

Stanisław KRZYŻANIAK  
Instytut Logistyki i Magazynowania

## MODEL KOSZTÓW DLA ODNAWIANIA ZAPASÓW W SYSTEMIE sS

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono model służący obliczaniu kosztów związanych z odnawianiem i utrzymywaniem zapasu w systemie zamawiania sS. System ten (zwany także systemem MIN-MAX) opiera się na okresowym przeglądzie stanu zapasów, przy czym decyzja o złożeniu zamówienia zależy od tego, czy w chwili przeglądu dostępny zapas jest równy lub mniejszy od przyjętego poziomu decyzyjnego  $s$ . W takim przypadku składane jest zamówienie uzupełniające aktualny zapas do poziomu  $S$ . W przypadku przeciwnym (w chwili przeglądu zapas jest większy od poziomu  $s$ ), odstępuje się od składania zamówienia. Przedstawiono wyniki dalszych prac nad modelem matematycznym tego systemu (określającym relacje pomiędzy parametrami sterującymi a poziomem obsługi) oraz – opierając się na tym modelu – określono model kosztów obejmujących koszty uzupełniania, utrzymania oraz braku zapasu, z uwzględnieniem ewentualnych dodatkowych kosztów wynikających z istniejących uwarunkowań realizacji systemu. Wyniki uzyskane na podstawie modelu porównano z wynikami badań symulacyjnych.

## COSTS MODEL FOR INVENTORY REPLENISHMENT IN sS SYSTEM

**Summary.** This paper presents a model for calculating costs related to replenishment and maintenance in the inventory ordering system sS. This system (also known as a MIN-MAX system) is based on periodical review of stock, but the decision whether to order or not depends on whether at the time of the review the available stock level is equal or lower than the adopted decision level  $s$ . If this is the case, an order is made to replenish the current stock to level  $S$ . If the opposite is the case (at the time of the review the stock level is higher than  $s$ ), no order is made. The paper presents the results of more works on the mathematical model of this system (which specifies the relations between determining parameters and the service level) and – basing on this model – a cost model has been determined which includes the costs of replenishment, maintenance and a stock-out situation, taking into account possible additional costs arising from the existing conditions of the system implementation. The results obtained on the basis of this model were compared with the results of simulation research.

## 1. Wstęp

Model odnawiania zapasów sS (zwany często systemem MIN-MAX) opiera się na trzech parametrach sterujących<sup>1</sup>. Są to: długość cyklu przeglądu zapasu ( $T_0$ ), poziom decyzyjny s (MIN) oraz poziom maksymalny S (MAX). Kolejnym kluczowym parametrem jest czas cyklu uzupełnienia T, najczęściej ustalany przez dostawcę. Długość cyklu przeglądu zapasu  $T_0$  może być także narzucona przez dostawcę. Wynikająca z tego średnia wielkość dostawy często odbiega znacząco od ekonomicznej wielkości zamówienia. Inną przesłanką do zastosowania systemu sS mogą być ograniczenia wielkości dostawy: minimalne wielkości zamówienia narzucone przez dostawcę lub systemy opustów cenowych uzależnionych od wielkości zamówienia. Parametry systemu sS (czasem w literaturze określanego jako R,s,S, gdzie R określa ustalony cykl przeglądu<sup>2</sup>) mogą być optymalizowane na podstawie jego modeli, o różnym stopniu złożoności i różnych kryteriach optymalizacji<sup>3,4</sup>. Jednym z nich może być łączny koszt. Konieczne jest tu uwzględnienie wszystkich istotnych składowych: kosztu uzupełniania zapasu, kosztu utrzymania zapasu cyklicznego, kosztu utrzymania zapasu zabezpieczającego (w ogólnym przypadku – nieobrotowego), kosztów wynikających z wystąpienia braków w zapasie w cyklu uzupełnienia (przed nadejściem dostawy) oraz – odrębnie – kosztów związanych z brakiem każdej jednostki zapasu. Dla pełnego obrazu należy też uwzględnić koszty wynikające z istniejących ograniczeń realizacji systemu, np. koszt ponoszony w przypadku, gdy zamawiana wielkość jest mniejsza od ustalonej z dostawcą wielkości minimalnej.

Na rysunku 1 przedstawiono ogólne zasady realizacji systemu sS.

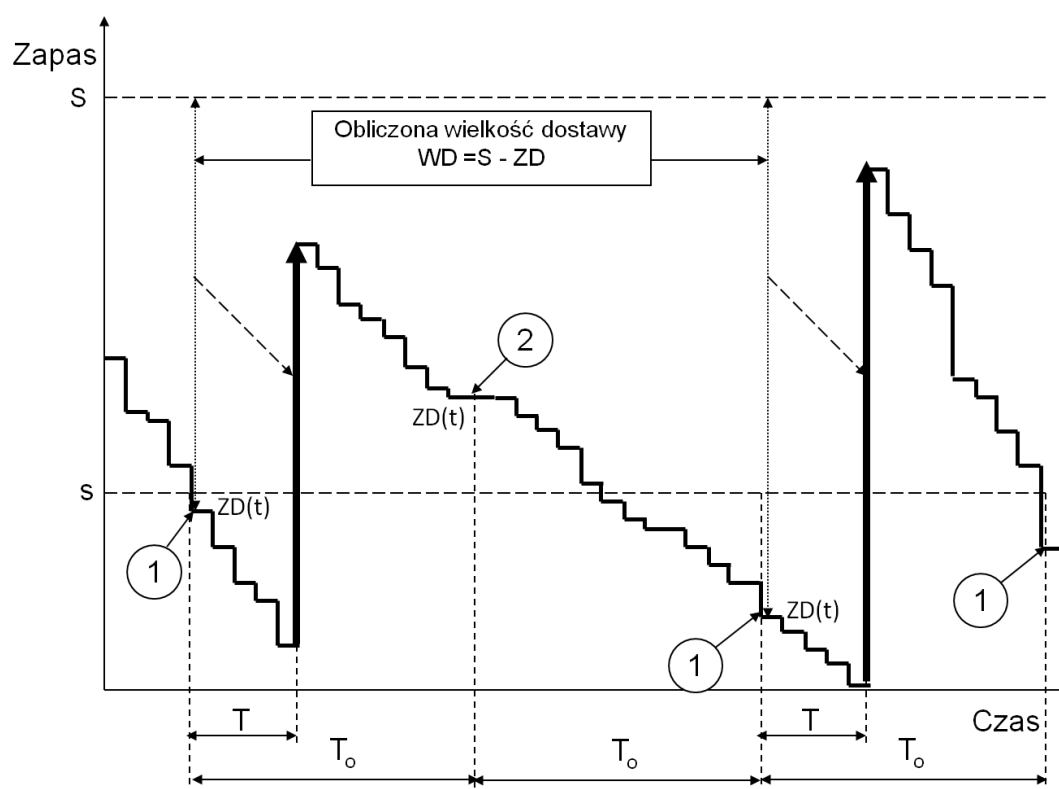
---

<sup>1</sup> Krzyżaniak S., Fechner I.: Określanie parametrów odnawiania zapasów w systemie sS – podejście modelowe. Zeszyty Naukowe, s. Organizacja i Zarządzanie, z. 63. Politechnika Śląska, Gliwice 2013, s. 127-142.

