Word 2003)

2.2. Model analityczny

• *Wyznaczenie równania ruchu punktu korbowodu*

Z trójkątów prostokątnych ΔOAA_1 i ΔPAP_1 mamy następujące zależności:

$$\frac{x_1}{L} = \cos[\varphi(t)]\,, \tag{32}$$

$$\frac{x_2}{kL} = \cos[\varphi(t)]\,, \tag{33}$$

$$\frac{y_1}{L} = \sin[\varphi(t)]\,, \tag{34}$$

$$\frac{y_2}{kL} = \sin[\varphi(t)]\,, \tag{35}$$

skąd

$$x_1 = L\cos[\varphi(t)]\,, \tag{36}$$

$$x_2 = kL\cos[\varphi(t)]\,, \tag{37}$$

$$y_1 = L\sin[\varphi(t)]\,, \tag{38}$$

$$y_2 = kL\sin[\varphi(t)]\,. \tag{39}$$

Ponieważ

$$x = x_1 + x_2 , \tag{40}$$

$$y = y_1 - y_2 , \tag{41}$$

to stosując zależności (36)-(39) we wzorach (40) i (41) otrzymujemy:

$$x = L\cos[\varphi(t)] + kL\cos[\varphi(t)] , \tag{42}$$

$$y = L\sin[\varphi(t)] - kL\sin[\varphi(t)] , \tag{43}$$

a po przekształceniach mają one następującą postać:

$$x = L(1+k)\cos[\varphi(t)] , \tag{44}$$

$$y = L(1-k)\sin[\varphi(t)] . \tag{45}$$

Ze związków (44) i (45) dalej otrzymujemy następujące zależności:

$$\cos[\varphi(t)] = \frac{x}{L(1+k)} , \tag{46}$$

$$\sin[\varphi(t)] = \frac{x}{L(1-k)} . \tag{47}$$

Ponieważ

$$\cos^2[\varphi(t)] + \sin^2[\varphi(t)] \equiv 1 , \tag{48}$$

to

$$\frac{x^2}{L^2(1+k)^2} + \frac{y^2}{L^2(1-k)^2} = 1 , \tag{49}$$

gdzie $a^2 = [L(1+k)]^2$, $b^2 = [L(1–k)]^2$.

♦ *Wniosek:* Punkt P porusza się po torze eliptycznym.

• *Wyznaczenie prędkości punktu korbowodu*

Pręt OA porusza się zgodnie z równaniem (31). Biorąc po uwagę związki (42) i (43) oraz (31) równania ruchu mają postać:

$$x = L(1+k)\cos(\omega t) , \tag{50}$$

$$y = L(1-k)\sin(\omega t) . \tag{51}$$

Prędkości punktu zależne od czasu t względem osi OX i OY zdefiniowane są wzorami:

$$v_x(t) \equiv \frac{dx}{dt} , \tag{52}$$

$$v_y(t) \equiv \frac{dy}{dt} . \tag{53}$$

Różniczkując funkcje opisane wzorami (50) i (51) otrzymujemy :

$$\frac{dx}{dt} = -L(1+k)\omega\sin(\omega t) , \tag{54}$$

$$\frac{dy}{dt} = L(1-k)\omega\cos(\omega t)\,. \tag{55}$$

Stąd odpowiednio porównując związki (52)-(33) i (54)-(55) dostajemy, że:

$$v_x(t) = -L(1+k)\omega\sin(\omega t)\,, \tag{56}$$

$$v_y(t) = L(1-k)\omega\cos(\omega t)\,. \tag{57}$$

Prędkość wypadkowa v punktu P korbowodu jest zdefiniowana wzorem:

$$v(t) \equiv \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}\,. \tag{58}$$

Zatem uwzględniając otrzymane związki (56) i (57) we wzorze (58) mamy:

$$v(t) = \sqrt{L^2(1+k)^2\omega^2\sin^2(\omega t) + L^2(1-k)^2\omega^2\cos^2(\omega t)}\,, \tag{60}$$

$$v(t) = L\omega\sqrt{(1+2k+k^2)\sin^2(\omega t) + (1-2k+k^2)\cos^2(\omega t)}\,, \tag{61}$$

co po odpowiednich przekształceniach daje związek:

$$v(t) = L\omega\sqrt{1+k^2 - 2k[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]}\,. \tag{62}$$

