

Wacław Szcześniak, Magdalena Ataman

Równania ruchu płyty obciążonej oscylatorem poruszającym się ze zmienną prędkością

JEL: R41 DOI: 10.24136/atest.2019.253

Data zgłoszenia: 28.01.2020 Data akceptacji: 10.02.2020

Przedmiotem artykułu jest płyta cienka Kirchhoffa poddana działaniu ruchomego obciążenia inercyjnego. Płyta obciążona jest punktem materialnym lub lepkosprężystym oscylatorem poruszającym się ze zmienną prędkością. W pracy podano i przeanalizowano równania ruchu rozważanych układów w postaci analitycznej. Rozważane są dwa przypadki równań ruchu. W pierwszym przypadku obciążenie znajduje się na płycie – drgania wymuszone, zaś w drugim obciążenie jest poza płytą – drgania swobodne. Ze względu na charakter obciążenia w równaniach ruchu występuje pochodna materialna Renaudota.

Słowa kluczowe: ruchomy punkt materialny, ruchomy oscylator, płyta Kirchhoffa.

Wstęp

Zadania dotyczące obciążeń ruchomych na belkach i płytach mają szerokie zastosowanie w budownictwie, a szczególnie przy projektowaniu konstrukcji drogowych, kolejowych, mostowych oraz lotniskowych. W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele prac poświęconych tematyce obciążeń ruchomych na belkach i płytach, np. [1-23]. Autorzy analizują zarówno ruchome obciążenia inercyjne, jak i obciążenia bezinercyjne. Prace te zawierają rozwiązania analityczne oraz rozwiązania z wykorzystaniem metod komputerowych. Obszerny przegląd literatury dotyczącej obciążeń ruchomych na belkach i płytach można znaleźć m.in. w pracach [1], [17-22].

W niniejszej pracy omówione zostaną zadania dotyczące płyty Kirchhoffa obciążonej punktem materialnym oraz oscylatorem w ruchu jednostajnie zmiennym. Przedstawione i przeanalizowane zostaną równania drgań układu płyta – ruchome obciążenie w przypadku drgań wymuszonych – obciążenie znajduje się na konstrukcji oraz w przypadku drgań swobodnych – po zjeździe obciążenia z płyty. Ze względu na inercyjny charakter obciążenia w rozważaniach będziemy brać pod uwagę pochodną materialną Renaudota.

1. Pochodne materialne w przypadku ruchomych obciążeń inercyjnych na płytach

W przypadku drgań płyty wymuszonych przejazdem obciążenia inercyjnego w równaniach ruchu układu płyta – punkt materialny lub płyta – oscylator należy uwzględnić pochodną materialną (Renaudota) [1]. Jeśli obciążenie porusza się z prędkością jednostajnie zmienną, równoległe do osi x :

$$\begin{aligned} v = v(t) &= \frac{dx}{dt}, \quad a = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ x = x(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad w = w(x, y, t), \\ dx &= v(t) dt, \quad dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx, \end{aligned} \quad (1)$$

to pierwszą i drugą pochodną materialną zapisujemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} \Big|_{x=\int_0^t v(\tau) d\tau} &= \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = v(t) = v_0 \pm a_0 t, \\ \frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{x=\int_0^t v(\tau) d\tau} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm a_0 \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

W przypadku, gdy obciążenie porusza się z prędkością jednostajnie zmienną po torze prostoliniowym, ale ukośnie w stosunku do krawędzi płyty prostokątnej, to wzory na pochodną materialną komplikują się. Jeśli parametryczne równania ruchu obciążenia po płycie są znane, to znane są również składowe wektorów prędkości i przyspieszenia:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \quad y = y(t), \\ v_x &= v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = v_y(t) = \frac{dy}{dt}, \\ v &= \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}, \\ a_x &= a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a &= \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Druga pochodna materialna jest wtedy dana wzorem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dt^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + 2v_y \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \\ &+ a_x \frac{\partial w}{\partial x} + a_y \frac{\partial w}{\partial y} + v_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2v_x v_y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Podane wzory na pochodną materialną wykorzystamy w rozważaniach w dalszej części artykułu.