<sup>2</sup> np. Bijvank M., Vis I.F.A.: Lost-sales inventory systems with a service level criterion. "European Journal of Operational Research", No. 220, 2012, p. 610-618.

<sup>3</sup> Ibidem.

<sup>4</sup> Liu L., Yang T.: An (s, S) random life time inventory model with a positive lead time. "European Journal of Operational Research", No. 113, 1999, p. 52-63.



Rys. 1. Ilustracja zasad realizacji systemu sS: punkty (1) – złożenie zamówienia (zapasy dysponowane równe lub mniejsze od poziomu decyzyjnego s), punkt (2) – zamówienie nie zostaje złożone (zapasy większe od poziomu s)

Fig. 1. Principles of the sS system: points (1) – order placement (available stock at the moment of a review is equal or smaller than the decision level s), point (2) – order is not placed (available stock is greater than level s)

## 2. Model określania zależności poziomu obsługi jako funkcji parametrów systemu sS

W pracy Krzyżaniaka i Fechnera<sup>5</sup> przedstawiono model matematyczny systemu sS pozwalający na określenie wpływu parametrów ( $T_o$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $s$ ) na poziom obsługi, rozumiany jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu w cyklu uzupełniania zapasów (POP,  $\alpha$  Service Level)<sup>6</sup>, lub – po przekształceniach postaci modelu – poziomu obsługi, stanowiącego tzw. stopień ilościowej realizacji SIR (ang. fill rate). Model poziomu obsługi POP ma postać:

$$POP = (POP_{A1} \cdot p_{A1} + POP_{B1} \cdot p_{B1}) \cdot POP + (POP_{A2} \cdot p_{A2} + POP_{B2} \cdot p_{B2}) \cdot (1 - POP), \quad (1)$$

<sup>5</sup> Krzyżaniak S., Fechner I.: op.cit.

<sup>6</sup> Tempelmeier H.: Inventory service-levels in the customer supply chain. Springer Verlag, OR Spectrum, No. 22, 2000, p. 361-380.

gdzie:

- $p_A$  prawdopodobieństwo **złożenia** zamówienia w chwili przeglądu (przypadek A – zapas dysponowany ZD w chwili przeglądu jest równy lub niższy od przyjętego poziomu decyzyjnego  $s$ ), po cyklu w którym **nie wystąpił brak** –  $p_{A1}$  lub po cyklu, w którym **brak wystąpił** –  $p_{A2}$ ,
- $POP_{A1}$ ,  $POP_{A2}$  – poziomy obsługi POP odpowiednio dla przypadków A1 i A2,
- $p_B$  prawdopodobieństwo **niezłożenia** zamówienia w chwili przeglądu (przypadek B – zapas dysponowany ZD w chwili przeglądu jest większy od przyjętego poziomu decyzyjnego  $s$ ), po cyklu, w którym **nie wystąpił brak** –  $p_{B1}$  lub po cyklu, w którym **brak wystąpił** –  $p_{B2}$ ,
- $POP_{B1}$ ,  $POP_{B2}$  – poziomy obsługi POP odpowiednio dla przypadków B1 i B2.

Występujące we wzorze (1) wielkości oblicza się następująco:

$$POP_{B1} = \Phi(\omega_{B1}) = \Phi \left[ \frac{S - E[(P_{T_o} / (P_{T_o} < P \cdot T_o))] - P \cdot (T + T_o)}{\sqrt{\sigma_P^2 \cdot (T + T_o) + \sigma_{[(P_{T_o} / (P_{T_o} < P \cdot T_o))]}^2}} \right] \quad (2)$$

$$p_{B1} = \Phi \left( \frac{S - s - P \cdot T_o}{\sigma_P \cdot \sqrt{T_o}} \right) \quad (3)$$

$$POP_{A1} = \Phi(\omega_{A1}) = \Phi \left[ \frac{S - E[(P_{T_o} / (P_{T_o} \geq P \cdot T_o))] - P \cdot T}{\sqrt{\sigma_P^2 \cdot T + \sigma_{[(P_{T_o} / (P_{T_o} \geq P \cdot T_o))]}^2}} \right] \quad (4)$$

$$p_{A1} = 1 - p_{B1} \quad (5)$$

$$POP_{B2} = \Phi(\omega_{B2}) = \Phi \left[ \frac{S + E(nb') - E[(P_{T_o} / (P_{T_o} < P \cdot T_o))] - P \cdot (T + T_o)}{\sqrt{\sigma_P^2 \cdot (T + T_o) + \sigma_{[(P_{T_o} / (P_{T_o} < P \cdot T_o))]}^2}} \right] \quad (6)$$

$$p_{B2} = \Phi \left( \frac{S + E(nb') - s - P \cdot T_o}{\sigma_P \cdot \sqrt{T_o}} \right) \quad (7)$$

$$POP_{A2} = \Phi(\omega_{A2}) = \Phi \left[ \frac{S + E(nb') - E[(P_{T_o} / (P_{T_o} \geq P \cdot T_o))] - P \cdot T}{\sqrt{\sigma_P^2 \cdot T + \sigma_{[(P_{T_o} / (P_{T_o} \geq P \cdot T_o))]}^2}} \right] \quad (8)$$

$$p_{A2} = 1 - p_{B2} \quad (9)$$

Funkcja  $\Phi(\omega)$  jest dystrybuantą rozkładu częstości występowania obserwowanych wielkości popytu i w ogólnym przypadku jest równa:

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (10)$$

Przedstawione wzory  $POP_{A1}$ ,  $POP_{B1}$ ,  $POP_{A2}$ ,  $POP_{B2}$  różnią się nieco od podanych w publikacji [2]. Przeprowadzone dalsze prace analityczne i symulacyjne pokazały bowiem, że oczekiwaną wielkość popytu w cyklu obejmującym okres  $(2 \cdot T_o + T)$ , a więc w przypadku B, należy liczyć nie jako:

$$P_{2 \cdot T_o + T} = P \cdot (2 \cdot T_o + T),$$

ale ze wzoru:

$$P_{2 \cdot T_o + T} = E[P_{T_o} / (P_{T_o} < S - s)] + P \cdot (T + T_o), \quad (11)$$

gdzie  $E[P_{T_o} / (P_{T_o} < S - s)]$  jest oczekiwaną wielkością popytu w czasie pierwszego cyklu.