Teraz po wykorzystaniu tożsamości na kosinus kąta podwojonego:

$$\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \equiv \cos(2\omega t)\,, \tag{63}$$

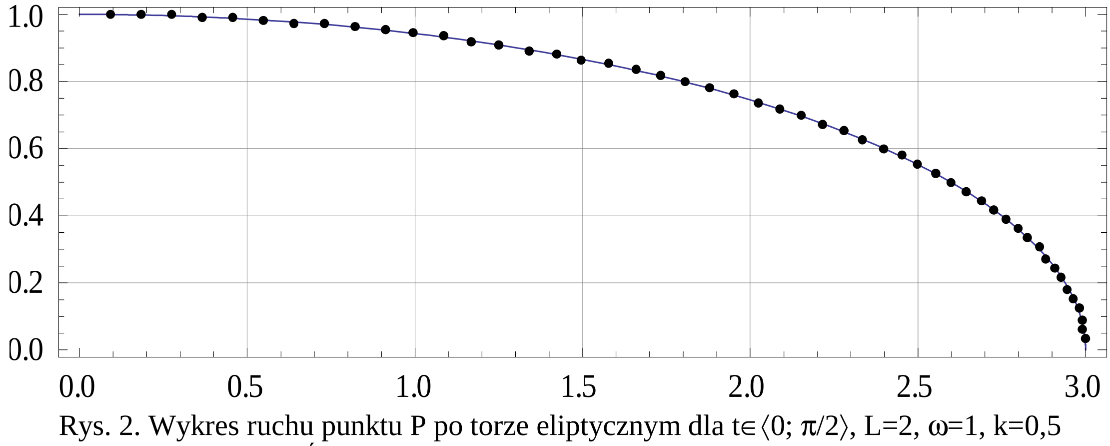
wzór na prędkość v(t) [m/s] punktu P korbowodu przyjmuje następującą ostateczną postać:

$$v(t) = L\omega\sqrt{1+k^2 - 2k\cos(2\omega t)}\,, \tag{64}$$

gdzie $t \in \langle 0, t_1 \rangle$, $t_1 \in R$ oraz $\omega = const$.

2.3. Model numeryczny

Obliczenia numeryczne zostały wykonane dla bezwymiarowego parametru k=0,5; parametru ω=1 [1/s] oraz dla długości pręta L=2m w przedziale czasu $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Poniżej zamieszczony program numeryczny, który kreuje wykres toru punktu P w kształcie elipsy, wykresy składowych prędkości v_x i v_y punktu P i wykres wypadkowej prędkości v punktu P [1], [7].

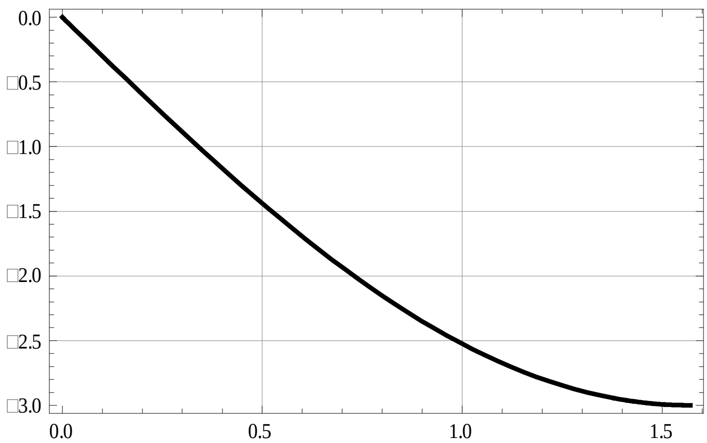


Rys. 2. Wykres ruchu punktu P po torze eliptycznym dla $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 7.0)
Fig. 2. Traffic chart of point P on elliptical path for $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 7.0)