2. Sformułowanie zadania

Drgania płyty Kirchhoffa na podłożu Winklera, z uwzględnieniem tłumienia zewnętrznego opisane są następującym równaniem ruchu

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w(x, y, t) + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + \\ + k w(x, y, t) = p(x, y, t), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

\bar{m} – masa płyty przypadająca na jednostkę jej powierzchni,

D – sztywność płyty na zginanie,

c – współczynnik tłumienia zewnętrznego,

k – współczynnik podłoża Winklera,

$p = p(x, y, t)$ – obciążenie płyty,

$w = w(x, y, t)$ – przemieszczenie pionowe (ugięcie) płyty.

Równanie drgań płyty (5) można wyprowadzić na przykład korzystając z wariacyjnej zasady Hamiltona [4] i [23], uzyskując kine-

matyczne i naturalne warunki brzegowe. W przypadku płyty prostokątnej o wymiarach w planie $a \times b$, mają one postać:

– w płycie zamocowanej

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ na krawędziach } x = 0 \text{ i } x = a,$$

oraz

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ na krawędziach } y = 0 \text{ i } y = b,$$

– w płycie przegubowo podpartej

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ na krawędziach } x = 0 \text{ i } x = a,$$

$$w = 0 \text{ na krawędziach } x = 0 \text{ i } x = a,$$

oraz

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ na krawędziach } y = 0 \text{ i } y = b,$$

$$w = 0 \text{ na krawędziach } y = 0 \text{ i } y = b,$$

– w płycie o brzegach swobodnych

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ na krawędziach } x = 0 \text{ i } x = a,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \text{ na krawędziach } x = 0$$

i $x = a$,

oraz

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ na krawędziach } y = 0 \text{ i } y = b,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \text{ na krawędziach } y = 0$$

i $y = b$.

W kolejnych punktach artykułu omówimy płytę prostokątną poddaną działaniu obciążenia inercyjnego, wykorzystując powyższe wzory.

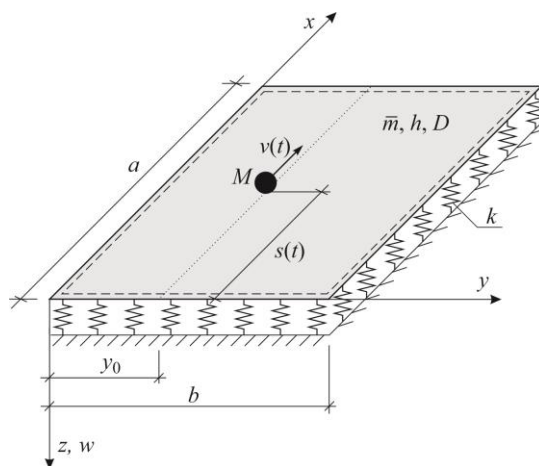
3. Płyta Kirchhoffa obciążona punktem materialnym poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym

Zanim przejdziemy do zadania płyty obciążonej oscylatorem rozważmy płytę obciążoną ruchomym punktem materialnym.

Rozważmy zatem sprężystą płytę Kirchhoffa spoczywającą na podłożu Winklera i dodatkowo przegubowo podpartą na obwodzie (rys. 1). Wymiary płyty w planie są $a \times b$, a jej grubość jest równa h . Moduł Younga materiału płyty wynosi E . Ponadto uwzględniamy tłumienie zewnętrzne według modelu reologicznego Kelvina-Voigta z siłą oporów ruchu $R = c \frac{dw}{dt}$.

Po konstrukcji, równoległe do osi x , porusza się punkt materialny. Jego prędkość jest zmienna i wynosi $v(t) = v_0 + a_0 t$. Pochodne materialne opisane są zatem wzorami (2).

Rozważać będziemy drgania płyty wymuszone ruchomym obciążeniem oraz drgania swobodne, gdy obciążenie znajduje się już poza konstrukcją. Każdy z tych przypadków opisany jest innym różniczkowym równaniem ruchu.