To pod warunkiem, że popyt był mniejszy od  $(S-s)$ , co jest warunkiem wystąpienia zdarzenia B:

$$E[P_{T_o} / (P_{T_o} < S - s)] = \frac{1}{p(P_{T_o} < S - s)} \cdot \int_0^{S-s} x \cdot f(x)_{T_o} dx, \quad (12)$$

przy czym:  $p(P_{T_o} < S - s) = \Phi\left(\frac{S-s-P \cdot T_o}{\sigma_P \cdot \sqrt{T_o}}\right) = p_{B1}$ ,

a  $f(x)_{T_o}$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa popytu w cyklu przeglądu  $T_o$ :

$$f(x)_{T_o} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_P \cdot \sqrt{T_o}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{x - P \cdot T_o}{\sigma_P \cdot \sqrt{T_o}} \right]^2}$$

Przyjmując oznaczenie  $E[P_{T_o} / (P_{T_o} < S - s)] = E_{(1)T_o}$  wariancję popytu w cyklu  $T_o$ , pod warunkiem, że  $(P_{T_o} < S - s)$ , można wyznaczyć ze wzoru:

$$(\sigma_{(1)T_o})^2 = \sigma_{[P_{T_o} / (P_{T_o} < S - s)]}^2 = \frac{1}{p_{B1}} \cdot \int_0^{S-s} (E_{(1)T_o} - x)^2 \cdot f(x)_{T_o} dx \quad (13)$$

Podobnie, oczekiwaną wielkość popytu w cyklu obejmującym okres  $(T_o + T)$ , a więc w przypadku A, należy liczyć nie jako:

$$P_{T_o + T} = P \cdot (T_o + T)$$

ale:

$$P_{T_0+T} = E[P_{T_0} / (P_{T_0} \geq S - s)] + P \cdot T, \quad (14)$$

gdzie  $E[P_{T_0} / (P_{T_0} \geq S - s)]$  jest oczekiwaną wielkością popytu w czasie pierwszego cyklu  $T_0$  pod warunkiem, że popyt był większy lub równy od  $(S-s)$ , co jest warunkiem wystąpienia zdarzenia A:

$$E[P_{T_0} / (P_{T_0} \geq S - s)] = \frac{1}{p(P_{T_0} \geq S - s)} \cdot \int_{S-s}^{+\infty} x \cdot f(x)_{T_0} dx, \quad (15)$$

przy czym

$$p(P_{T_0} \geq S - s) = 1 - p(P_{T_0} < S - s) = 1 - \Phi\left(\frac{S-s-P \cdot T_0}{\sigma_P \cdot \sqrt{T_0}}\right) = 1 - p_{B1} = p_{A1}.$$

Przyjmując oznaczenie  $E[P_{T_0} / (P_{T_0} \geq S - s)] = E_{(2)T_0}$ , wariancję popytu w cyklu  $T_0$ , pod warunkiem, że  $(P_{T_0} \geq S - s)$ , można wyznaczyć ze wzoru:

$$(\sigma'_{T_0})^2 = \sigma_{[P_{T_0} / (P_{T_0} < S - s)]}^2 = \frac{1}{p_{A1}} \cdot \int_{S-s}^{+\infty} (E'_{T_0} - x)^2 \cdot f(x)_{T_0} dx \quad (16)$$

Ocziwaną wielkość braku przypadającą na jeden cykl uzupełnienia –  $E(nb)$  – oblicza się – w ogólnym podejściu podobnie jak w modelu przedstawionym w pracy Krzyżaniaka i Fechnera<sup>7</sup>:

$$E(nb) = \{POP \cdot [E(nb_{A1}) \cdot p_{A1} + E(nb_{B1}) \cdot p_{B1}] + (1 - POP) \cdot [E(nb_{A2}) \cdot p_{A2} + E(nb_{B2}) \cdot p_{B2}]\} \cdot (1 - r) \quad (17)$$

a oczekiwaną wielkość braku w cyklach, w których brak wystąpił –  $E(nb')$

$$E(nb') = \frac{E(nb)}{(1 - POP)} \quad (18)$$

Dla poszczególnych wielkości składowych wzoru (17) wprowadzono korekty, wynikające z przedstawionych wyżej modyfikacji:

$$E(nb_{A1}) = I(\omega_{A1}) \cdot \sqrt{\sigma_P^2 \cdot T + \sigma_{[(P_{T_0} / (P_{T_0} \geq P \cdot T_0)]}^2} \quad (19)$$

- oczekiwana liczba braków w przypadku złożenia zamówienia (długotrwałość cyklu –  $T_0$ ), jeśli w poprzednim cyklu nie wystąpił brak w zapasie.

$$E(nb_{A2}) = I(\omega_{A2}) \cdot \sqrt{\sigma_P^2 \cdot T + \sigma_{[(P_{T_0} / (P_{T_0} \geq P \cdot T_0)]}^2} \quad (20)$$

<sup>7</sup> Krzyżaniak S., Fechner I.: op.cit.

- oczekiwana liczba braków w przypadku złożenia zamówienia (długość cyklu –  $T_o$ ), jeśli w poprzednim cyklu wystąpił brak w zapasie

$$E(n_{B1}) = I(\omega_{B1}) \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot (T + T_o) + \sigma_{[(P_{T_o} / (P_{T_o} < P \cdot T_o))]}^2} \quad (21)$$

- oczekiwana liczba braków w przypadku niezłożenia zamówienia (długość cyklu –  $2T_o$ ), jeśli w poprzednim cyklu nie wystąpił brak w zapasie

$$E(n_{B2}) = I(\omega_{B2}) \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot (T + T_o) + \sigma_{[(P_{T_o} / (P_{T_o} < P \cdot T_o))]}^2} \quad (22)$$

- oczekiwana liczba braków w przypadku niezłożenia zamówienia (długość cyklu –  $2T_o$ ), jeśli w poprzednim cyklu wystąpił brak w zapasie.

Natomiast  $r$  jest wskaźnikiem stopnia uwzględnienia odłożonego popytu:

$r = 0$  – popyt niezaspokojony jest całkowicie tracony,

$r = 1$  – popyt niezaspokojony jest całkowicie pokrywany w kolejnym cyklu.