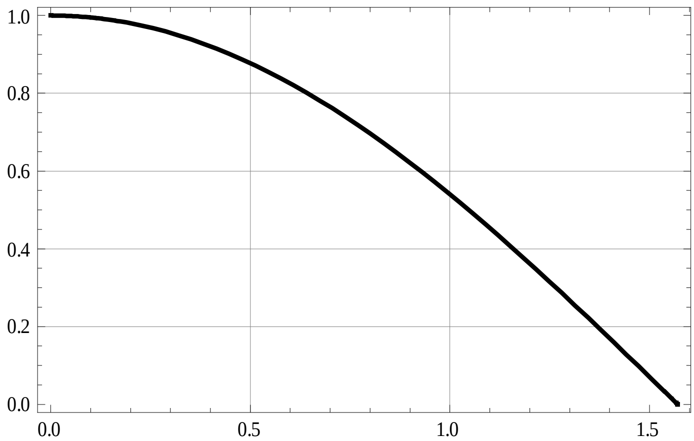
Program 1. Wykresy toru eliptycznego, po którym porusza się punkt
Program 1. Graphs of the elliptical path at which point moves

Program Mathematica 7.0	*Komentarz*
k:=0.5	*Parametr* $k \in \langle 0,1 \rangle$
L:=2	*Długość pręta L*
w:=1	*Parametr* ω
ParametricPlot[{L*(1+k)*Cos[w*t],L*(1-k)*Sin[w*t]},{t,0,Pi/2}, Frame→True,GridLines→Automatic, Mesh→True,MeshStyle→{Black}]	*Wykres toru eliptycznego po, którym porusza się punkt P (Rys. 2)*
Plot[(-1)*L*(1+k)*w*Sin[w*t],{t,0,Pi/2}, Frame→True,GridLines→Automatic, PlotStyle→{Thickness[0.007],Black}]	*Wykres składowej prędko-ści* $v_x=v_x(t)$ *punktu P, (Rys. 3)*
Plot[L*(1-k)*w*Cos[w*t],{t,0,Pi/2}, Frame→True,GridLines→Automatic, PlotStyle→{Thickness[0.007],Black}]	*Wykres składowej prędko-ści* $v_y = v_y(t)$ *punktu P,. (Rys. 4)*
Plot[L*w*Sqrt[1+k*k-2*k*Cos[2*w*t]],{t,0,Pi/2}, Frame→True,GridLines→Automatic, PlotStyle→{Thickness[0.007],Black}]	*Wykres składowej prędko-ści* $v = v(t)$ *punktu P, (Rys. 5)*
Plot3D[{L*(1+k)*Cos[w*t],L*(1-k)*Sin[w*t]},{t,0,Pi/2}, {k,0,0.4}, Frame→True, GridLines→Automatic, MeshStyle→{Black}, BoundaryStyle→{Black}] ParametricPlot[{L*(1+k)*Cos[w*t],L*(1-k)*Sin[w*t]},{t,0,Pi/2}, {k,0,0.6}, Frame→True, GridLines→Automatic, MeshStyle→{Black}, BoundaryStyle→{Black}]	*Wykresy funkcji składowej prędkości punktu P w zależności od czasu t oraz parametru k* $v = v(t, k)$, *(Rys. 6-7)*

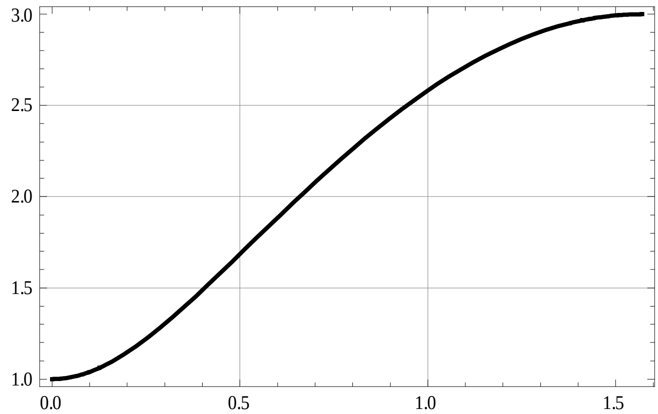
Źródło: Opracowanie własne Autorów na podstawie [1], [12], [13]
Source: Elaboration of the Authors based on [1], [12], [13]