Rys. 1. Płyta cienka Kirchhoffa na podłożu Winklera obciążona punktem materialnym poruszającym się ze zmienną prędkością

3.1. Drgania wymuszone płyty Kirchhoffa obciążonej punktem materialnym w ruchu jednostajnie zmiennym

Drgania płyty Kirchhoffa na podłożu Winklera, z uwzględnieniem tłumienia, obciążonej punktem materialnym o masie M poruszającym się ze zmienną prędkością $v(t)$ (rys. 1) opisane są następującym równaniem ruchu

$$D \nabla^4 w(x, y, t) + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + k w(x, y, t) = M \left[g - \frac{d^2 w(x, y, t)}{dt^2} \right] \cdot \delta \left[x - \left(v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \right] \delta(y - y_0), \quad (9)$$

gdzie prawa strona równania jest naciskiem punktu materialnego poruszającego się w stałej odległości y_0 od osi x , a δ jest delta Diraca. Ze względu na inercyjny charakter obciążenia pochodna $\frac{d^2 w(x, y, t)}{dt^2}$ w równaniu (9) jest pochodną materialną, i przy

przyjętych założeniach, daną drugim ze wzorów (2).

Zadanie można rozwiązać stosując metodę rozdzielania zmiennych Fouriera. Drgania swobodne wyznaczamy w takim przypadku poszukując rozwiązania równania jednorodnego w postaci funkcji

$$w_o(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{m,n}(x, y) T_{m,n}(t). \quad (10)$$

Otrzymujemy stąd odpowiednio równania amplitud i ruchu

$$\begin{aligned} \nabla^4 W_{m,n}(x, y) - \lambda_{m,n}^4 W_{m,n}(x, y) &= 0, \\ \ddot{T}_{m,n}(t) + 2h \dot{T}_{m,n}(t) + \omega_{m,n}^2 T_{m,n}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: $\lambda_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ – wartości własne płyty,

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{1}{\bar{m}} (D \lambda_{m,n}^4 + k) - \text{częstości drgań płyty na podłożu}$$

Winklera,

$$2h = \frac{c}{\bar{m}} - \text{zastępczy współczynnik tłumienia.}$$

Po przyjęciu funkcji $W_{m,n}(x, y)$ w postaci spełniającej równanie amplitud i warunki brzegowe przegubowego podparcia na obwodzie

$$W_{m,n}(x, y) = C_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y \quad (12)$$

otrzymujemy rozwiązanie równań (11), a następnie całkę ogólną opisującą drgania swobodne płyty. W dalszej kolejności wyznaczamy całkę szczególną rozkładając obciążenie w podwójny szereg. Ostateczny kształt rozwiązania jest sumą drgań swobodnych i wymuszonych opisanych funkcją

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{m,n} \cos \tilde{\omega}_{m,n} t + B_{m,n} \sin \tilde{\omega}_{m,n} t + \frac{1}{\tilde{m} \tilde{\omega}_{m,n}} \int_0^t e^{h\tau} Q_{m,n}(\tau) \sin \tilde{\omega}_{m,n}(t-\tau) d\tau \right] \cdot e^{-ht} W_{m,n}(x, y). \quad (13)$$

We wzorze (13) $\tilde{\omega}_{m,n}$ jest częstością swobodnych drgań tłumionych

$$\tilde{\omega}_{m,n} = \sqrt{\omega_{m,n}^2 - h^2}. \quad (14)$$

Funkcja $Q_{m,n}(t)$ w przypadku analizowanego obciążenia jest skomplikowana i nie będziemy jej przytaczać. W przypadku, gdy obciążenie nie jest inercyjne (siła skupiona) i porusza się ze stałą prędkością funkcja $Q_{m,n}(t)$ ma prostszą postać

$$Q_{m,n}(t) = P \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \alpha_m vt \sin \alpha_n y_0. \quad (15)$$

Stałe całkowanie wyznaczamy z warunków początkowych zadania na ugięcie i prędkość ugięcia.

Ze względu na zmienne współczynniki w różniczkowych równaniach ruchu analizowanego układu i skomplikowaną postać $Q_{m,n}(t)$ funkcję dynamicznego ugięcia płyty otrzymujemy stosując całkowanie numeryczne.

Rozwiązanie równania ruchu jest ważne w przypadku, gdy ruchomy punkt materialny znajduje się na płycie. Od momentu zjazdu obciążenia z konstrukcji mamy do czynienia z drganiami swobodnymi.