Przedstawione wyżej modyfikacje pozwoliły na uzyskanie lepszego dopasowania wyników modelowych z wynikami badań symulacyjnych.

### 3. Model kosztów zapasu

Model kosztu zapasów obejmuje wszystkie kluczowe składniki kosztów zmiennych uzupełniania i utrzymania zapasu oraz kosztów braku zależnych od częstości występowania i/lub wielkości braku. Łączny koszt zapasu określono następująco:

$$\text{ŁKZ} = \text{ZKUzZC} + \text{ZKUtZC} + \text{ZKUtZB} + \text{KBZ}_a + \text{KBZ}_b + \text{KQ}_{\min} \quad , \quad (23)$$

gdzie:

ZKUzZC – zmienny koszt uzupełniania zapasu cyklicznego,

ZKUtZC – zmienny koszt utrzymania zapasu cyklicznego,

ZKUtZN – zmienny koszt utrzymania zapasu nieobrotowego,

KBZ<sub>a</sub> – koszt wynikający z zaistnienia zdarzenia „wystąpił brak zapasu w cyklu uzupełnienia”,

KBZ<sub>b</sub> – koszt wynikający z każdej jednostki brakującego zapasu,

KQ<sub>min</sub> – dodatkowy koszt związany z realizacją zamówienia mniejszego niż określona wielkość graniczna Q<sub>min</sub>.

Poszczególne składowe kosztu opisano następująco.

### 3.1. Zmienny koszt uzupełniania zapasu cyklicznego

Koszt ten oblicza się z następującej zależności:

$$ZKUzZC = ld^* \cdot k_{uz}, \quad (24)$$

gdzie:

$k_{uz}$  – koszt organizacji, realizacji i przyjęcia jednej dostawy

$ld^* = \frac{n_\tau}{T_o^*}$  – ( $n_\tau$  oznacza tu długotrwałość przyjętego okresu, wyrażona w jednostkach czasu),

$$T_o^* = T_o \cdot (1 + p_B),$$

$$p_B = p_{B1} \cdot POP + p_{B2} \cdot (1 - POP),$$

stąd:

$$ZKUzZC = \frac{n_\tau}{T_o \cdot [1 + p_{B1} \cdot POP + p_{B2} \cdot (1 - POP)]} \cdot k_{uz} \quad (25)$$

### 3.2. Zmienny koszt utrzymania zapasu cyklicznego

Koszt ten oblicza się następująco:

$$ZKUtZC = ZC^* \cdot k_{ut}, \quad (26)$$

gdzie:

$ZC^*$  – zapas cykliczny (stanowiący połowę średniej wielkości dostawy),

$k_{ut}$  – koszt utrzymania jednostki zapasu w okresie odpowiadającym  $n_\tau$  jednostkom czasu (wyłącznie koszty zależne od wielkości i wartości zapasu).

Zapasy cykliczny można obliczyć się z zależności:

$$ZC^* = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{P \cdot n_\tau}{ld^*} - E(nb) \cdot (1 - r) \right],$$

po przekształceniach:

$$ZC^* = 0,5 \cdot [P \cdot T_o^* - E(nb) \cdot (1 - r)] = 0,5 \cdot [P \cdot T_o \cdot (1 + p_B) - E(nb) \cdot (1 - r)], \quad (27)$$

a stąd:

$$ZKUtZC = \{0,5 \cdot [P \cdot T_o \cdot (1 + p_B) - E(nb) \cdot (1 - r)]\} \cdot k_{ut} \quad (28)$$



### 3.3. Zmienny koszt utrzymania zapasu nieobrotowego

Koszt ten oblicza się na podstawie wyznaczonej w ramach modelu wielkości zapasu nieobrotowego (równego lub większego od zapas zabezpieczającego, którego wielkość powinna wynikać z rzeczywistych potrzeb):

$$ZKU_{tZN} = ZN^* \cdot k_{ut} , \quad (29)$$

gdzie zapas nieobrotowy oblicza się jako wartość oczekiwaną:

$$ZN^* = POP \cdot (ZN_{A1} \cdot p_{A1} + ZN_{B1} \cdot p_{B1}) + (1 - POP) \cdot (ZN_{A2} \cdot p_{A2} + ZN_{B2} \cdot p_{B2}), \quad (30)$$

przy czym:

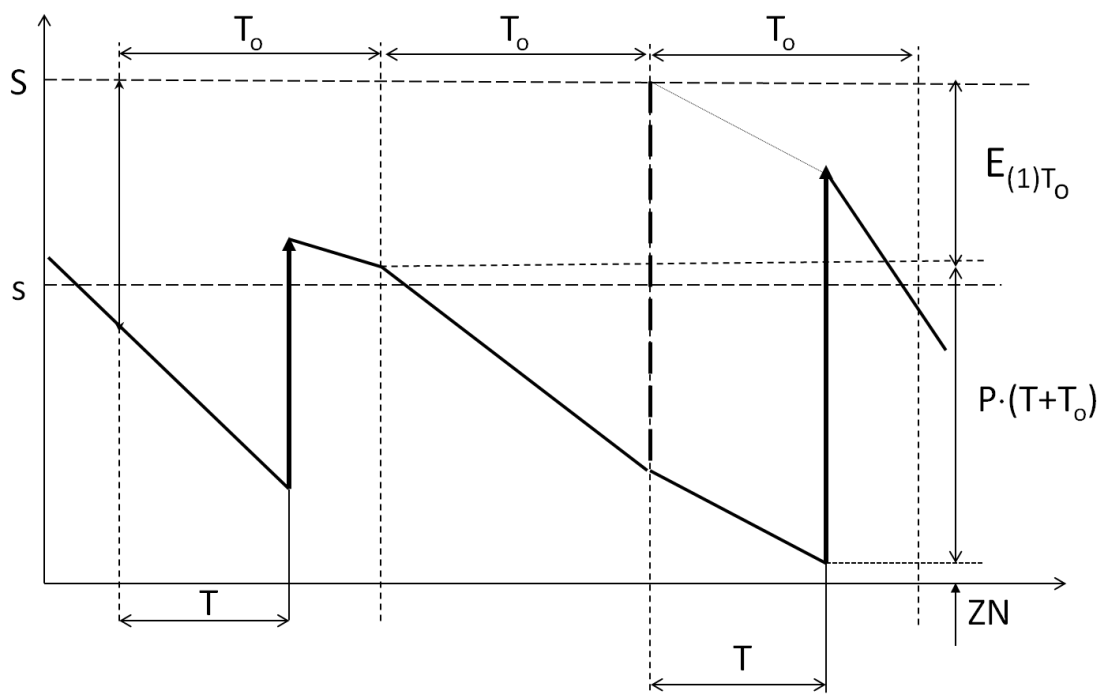
$$ZN_{A1} = S - E_{(2)T_o} - P \cdot T$$

$$ZN_{B1} = S - E_{(1)T_o} - P \cdot (T + T_o)$$

$$ZN_{A2} = S + E(nb') - E_{(2)T_o} - P \cdot T$$

$$ZN_{B2} = S + E(nb') - E_{(1)T_o} - P \cdot (T + T_o)$$

Na rysunku 2 zilustrowano – dla przykładu – zasadę obliczania składowej  $ZN_{B1}$ , a więc oczekiwanego poziomu zapasu nieobrotowego dla cyklu  $2T_o$  (z opuszczeniem jednego zamówienia), bez braków.