Rys. 3. Wykres składowej prędkości $v_x=v_x(t)$ punktu P dla parametrów $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 7.0)
Fig. 3. Graph velocity component $v_x=v_x(t)$ of point P for parameters $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 7.0)



Rys. 4. Wykres składowej prędkości $v_y = v_y(t)$ punktu P dla parametrów $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 7.0)
Fig. 4. Graph velocity component $v_y = v_y(t)$ of point P for parameters $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 7.0)



Rys. 5. Wykres prędkości $v = v(t)$ punktu P dla parametrów $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 7.0)
Fig. 5. Graph of a velocity $v = v(t)$ of the point P for parameters $t \in \langle 0; \pi/2 \rangle$, L=2, ω=1, k=0,5
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 7.0)

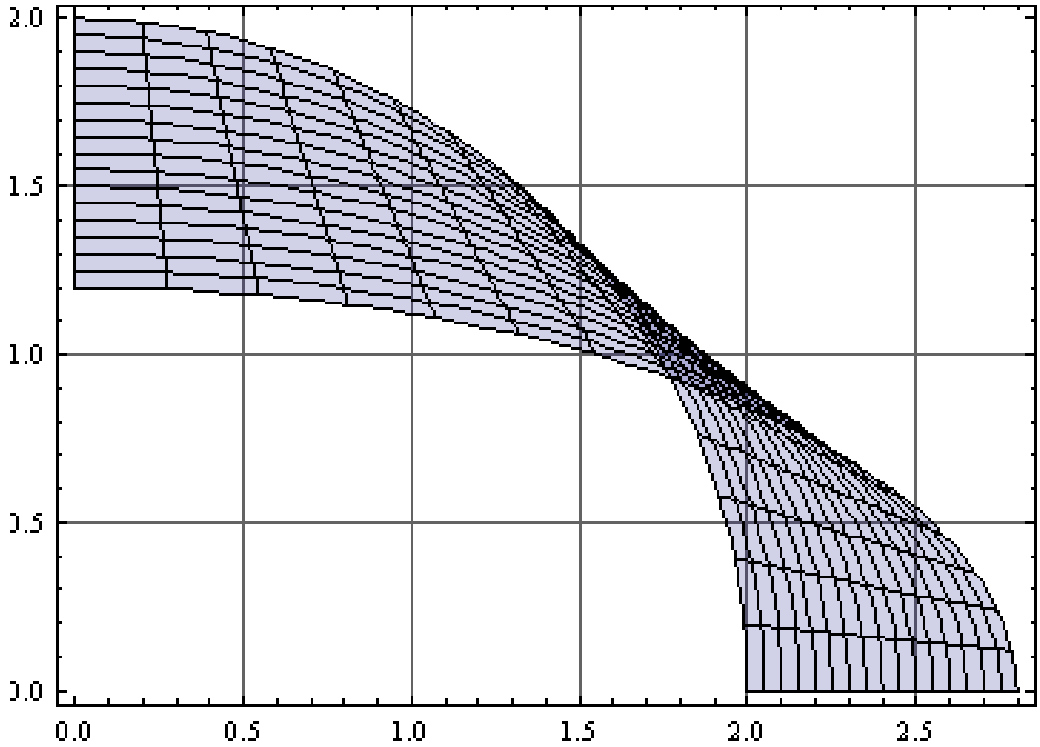
Kształt wykresu prędkości punktu P korbowodu zależy od czasu t i od zmian parametru k, wpływającego na położenie punktu P na ramieniu AB korbowodu (Rys. 6 i Rys. 7).

Symulację przestrzenną i warstwicową ruchu punktu P realizuje program 2.

Program 2. Symulacja przestrzenna i warstwicowa ruchu punktu P [1], [12], [13]
Program 2. Simulation of the space and contour plots of point P motion [1], 12], [13]

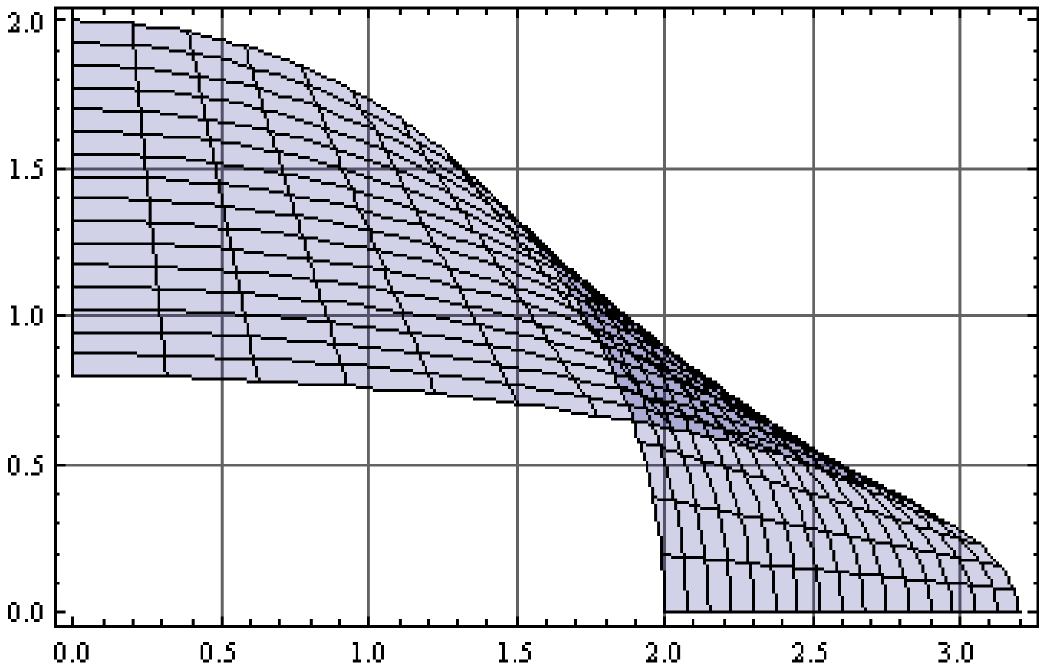
Program Mathematica 4.1	*Komentarz:*
`L:=2 w:=1 Plot3D[ L*w*Sqrt[1+k*k-2*k*Cos[2*w*t]], {t,0,Pi/2},{k,0,1},ColorFunction→Hue]`	*Wykres przestrzenny prędkości v=v(t,k) punktu P dla k ∈⟨0,1⟩, t∈⟨0,π/2⟩, L=2, ω=1 (Rys. 8)*
`L:=2 w:=1 ContourPlot[ L*w*Sqrt[1+k*k-2*k*Cos[2*w*t]], {t,0,Pi/2},{k,0,1},ColorFunction→Hue]`	*Wykres warstwicowy prędkości v=v(t,k) punktu P k ∈⟨0,1⟩, t∈⟨0,π/2⟩, L=2, ω=1 (Rys. 9)*

Źródło: Opracowanie własne Autorów na podstawie [1], [12], [13]
Source: Elaboration of the Authors based on [1], [12], [13]



Rys. 6. Wykres prędkości v(t,k) punktu P dla t∈⟨0; π/2⟩, L=2, ω=1, k∈⟨0; 1⟩
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 7.0)