3.2. Drgania swobodne płyty Kirchhoffa

Po zjeździe punktu materialnego z płyty zmienia się charakter drgań. Płyta wykonuje tłumione drgania swobodne opisane jednorodnym równaniem różniczkowym:

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \tilde{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + k w(x, y, t) = 0. \quad (16)$$

Równanie można rozwiązać, przyjmując funkcję ugięcia płyty w postaci podwójnego nieskończonego szeregu, analogicznego do zapisanego wzorem (10):

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{m,n}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{m,n}(t) W_{m,n}(x, y). \quad (17)$$

Prowadzi to do równania

$$\ddot{\bar{F}}_{m,n} + 2h\dot{\bar{F}}_{m,n} + \tilde{\omega}_{m,n}^2 \bar{F}_{m,n} = 0, \quad (18)$$

którego rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$\bar{F}_{m,n}(t) = e^{-ht} (\bar{A}_{m,n} \cos \tilde{\omega}_{m,n} t + \bar{B}_{m,n} \sin \tilde{\omega}_{m,n} t). \quad (19)$$

Ugięcie płyty po zjechaniu obciążenia wyraża się zatem wzorem

$$\bar{w}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ht} (\bar{A}_{m,n} \cos \tilde{\omega}_{m,n} t + \bar{B}_{m,n} \sin \tilde{\omega}_{m,n} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (20)$$

Dwie stałe $\bar{A}_{m,n}$ i $\bar{B}_{m,n}$ wyznaczamy z warunków początkowych drgań swobodnych, to znaczy w chwili t_k , gdy ruchomy punkt materialny zjeżdża z płyty:

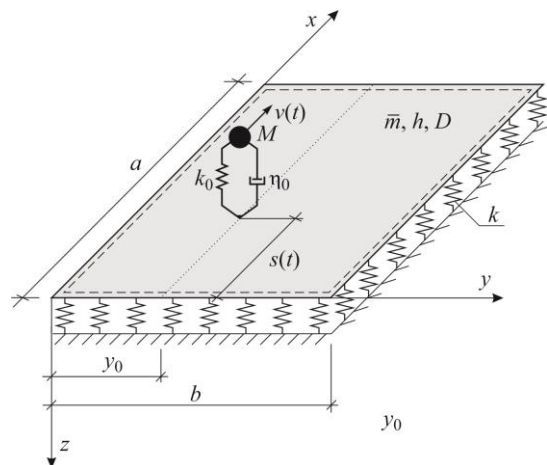
$$\begin{aligned} F(t) \Big|_{t=t_k} &= \bar{F}(t) \Big|_{t=t_k}, \\ \frac{dF(t)}{dt} \Big|_{t=t_k} &= \frac{d\bar{F}(t)}{dt} \Big|_{t=t_k}. \end{aligned} \quad (21)$$

4. Płyta Kirchhoffa obciążona oscylatorem jednomasowym poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym

Rozważamy sprężystą płytę Kirchhoffa spoczywającą na podłożu Winklera i dodatkowo przegubowo podpartą na obwodzie (rys. 2). Wymiary płyty w planie są $a \times b$, a jej grubość jest równa h . Moduł Younga materiału płyty wynosi E . Ponadto uwzględniamy tłumienie zewnętrzne według modelu reologicznego Kelvina-Voigta z siłą oporów ruchu $R = c \frac{dw}{dt}$.

Po konstrukcji, równoległe do osi x , porusza się oscylator jednomasowy. Jego prędkość jest zmienna i wynosi $v(t) = v_0 + a_0 t$. Pochodne materialne opisane są zatem wzorami (2).

Również i teraz rozważać będziemy drgania płyty wymuszone ruchomym obciążeniem oraz drgania swobodne płyty i oscylatora lepkosprężystego, gdy obciążenie znajduje się już poza konstrukcją. Każdy z tych przypadków opisany jest innymi różniczkowymi równaniami ruchu.