Rys. 2. Ilustracja zasady obliczania oczekiwanego poziomu zapasu nieobrotowego (w założeniu zabezpieczającego) dla przypadku B1

Fig. 2. Illustration of a principle of calculating a non-cycle stock (intended to be a safety stock) for a B1 instance

Na podstawie powyższych zależności zmienny koszt utrzymania zapasu nieobrotowego oblicza się z zależności:

$$ZKU_{tZN} = [POP \cdot (ZN_{A1} \cdot p_{A1} + ZN_{B1} \cdot p_{B1}) + (1 - POP) \cdot (ZN_{A2} \cdot p_{A2} + ZN_{B2} \cdot p_{B2})] \cdot k_{ut} \quad (31)$$

### 3.4. Koszt wynikający z zaistnienia zdarzenia „wystąpił brak zapasu w cyklu uzupełnienia”

Koszt ten oblicza się w jako iloczyn liczby dostaw w przyjętym okresie i wartości oczekiwanej kosztu przypadającej na jeden cykl (co zależy od wyznaczonego w modelu poziomu obsługi):

$$KBZ_a = ld^* \cdot kb_a \cdot (1 - POP), \quad (32)$$

gdzie  $kb_a$  to koszt związany z wystąpieniem braku zapasu w jednym cyklu.

### 3.5. Koszt wynikający z każdej jednostki brakującego zapasu

Koszt ten oblicza się w jako iloczyn liczby dostaw w przyjętym okresie, wyznaczonej w ramach modelu oczekiwanej liczby braków w jednym cyklu oraz kosztu braku jednej jednostki:

$$KBZ_b = ld^* \cdot E(nb) \cdot kb_b, \quad (33)$$

gdzie  $kb_b$  to koszt związany z wystąpieniem braku jednej jednostki zapasu.

### 3.6. Dodatkowy koszt związany z realizacją zamówienia mniejszego niż określona wielkość graniczna $Q_{min}$

Ogólna postać tej zależności:

$$KQ_{min} = f(S - s) \quad (34)$$

będzie uszczegółowiana w zależności od uzgodnień pomiędzy dostawcą a odbiorcą.

Na przykład:

a) Zamówienia mniejsze od pewnej granicznej wielkości wymagają poniesienia dodatkowych kosztów na rzecz dostawcy:

$$KQ_{min} = \begin{cases} 0 & \text{dla } WD \geq Q_{min} \\ kd & \text{dla } WD < Q_{min} \end{cases}$$

W takiej sytuacji poziom decyzyjny  $s$  należy przyjąć jako  $s = S - Q_{min}$ .

Wtedy:

$$KQ_{min} = \begin{cases} 0 & \text{dla } WD \geq S - s \\ kd & \text{dla } WD < S - s \end{cases}$$

Dodatkowe koszty związane z tym, czy wielkość zamówienia jest mniejsza czy też większa lub równa wielkości  $Q_{min}$  mogą być przeniesione na koszty uzupełniania lub utrzymania zapasu.

b) W przypadku gdy dostawca bierze na siebie koszty transportu dla wielkości dostawy większej od  $Q_{min}$  należy uwzględnić to w koszcie uzupełnienia zapasu przez uzależnienie:

$$k_{uz} = \begin{cases} k_{uz-1} & \text{dla } WD \geq S - s \\ k_{uz-1} & \text{dla } WD < S - s \end{cases}$$

c) W przypadku gdy cena zakupu jest zależna od wielkości zamówienia przenosi się to na koszt utrzymania jednostki w zapasie w rozpatrywanym okresie  $k_{ut}$ :

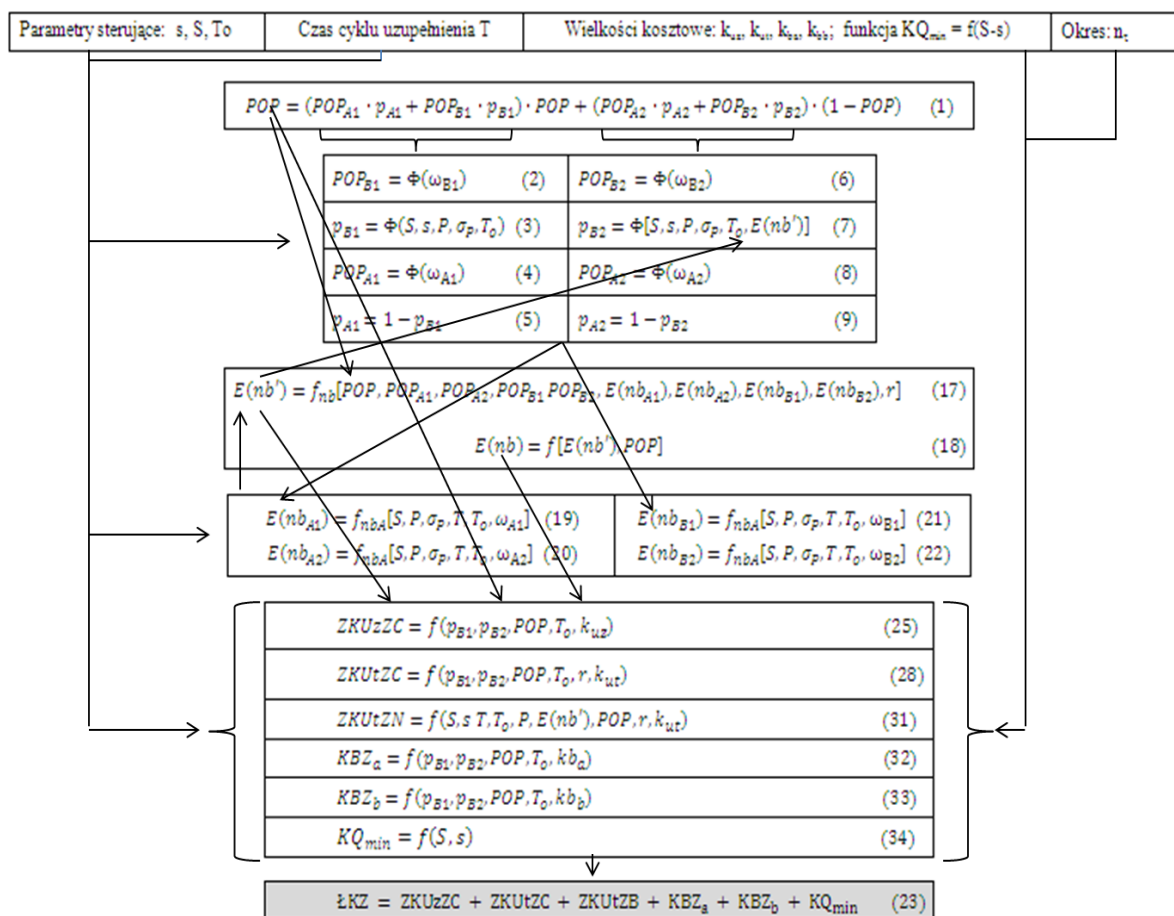
$$k_{ut} = \begin{cases} k_{ut-1} & \text{dla } WD \geq S - s \\ k_{ut-1} & \text{dla } WD < S - s \end{cases}$$

### 3.7. Model obliczania łącznego kosztu zapasów

Obliczenia łącznego kosztu zapasu zgodnie z formułą (23) zostały dołączone do modelu wyznaczania poziomu obsługi, przedstawionego w pracy Krzyżaniaka i Fechnera<sup>8</sup>. Współzależności pomiędzy formułami przedstawionymi wyżej zostały zilustrowane na rysunku 3. Model został zaimplementowany w postaci aplikacji na bazie arkusza kalkulacyjnego EXCEL z zastosowaniem makra wykonanego w Visual Basic for Applications, na podstawie którego dokonano przykładowych obliczeń. Modele wykorzystujące możliwości VBA są uważane za bardzo wygodne i skuteczne narzędzia optymalizacyjne<sup>9</sup>. Wyniki otrzymane przy zastosowaniu modelu zostały porównane z wynikami badań symulacyjnych.

<sup>8</sup> Ibidem.

<sup>9</sup> Bartolacci M.R., LeBlanc L.J., Kayikci Y., Grossman T.A.: Optimization Modeling for Logistics: Options and Implementations. "Journal of Business Logistics", No. 33(2), 2012, p. 118-127.



Rys. 3. Ilustracja współzależności równań i formuł wchodzących w skład modelu  
 Fig. 3. Illustration of interdependences of equations and formulas being part of the model

#### 4. Weryfikacja modelu kosztów

Do weryfikacji modelu zastosowano – podobnie jako to miało miejsce w przypadku badań, przedstawionych w pracy Krzyżaniaka i Fehnera<sup>10</sup> – autorską aplikację opracowaną w arkuszu kalkulacyjnym EXCEL do symulacji różnych systemów odnawiania zapasu, a następnie porównano koszty wyznaczone drogą symulacji z otrzymanymi przy zastosowaniu modelu.

Przyjęto następujące stałe wielkości:

Przyjęta jednostka czasu

$\tau$  – jeden tydzień.

Przyjęty okres

$n_\tau = 52$  (52 tygodnie = 1 rok).

Popyt tygodniowy

$P = 50,7$  jednostek.

<sup>10</sup> Krzyżaniak S., Fehner I.: op.cit.

Odchylenie standardowe popytu tygodniowego	$\sigma_P = 7,2$ jednostek.
Czas cyklu przeglądu	$T_0 = 4$ tygodnie.
Czas cyklu uzupełnienia	$T = 3$ tygodnie.
Jednostkowy koszt uzupełnienia zapasu	$k_{uz} = 500$ zł.
Roczny koszt utrzymania jednostki w zapasie	$k_{ut} = 50$ zł.
Koszt związany z wystąpieniem braku zapasu w jednym cyklu	$kb_a = 1000$ zł.
Koszt związany z wystąpieniem braku jednej jednostki zapasu	$kb_b = 10$ zł.
Pominięto funkcję dodatkowego kosztu $KQ_{min}$ .	

Jako wielkości zmienne przyjęto: poziom maksymalny  $S$  oraz poziom decyzyjny  $s$ . Rozpatrzono sześć poziomów różnic pomiędzy poziomami maksymalnym a decyzyjnym:  $S-s = 200, 225, 175, 250, 150$  (minimalna wielkość zamówienia  $\approx P \cdot T_0 \pm 12,5\%, \pm 25,0\%$ ) oraz  $S-s = 0$ . Poziomy  $S$  i  $s$  wyznaczano tak, aby uzyskać trzy przyjęte poziomy obsługi  $POP = 98\%, 95\%, 90\%$ .

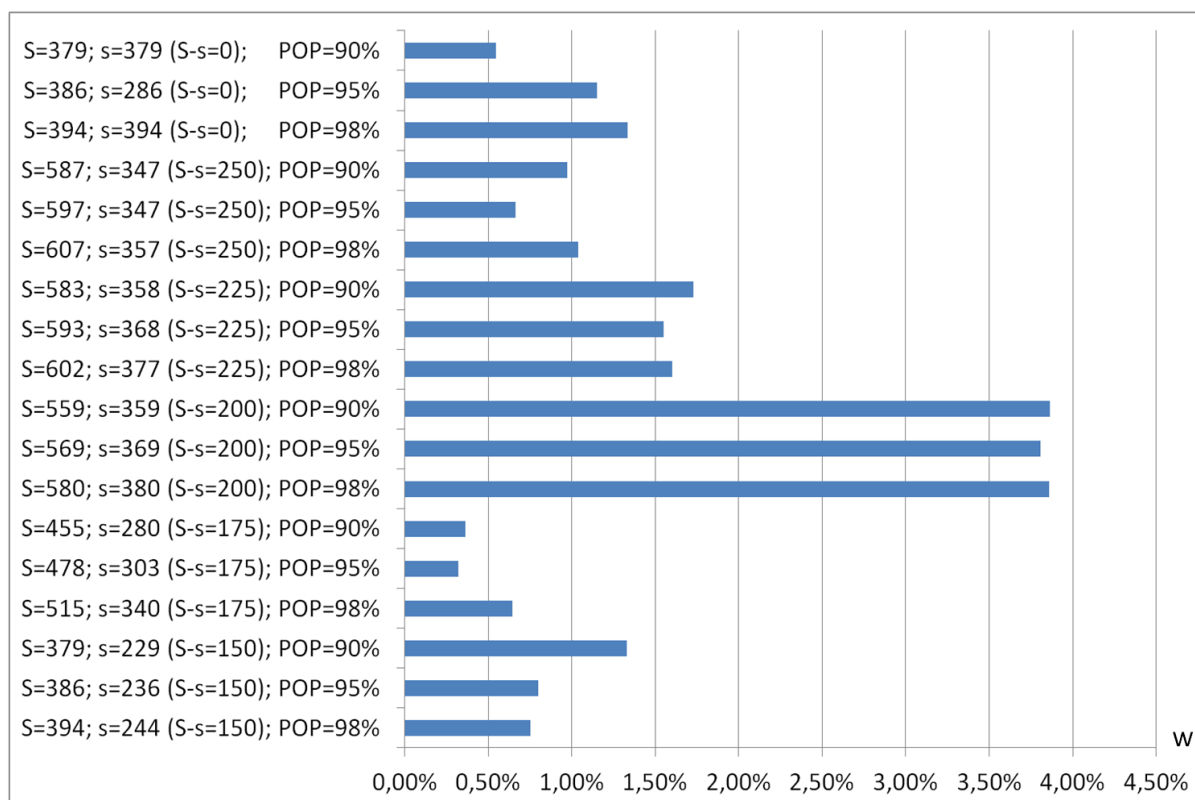
Dla zbadania zgodności stosowanego w badaniach symulacyjnych rozkładu generowanego popytu z rozkładem normalnym o założonych parametrach zastosowano test Kołomogorowa-Smirnowa<sup>11</sup>. Weryfikacji poddano dane pochodzące z generatora. Dla wybranej próby, obejmującej 78 okresów uzyskano zgodność z rozkładem normalnym na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ .

Na rysunku 4 pokazano względne odchylenia wyników obliczeń łącznego kosztu zapasów, uzyskanych przy zastosowaniu modelu od wyników otrzymanych drogą symulacji:

$$w_{m-s} = \frac{|\mathbb{E}KZ_{model} - \mathbb{E}KZ_{symulacja}|}{\mathbb{E}KZ_{symulacja}} \cdot 100\%$$

Należy zwrócić uwagę na znacząco wyższe wartości wskaźnika  $w_{m-s}$  dla  $S-s = 200$ , a więc dla sytuacji, w której prawdopodobieństwo niezłożenia zamówienia w chwili przeglądu jest zbliżone do 0,5. Analiza wyników wskazała, że dla tego przypadku, jakość dopasowania obliczeń zapasu nieobrotowego ZN jest gorsza niż w pozostałych przypadkach. Lepsze wyniki uzyskano dla innych alternatywnie rozpatrywanych modeli wyznaczenia ZN. Kwestia ta będzie przedmiotem dalszych badań.

<sup>11</sup> np. Benjamin J.R., Cornell C.A.: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. WNT, Warszawa 1977, s. 397-405.



Rys. 4. Względne odchylenia wyników obliczenia łącznego kosztu zapasów uzyskanych przy zastosowaniu modelu od wyników otrzymanych drogą symulacji

Fig. 4. Relative deviation of total inventory cost calculated by means of the model and achieved from simulation

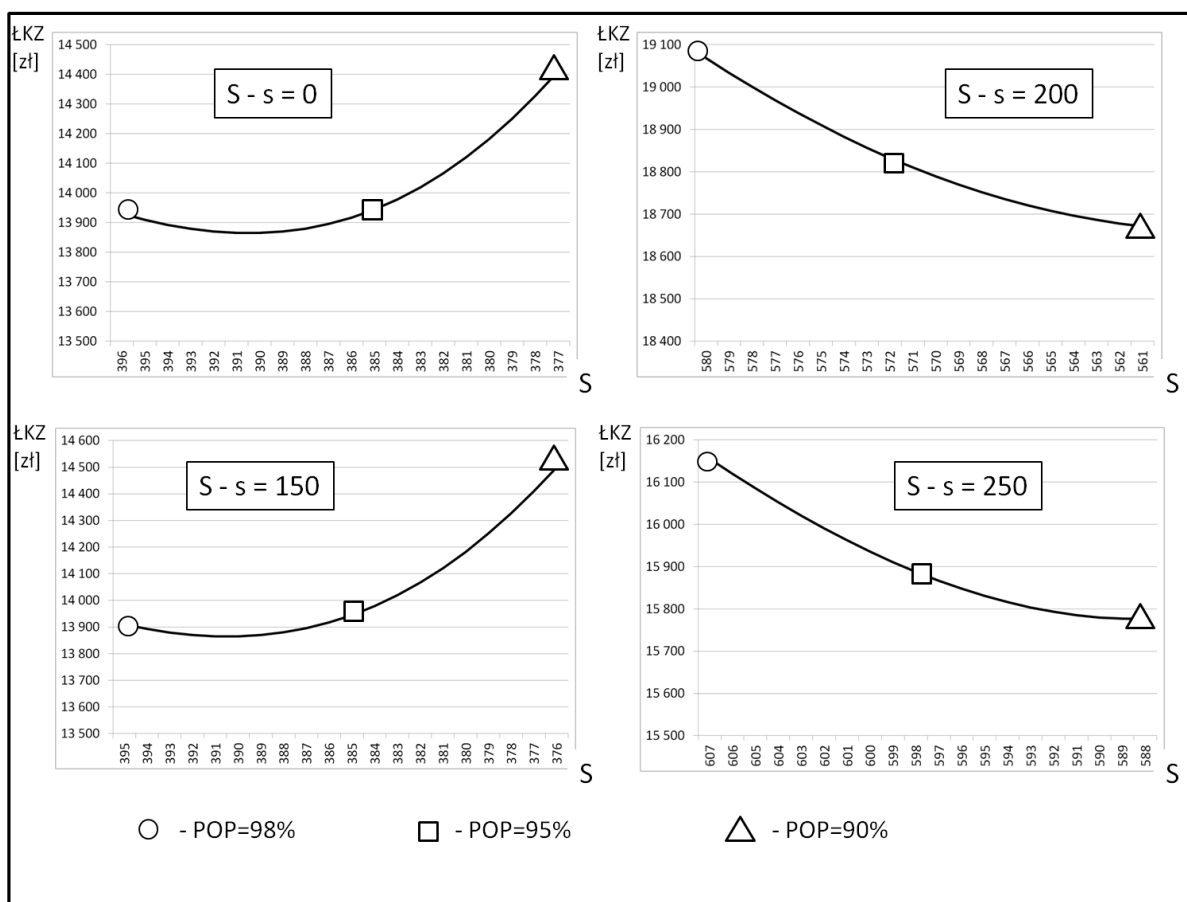
## 5. Przykład wykorzystania modelu

Na rysunku 5 przedstawiono przykładowe przebiegi zależności kosztów całkowitych ŁKZ, zgodnie z formułą (23). Przedstawiają one zmiany kosztów dla różnych wielkości różnicy S-s. Przypadek S-s = 0, traktowany tu jako referencyjny, oznacza klasyczny system oparty na przeglądzie okresowym (zamówienie jest składane w każdym cyklu, niezależnie od poziomu zapasu dostępnego w chwili przeglądu). Z kolei S-s = 200 oznacza, że – statystycznie – w połowie przeglądów zamówienie nie zostanie złożone ( $S-s \approx P \cdot T_0$ ).

Przedstawione wyniki należy traktować wyłącznie jako ilustrację wykorzystania modelu. Pokazane przebiegi nie odzwierciedlają bowiem ogólnych tendencji odpowiadających przyjętym parametrom S oraz s. Charakter tych przebiegów w dużym stopniu zależy od współczynników wpływających na poszczególne składowe koszty.

Biorąc pod uwagę fakt, że łączny koszt jest także obciążony skutkami występowania braku w zapasie, model może także służyć optymalizacji poziomu obsługi. Może też

wspomagać podejmowanie decyzji dotyczących przyjmowania lub odrzucania opustów cenowych, związanych w określonych wielkościach zamówień.



Rys. 5. Przykładowe wyniki obliczeń kosztów łącznych zapasów uzyskanych z modelu  
Fig. 5. Examples of the results of calculations of total inventory cost based on the model

## 6. Podsumowanie

Przedstawiony model łącznych kosztów związanych z uzupełnianiem, utrzymaniem i brakiem zapasu w przypadku odnawiania zapasu w systemie sS został oparty na opracowanym wcześniej<sup>12</sup> modelu pozwalającym na wyznaczanie poziomu obsługi w zależności od przyjętych wartości parametrów sterujących realizacją tego systemu. W wyniku przeprowadzonych prac analitycznych niektóre funkcje składowe przedstawionego wcześniej modelu zostały zmodyfikowane dla lepszego odwzorowania rzeczywistych zjawisk. Dla potrzeb obliczania poszczególnych składowych kosztów model uzupełniono

<sup>12</sup> Krzyżaniak S., Fechner I.: op.cit.

o formuły obliczające: liczbę dostaw w przyjętym okresie oraz przeciętne poziomy zapasu cyklicznego i nieobrotowego, jako składowych struktury zapasu całkowitego.

Weryfikacja modelu polegająca na porównywaniu wyników otrzymanych przy jego zastosowaniu z wynikami badań symulacyjnych pokazały bardzo wysoką zgodność w praktycznie stosowanych przedziałach poziomu obsługi. Dla pewnych kombinacji parametrów  $S$  oraz  $s$  zauważono większe odstępstwa, co wskazuje na potrzebę podjęcia dalszych prac zmierzających do doskonalenia modelu.

Przedstawiony model pozwala na prowadzenie różnego rodzaju analiz, mogących stanowić pomoc w podejmowaniu decyzji zarządczych.

## Bibliografia

1. Bartolacci M.R., LeBlanc L.J., Kayikci Y., Grossman T.A.: Optimization Modeling for Logistics: Options and Implementations. "Journal of Business Logistics", No. 33(2), 2012.
2. Benjamin J.R., Cornell C.A.: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. WNT, Warszawa 1977.
3. Bijvank M., Vis I.F.A.: Lost-sales inventory systems with a service level criterion. "European Journal of Operational Research", No. 220, 2012.
4. Krzyżaniak S., Fechner I.: Określanie parametrów odnawiania zapasów w systemie  $sS$  – podejście modelowe. Zeszyty Naukowe, s. Organizacja i Zarządzanie, z. 63. Politechnika Śląska, Gliwice 2013.
5. Liu L., Yang T.: An  $(s, S)$  random life time inventory model with a positive lead time. "European Journal of Operational Research", No. 113, 1999.
6. Sarjusz-Wolski Z.: Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie. PWE, Warszawa 2000.
7. Tempelmeier H.: Inventory service-levels in the customer supply chain; Springer Verlag, OR Spectrum, No. 22, 2000.
8. Terminology in Logistics. Terms and Definitions. European Logistics Association, 1994.

## Abstract

The article presents the stock cost model for the  $sS$  type inventory replenishing system which includes the costs of replenishment, maintenance (of the cyclical and non-rotating part), a stock-out situation and additional costs arising from the existing conditions of the system implementation. The  $sS$  system (also known as a MIN-MAX system) is based on



periodical review of the state of the inventory (in a specified review cycle  $T_0$ ), but a decision whether to order or not depends on whether at the moment of the review the available stock level is equal or lower than the adopted decision level  $s$ . If this is the case, an order replenishing the stock to  $S$  level is made. If the opposite is the case (at the moment of the review the stock level is higher than  $s$ ) no order is made. The determining parameters of this system are then the values of  $T_0$ ,  $S$  and  $s$ .

In this article, the basic tool for the determination of costs is a previously developed mathematical model of the  $sS$  system. The article presents modifications introduced into the system as a result of further research. The modification of the model concerns the method of calculating the demand expected in a cycle ( $2T_0 + T$ ), i.e. for a situation in which one ordering cycle is skipped. An element of this demand – the demand expected in cycle  $T_0$  preceding the review during which no order was made – is in the modified version calculated as a value expected under a condition that the demand level is lower than the  $S-s$  difference (a condition under which no order is made). In a similar way the calculation of the expected demand in a cycle was modified ( $T_0 + T$ ), for a situation in which an order is made after time  $T_0$ . An element of this demand – the expected demand in cycle  $T_0$  preceding the review during which an order was made – is in the modified version calculated as a value expected under the condition that demand is higher or equal the  $S-s$  difference (a condition to make an order). Similar modifications have been introduced in formulas to calculate the expected shortage level.

Basing on functions which are the elements of a model aimed at determining the expected service level, a model of inventory costs was built for the analysed system. The model takes into account significant components of the cost: the stock replenishment cost, the cyclic stock maintenance cost, the cost of maintaining safety stock (which is generally non-rotating), the costs resulting from shortage in stock in a replenishing cycle (before the supply arrives) and – separately – the costs related to the lack of each stock unit. Additionally, the model takes into account costs resulting from the existing limitations of the system implementation, e.g. the costs incurred when the ordered amount is smaller than the one agreed with the supplier of the minimum quantity.

The obtained results were compared with the results of simulation research conducted with the use of an inventory replenishment simulator using model demand distribution, consistent with the normal distribution of the assumed parameters.