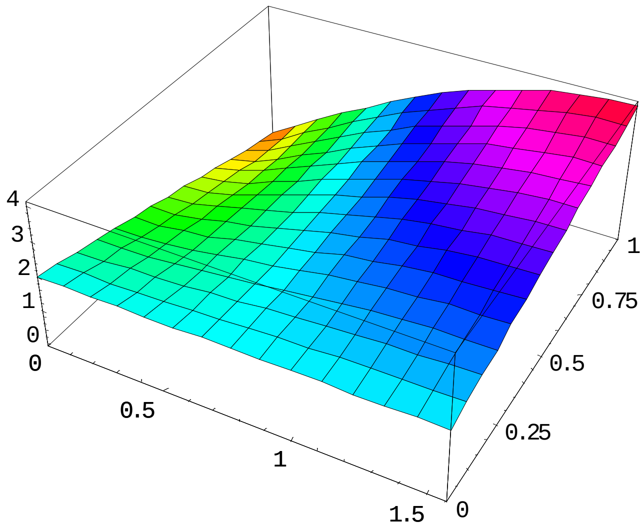
Fig. 6. Graph of a velocity v(t,k) of the point P for t∈⟨0; π/2⟩, L=2, ω=1, k∈⟨0; 1⟩
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 7.0)



Rys. 7. Wykres prędkości v(t,k) punktu P dla t∈⟨0; π/2⟩, L = 2, ω = 1, k = 0,5
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 7.0)

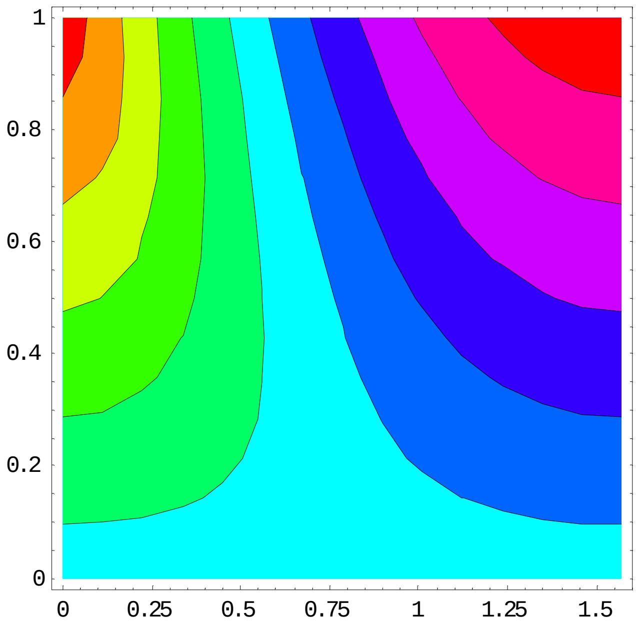
Fig. 7. Graph of a velocity v(t,k) of the point P for t∈⟨0; π/2⟩, L = 2, ω = 1, k = 0,5
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 7.0)

♦ *Wniosek:* Wzrost parametru k∈⟨0,1⟩ związany jest ze spłaszczeniem trajektorii punktu P.



Rys. 8. Wykres Plot3D prędkości v=v(t,k) punktu P dla t∈⟨0; π/2⟩ = ⟨0; 1,57⟩ i k∈⟨0,1⟩, L=2, ω=1
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 4.1)

Fig. 8. Plot3D graph of velocity v=v(t,k) of point P for t∈⟨0; π/2⟩=⟨0; 1,57⟩ and k∈⟨0,1⟩, L=2, ω=1
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 4.1)



Rys. 9. Wykres ContourPlot prędkości v=v(t,k) punktu P dla t∈⟨0; π/2⟩ = ⟨0; 1,57⟩ i k∈⟨0,1⟩, L=2, ω=1
Źródło: Opracowanie własne (Mathematica 4.1)

Fig. 9. ContourPlot graph of velocity v=v(t,k) of point P for t∈⟨0; π/2⟩=⟨0; 1,57⟩ and k∈⟨0,1⟩, L=2, ω=1
Source: Elaboration of the Authors (Mathematica 4.1)

♦ *Wnioski:*

Z wykresu przestrzennego typu Plot3D można wnioskować, iż wraz ze wzrostem parametru bezwymiarowego parametru k od 0 do 1 i wzrostem czasu od 0 do 1,57 obserwuje się wzrost wartości prędkości punktu P, przy czym istotny wpływ na charakter wzrostu wartości prędkości mają tu zmiany parametru k.

Z wykresu warstwicowego typu ContourPlot można wnioskować, iż wraz ze wzrostem parametru bezwymiarowego parametru k od 0 do 1 i wzrostem czasu od 0 do 1,57 obserwuje się wzrost wartości prędkości punktu P, po trajektorii o kształcie elipsy.

3. Badanie prędkości wznoszenia się mechanizmu przegubowego

3.1. Opis problemu

Mechanizm przegubowy ABCDE, gdzie BC = CD = a [m], ustawiony w płaszczyźnie pionowej, porusza się w taki sposób, że przeguby B i D poruszają się w linii poziomej w kierunku środka O, na którym wznosi się przegub C (Rys. 10). Kąt nachylenia

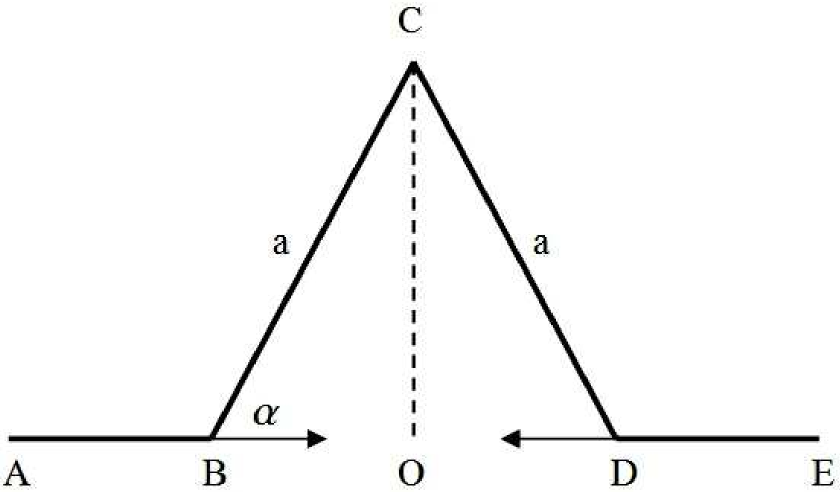
$$\alpha = \alpha(t). \tag{65}$$

pręta BC do linii poziomej DB rośnie ze stałą prędkością

$$\frac{d\alpha}{dt} = k\,[\mathrm{rad}]. \tag{66}$$

W przegubie C zawieszony jest pewien ciężar [7], [11]. Znaleźć prędkość $v(\alpha_0)$ wznoszenia się przegubu C i obliczyć ją dla chwili t_0, gdy

$$\alpha(t = t_0) = \alpha_0. \tag{67}$$



Rys. 10. Szkic układu mechanicznego typu mechanizm przegubowy
Źródło: Opracowanie własne (MS-Word 2003)

Fig. 10. Sketch of the mechanical system type bar link-age
Source: Elaboration of the Authors (MS-Word 2003)

3.2. Model analityczny

• *Wyznaczenie prędkości wznoszenia się przegubu*

Niech w danym momencie t wysokość punktu C wynosi y. Wtedy otrzymujemy zależność:

$$\frac{y}{a} = \sin(\alpha)\,, \tag{68}$$

a stąd

$$y = a\sin(\alpha)\,. \tag{69}$$

Zatem biorąc pod uwagę zależności (65) i (69) otrzymujemy funkcję złożoną postaci:

$$y(t) = a\sin[\alpha(t)]\,. \tag{70}$$

Prędkość v(t) wznoszenia się punktu C obliczymy ze wzoru:

$$v(t) \equiv \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}. \tag{71}$$

Jeśli we wzorze (71) uwzględnimy pochodną

$$\frac{dy}{d\alpha} = a \cos[\alpha(t)] \tag{72}$$

i założenie (66) to szukaną prędkość v(t) wyrazimy wzorem:

$$v(t) \equiv \frac{dy}{dt} = a \cdot k \cdot \cos[\alpha(t)]. \tag{73}$$

W szczególności uwzględniając założenie (67) we funkcji (73), to wzór określający prędkość $v(t_0)$ punktu C w chwili t_0 będzie miał ostateczną następującą postać:

$$v(\alpha_0) = a \cdot k \cdot \cos(\alpha_0). \tag{74}$$

♦ *Uwaga:* Prędkość wznoszenia się przegubu C maleje do zera przy α rośnie $\frac{\pi}{2}$, co zapisujemy następująco:

$$a \cdot k \cdot \cos[\alpha(t)] \to 0, \quad \text{gdy} \quad \alpha \to \frac{\pi}{2}. \tag{75}$$

3.3. Obliczenia numeryczne

W modelu numerycznym przyjmujemy następujące wielkości:

- przegub BC ≡ CD ma długość a = 3 [m],
- stała prędkość zmian kąta wynosi $k \equiv \frac{d\alpha}{dt} = 4{,}5\,[\text{rad}]$,
- wartość kąta α w chwili t_0 wynosi $\alpha(t = t_0) \equiv \alpha_0 = \frac{1}{3}\pi$.

W rezultacie obliczeń numerycznych mamy:

$$v\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot 4{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 13{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 6{,}75\left[\frac{m}{s}\right]. \tag{76}$$

♦ *Uwaga:*

Prędkość wznoszenia się przegubu C w pewnej chwili dla kąta $\frac{1}{3}\pi$ wynosi $6{,}75\left[\frac{m}{s}\right]$.

3. Wniosek

Pokazanie technicznego zastosowania pochodnej funkcji jednej zmiennej, a w szczególności wyznaczania ekstremum funkcji, w wybranych zagadnieniach mechaniki technicznej, sprzyja lepszemu zrozumieniu i stosowaniu podstawowych pojęć rachunku różniczkowego.

Literatura

[1] Abel M.L., Braselton J.P.: *Mathematica by example, Revised edition.* Georgia Southern University, Department of Mathematics and Computer Science, Statesboro, Georgia, AP Professional A Division of Harcourt Brace & Company, Boston San Diego New York London Sydney Tokyo Toronto 1993.

[2] Bronsztejn I.N., Siemiendiajew K.A., Musiol G., Mühlig H.: *Nowoczesne kompendium matematyki.* Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2004.

[3] Drwal G., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D.: *Mathematica 4.* Wyd. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2000.

[4] Dziubiński I., Siewierski L.: *Matematyka dla wyższych szkół technicznych, Tom 1.* PWN, Warszawa 1984, s. 60-204, w. II pop.

[5] Ginter N.M., Kuźmin R.O.: *Zbiór zadań z matematyki wyższej. Tom 1.* PNW, Warszawa 1957.

[6] Гусак А.А.: *Задачи и упражнения по высшей математике, Часть 1.* Издательство «Вышэйшая Школа», Миснк 1988, изд. вотрое, переработанное.

[7] Krysicki W., Włodarski L.: *Analiza matematyczna w zadaniach, Część I.* PWN, Warszawa 1994, s. 42.

[8] Leksiński W., Nabiałek I., Żakowski W.: *Matematyka. Definicje, twierdzenia, przykłady, zadania.* Podręczniki Akademickie Elektronika Informatyka telekomunikacja (EIT) WNT, Warszawa 1992, wyd. XIII pop, s. 83.

[9] Nikolsky S.M.: *A course of mathematical analysis, Vol. 1,* Mir Publishers, Moscow 1977.

[10] Pogorzelski W.: *Analiza matematyczna. Tom 1: Rachunek różniczkowy, ciągi i szeregi.* Spółdzielnia Wydawniczo-Oświatowa „Czytelnik”, Warszawa 1951, s. 135-138.

[11] Skalmierski B.: *Mechanika.* Biblioteka Naukowa Inżyniera. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1994, wyd. III poprawione i uzupełnione, s. 44.

[12] Trott M.: *The Mathematica for Graphics. Guide Book.* Springer Science + Business, Inc., 2004, USA.

[13] Wolfram S.: *The Mathematica Book, 4th edition,* Wolfram Media and Cambridge University Press, Champaign and Cambridge 1999.

[14] Зайцев И.Л.: *Элементы высшей математики дла техникумов.* Издательство «Наука», Москва 1965, изд. восьмое, стереотипное.