Rys. 2. Płyta cienka Kirchhoffa na podłożu Winklera obciążona lepkosprężystym oscylatorem jednomasowym poruszającym się ze zmienną prędkością

4.1. Drgania wymuszone płyty Kirchhoffa obciążonej lepkosprężystym oscylatorem jednomasowym w ruchu jednostajnie zmiennym

Drgania układu płyta – oscylator poruszający się ze zmienną prędkością $v(t)$ (rys. 2) opisane są następującymi równaniami ruchu

$$M \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \eta_0 \left(\frac{dw_0}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) + k_0 (w_0 - w) = 0, \quad (22)$$

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + k w(x, y, t) = p(x, y, t).$$

W równaniach (22) obciążenie dynamiczne płyty jest dane wzorem

$$p(x, y, t) = N(t) \delta \left[x - \left(v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \right] \delta(y - y_0) = \left[Mg - M \frac{d^2 w_0}{dt^2} \right] \delta \left[x - \left(v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \right] \delta(y - y_0). \quad (23)$$

Równania ruchu (22) obowiązują w przypadku, gdy oscylator znajduje się na płycie. Po zjeździe oscylatora z płyty mamy do czynienia z drganiami swobodnymi tłumionymi płyty i oscylatora. Oba równania ruchu są w tym przypadku jednorodnie.

4.2. Drgania swobodne płyty Kirchhoffa i oscylatora jednomasowego

Po zjeździe oscylatora z płyty zmienia się charakter drgań. Zarówno płyta, jak i oscylator wykonują tłumione drgania swobodne opisane układem jednorodnych równań różniczkowych:

$$M \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \eta_0 \frac{dw_0}{dt} + k_0 w_0 = 0$$

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + k w(x, y, t) = 0. \quad (24)$$

Po rozwiązaniu układu jednorodnych różniczkowych równań ruchu mamy cztery stałe całkowania. Wyznaczamy je z czterech warunków początkowych na ugięcie i pochodną ugięcia względem czasu płyty i oscylatora w chwili, w której oscylator zjeżdża z płyty.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono równania ruchu podstawowych modeli mających zastosowanie przy wstępnych analizach obiektów inżynierskich poddanych działaniu obciążeń ruchomych. We wszystkich omówionych zadaniach obciążenie jest masowe. Ze względu na inercyjny charakter obciążenia w rozważaniach należało uwzględnić pochodną materialną Renaudota. Ponieważ prędkość obciążenia jest zmienna w czasie rozwiązania zadań ulegają dodatkowej komplikacji, szczególnie jeśli w opisie wprowadzi się współrzędne bezwymiarowe. Równania ruchu rozważanych konstrukcji omówiono zarówno w przypadku obciążenia znajdującego się na płycie i poza płytą.

Bibliografia:

1. Szcześniak W., Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt, OWP, Warszawa 2000.
2. Fryba L., Vibration of solids and structures under moving loads. Thomas Telford, 1999.
3. Bajer C.I., Dyniewicz B., Numerical analysis of vibrations of structures under moving inertial load, Springer, Berlin 2012.
4. Ataman M., Drgania belek i płyt poprzecznie niejednorodnych na podłożach odkształcalnych wymuszone obciążeniami ruchomymi, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2010.
5. Ataman M., Analiza drgań nawierzchni i podtorza pod wpływem obciążeń ruchomych z dużymi prędkościami, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2019, ISBN 978-83-7814-905-7, 143 s.
6. Bogacz R., Nowakowski S., On the stability of a Timoshenko beam on an elastic foundation under a moving spring-mass system. Acta Mechanica, 61 1986 pp.117-127.
7. Bogacz R., Rozenbajgier Z., Stacjonarne drgania belki spoczywającej na półprzestrzeni lepko-sprężystej wywołane ruchomym obciążeniem, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Mechanika, z. 63, Warszawa 1979, str. 45-70.
8. Esen I., A new FEM procedure for transverse and longitudinal vibration analysis of thin rectangular plates subjected to a variable velocity moving load along an arbitrary trajectory, Latin American Journal of Solids and Structures, vol. 12, no. 4, Rio de Janeiro, August 2015, pp. 808-830, <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78251525>.
9. Gardzińska R., Analiza przemieszczeń płyty Kirchhoffa wywołanych złożonym obciążeniem inercyjnym w ruchu jednostajnie zmiennym, Ukrainian-Polish seminar "Theoretical Foundations In Civil Engineering", Dnepropetrovsk'95, Warszawa 1995, str.195-204.
10. Gulajev V.I., Melkin V.M., Yakovenko E.V.: The dynamics of a beam on an elastic base under a moving force and moment (Timoshenko Model), International Applied Mechanics, Vol.36, No 12, 2000, pp.1650-1656.
11. Kączkowski Z.: Vibration of a beam under a moving load. Proceedings of Vibration Problems, Vol. 4, no. 4, Warsaw 1963, pp. 357-373.
12. Szcześniak W., Gryglicki M., Drgania belki sprężystej modelowanej jednym stopniem swobody pod inercyjnym obciążeniem ruchomym oscylatorem o zmiennej prędkości, Polish-Ukrainian Transactions "Theoretical Foundations of Civil Engineering", Vol. 22, Warsaw 2014, pp. 1-17.
13. Szcześniak W., Wojtaszek P., Drgania płyty Kirchhoffa pod ruchomym, skupionym obciążeniem inercyjnym poruszającym się ruchem jednostajnie zmiennym, Polish-Ukrainian Transactions "Theoretical Foundations of Civil Engineering", Vol. 22, Warsaw 2014, pp. 117-122.
14. Śniady P., Dynamic response of a Timoshenko beam to a moving force. Journal of Applied Mechanics, 75(2), 024503-1,-024503-4, 2008.
15. Wiśniakowski P., Belka Timoshenki na podłożach sprężystych obciążona ruchomymi oscylatorami – równania zagadnienia. Theoretical Foundations of Civil Engineering – XII. Polish-Ukrainian Transactions, Vol. I, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007, pp. 451-460.
16. Wu Jong-Shyong, Lee Ming-Ling, Lai Tser-Shyong, The dynamic analysis of a flat plate under a moving load by finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 24, 1987, pp. 743 – 762, DOI: 10. 1002/nme.1620240407.
17. Beskou, N.D., Theodorakopoulos, D.D., Dynamic effects of moving loads on road pavements: a review, Soil Dynamics and Earthquake Engineering 31(4), 2011, pp. 547–567 <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2010.11.002>.
18. Kerr A.D., Continuously supported beams and plates subjected to moving loads – a survey, SM Archives, 6 (1981), pp. 401-449.
19. Laura, P. A. A., Maurizi, M. J., Rossi, R. E., A survey of studies dealing with Timoshenko beams, The Shock and Vibration Digest, 22(11), pp. 3-10, 1990, <https://doi.org/10.1177/058310249002201102>.
20. Szcześniak W., Inercyjne obciążenia na belkach i płytach. Przegląd podstawowych pozycji literatury, „Prace Naukowe Poli-

- techniki Warszawskiej, Budownictwo” 1990, z. 112, Warszawa, str. 7-75.
21. Szcześniak W., Problemy ruchomych obciążeń w Polsce. Przegląd podstawowych pozycji literatury, „Theoretical Foundations in Civil Engineering – Ukrainian-Polish Seminar”, Dnepropetrovsk 1993.
 22. Szcześniak W., Ataman M., Przegląd publikacji polskich autorów z zakresu obciążeń ruchomych na konstrukcjach inżynierskich, *Autobusy* 12/2018, str. 667-674, JEL: L91 DOI: 10.24136/atest.2018.475.
 23. Rao J.S., Dynamics of plates, Marcel Dekker Inc., New York 1999.

Equations of motion of plate loaded with an oscillator moving at a variable speed

The subject of the study is a Kirchhoff thin plate subjected to moving inertial load. The plate is loaded with a particle or viscoelastic oscillator moving at a variable speed. In the article the equations of motion of the considered systems in analytical form are presented and analysed. Two cases of equations of motion are considered. In the first case, the load is on the plate - forced vibrations, while in the second case the load is outside the plate - free vibrations. Due to the nature of the load, the Renaudot material derivative appears in the equations of motion of the analysed systems.

Keywords: moving particle, moving oscillator, Kirchhoff plate.

Autorzy:

prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury

dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej