

Marcin GRABA

## O WYZNACZANIU OBCIĄŻEŃ GRANICZNYCH PŁYT KWADRATOWYCH Z CENTRALNĄ SZCZELINĄ W DWUOSIOWYM ROZCIĄGANIU

### Streszczenie

W artykule przedstawiona została tematyka wyznaczania obciążeń granicznych dla kwadratowych płyt zawierających centralne pęknięcie, które poddane zostały dwuosiowemu rozciąganiu. W pracy przedstawiono krótką charakterystykę tematu obciążeń granicznych, aspekty modelowania numerycznego oraz wybrane wyniki obliczeń numerycznych. Dyskutowano wpływ długości pęknięcia, granic plastyczności oraz współczynnika dwuosiowości obciążenia, zdefiniowanego na potrzeby pracy. Podano również wybrane formuły aproksymacyjne.

### WSTĘP (na podstawie [1 – 13])

Analizę wytrzymałościową ciał sprężysto – plastycznych ze wzmocnieniem odkształceniowym, które zawierają pęknięcia, obecnie prowadzi się na ogół w oparciu o obliczenia numeryczne [1-10], które wydają się być jedynym racjonalnym rozwiązaniem, bowiem nie istnieje żadne dokładne i doskonałe rozwiązanie analityczne [11]. Owszem literatura podaje różne podejścia [1 – 9], jednakże rozwiązania te są rozwiązaniami przybliżonymi. Jak wiadomo obliczenia numeryczne wymagają jednak czasu, specjalistycznych programów oraz wysoko wykwalifikowanej kadry inżynierskiej.

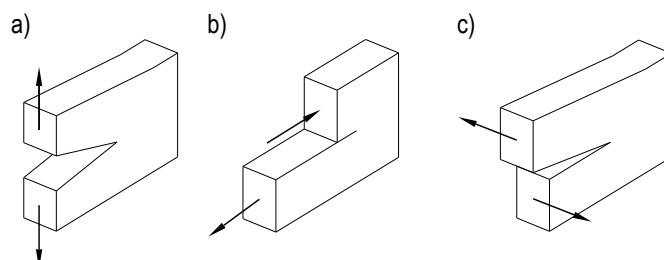
Jako alternatywę do obliczania wytrzymałości ciał plastycznych jest wprowadzenie koncepcji obciążenia granicznego dla ciał doskonale plastycznych [10].

Wiele wzorów na wyznaczenie obciążenia granicznego w elementach konstrukcyjnych już istnieje, ale rozwiązania te są konserwatywne, gdyż ciała rzeczywiste z reguły umacniają się pod wpływem odkształcenia [11]. Pomimo, że rozwiązania mechaniki pęknięcia nie są doskonale precyzyjne, to i tak górują nad wzorami klasycznej wytrzymałości materiałów, gdyż są mniej konserwatywne, przy jednoczesnym zachowaniu ich bezpieczeństwa [11].

Obciażenia graniczne zostały pierwszy raz omówione w 1981 roku przez autorów procedur EPRI – Electric Power Research Institute w dokumencie o tytule „Engineering Approach for Elastic – Plastic Fracture Analysis” [10]. Dokument ten podaje wzory na obliczenie siły potrzebnej do uplastycznienia niepękniętego odcinka próbki przed frontem szczeliny. Oznacza to, że ten fragment próbki miał się charakteryzować stanem, w którym naprężenia liczone zgodnie z hipotezą Hubera-Misses-Henckiego (HMH) są równe lub większe od granicy plastyczności [11]. Wzory te mają swoje zastosowanie tylko dla elementów spełniających warunki płaskiego stanu odkształcenia lub naprężenia, a do wyznaczenia obciążenia granicznego wymaga się jedynie znajomości granicy plastyczności oraz wymiarów charakterystycznych rozważanego elementu konstrukcyjnego. Zaznaczyć należy, że procedury EPRI [10] podają rozwiązania na obciążenia graniczne dla elementów konstrukcyjnych obciążonych według I-szego sposobu obciążenia – „mode I” – patrz rysunek 1a.

Zaznaczyć należy, że wzory te nie uwzględniają jednak grubości próbki. Wielokrotnie były one powielane i weryfikowane, kolejno w procedurach SINTAP [12], w procedurach FITNET [13] oraz brytyjskich normach R6 [14] oraz BS 7910 [15]. Mnogość wzorów na obciążenia graniczne elementów konstrukcyjnych jest pożądana – jednakże powinny one być wyraźnie usystematyzowane, w zależności od grubości elementów konstrukcyjnych czy dominacji płas-

skiego stanu naprężenia (p.s.n.) lub płaskiego stanu odkształcenia (p.s.o.). Fakt, że w ogóle są one potrzebne zostanie wyjaśniony w kolejnych paragrafach podanych poniżej.



**Rys. 1.** Trzy sposoby obciążenia elementów konstrukcyjnych: 1) I-szy sposób obciążenia (mode I) – rozwieranie powierzchni pęknięcia; b) II-gi sposób obciążenia (mode II) – ścinanie powierzchni pęknięcia; c) III-ci sposób obciążenia (mode III) – antypłaskie ścinanie.

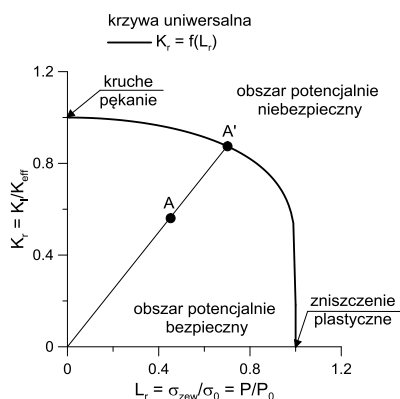
Obciażenia graniczne pozwalają inżynierowi na szybką diagnozę elementu konstrukcyjnego zawierającego pęknięcie, który podany obciążeniu zewnętrznemu może ulec zniszczeniu [11]. W tym celu inżynier może skorzystać z diagramów zniszczenia, które po raz pierwszy podane zostały przez Dowling i Townley [16], a także Harrison i współpracowników [17, 18], którzy opracowali bardzo prostą procedurę ich konstrukcji opierającą się na dwóch skrajnie różnych kryteriach: kryterium współczynnika intensywności naprężeń (WIN) oraz kryterium obciążenia granicznego [11]. Bazując na dwóch kryteriach, po latach podejście to nazwano mianem metody dwukryterialnej [11]. Wykorzystując założenia modelu Dugdale'a, najprostszy diagram zniszczenia kreśli się w oparciu o wzór postaci

$$K_r = L_r \left[ \frac{8}{\pi^2} \ln \left( \sec \left( \frac{\pi}{2} L_r \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

gdzie  $K_r$  jest znormalizowanym współczynnikiem intensywności naprężeń (obliczanym jako iloraz współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$  dla aktualnego stanu obciążenia i warunków geometrycznych próbki oraz krytycznej wartości współczynnika intensywności naprężeń  $K_{IC}$  –  $K_r = K_I / K_{IC}$ ), a  $L_r$  jest znormalizowanym obciążeniem zewnętrznym, obliczanym jako iloraz aktualnego obciążenia oraz obciążenia granicznego [11].

Za pomocą wzoru (1) kreśli się krzywą nazywaną diagramem zniszczenia – Failure Assessment Diagram – krzywą FAD, a następnie dokonuje się przeprowadzenia analizy według powszechnie

znanego schematu (nie będziemy tego omawiać w tej pracy, jedynie zamieszczony zostanie przykładowy, schematyczny diagram zniszczenia, by zobrazować czytelnikowi istotę tego podejścia) [11].

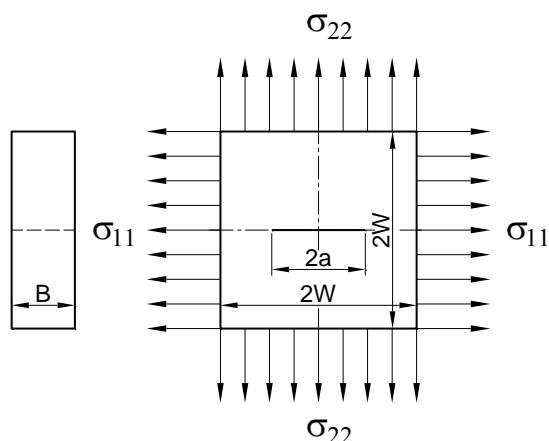


Rys. 2. Schematyczne przedstawienie diagramu zniszczenia FAD.

## 1. PRÓBKI WYKORZYSTYWANE W PROGRAMIE BADAWCZYM, MATERIAŁ, SPOSÓB OBCIĄŻENIA

### 1.1. Rodzaj próbek wykorzystanych w badaniach

Analizę numeryczną, mającą na celu oszacowanie obciążeń granicznych, przeprowadzono dla dość nietypowej geometrii – płyt kwadratowych z centralnie umieszczonym pęknięciem, które poddane są dwuosiowemu rozciąganiu – rysunek 3.



Rys. 3. Próбка CCSP(BT) – kwadratowa płyta z centralną szczeliną poddana dwuosiowemu rozciąganiu:  $a$  – długość pęknięcia,  $W$  – szerokość próbki,  $B$  – grubość próbki,  $\sigma_{22}$  – naprężenia normalne do powierzchni pęknięcia (składowa obciążenia zewnętrznego wg I-go sposobu obciążenia),  $\sigma_{11}$  – naprężenia ścinające powierzchnie pęknięcia (składowa obciążenia zewnętrznego wg II-go sposobu obciążenia).

Tabela 1 prezentuje wymiary geometryczne próbek wykorzystane do oszacowania obciążeń granicznych. Jak daje się zauważyć, rozważano płyty o czterech różnych długościach pęknięcia – bardzo krótkie szczeliny, krótkie normatywne ( $a/W=0.50$ ) oraz szczeliny długie.

Wybór geometrii nie jest przypadkowy – niezmiernie rzadko jest ona dyskutowana w pracach naukowych [pozycje literatury]. Geometria ta nie pojawia się we wcześniej wspomnianych procedurach EPRI [10], SINTAP [12], FITNET [13]. Zaprezentowana przez Meek'a i Ainsworth'a praca [19], porusza tematykę obciążeń granicznych dla płyt z centralną szczeliną poddanych rozciąganiu. W pracy tej znajdziemy dyskusję dotyczącą wpływu wielkości płyty na

poziom obciążenia zewnętrznego, rozważany jest wpływ parametru dwuosiowości obciążenia definiowanego jako  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , jednakże wszelkie rozważania prowadzone są dla płaskiego stanu odkształcenia oraz dwóch długości pęknięcia. Autorzy prowadzą dyskusję, skupiając się na podstawowym wzorze pozwalającym oszacować obciążenie graniczne rozważanej przez nich geometrii:

$$(\sigma_2)_{L}^{lb} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \text{MIN} \left[ \frac{1}{|\sigma_{11}/\sigma_{22}|}; \frac{(1-a/W)}{|1-\sigma_{11}/\sigma_{22}(1-a/W)|} \right] \quad (2)$$

gdzie  $(\sigma_2)_{L}^{lb}$  jest obciążeniem granicznym – naprężeniem normalnym przyłożonym do próbki, powodującym pełne uplastycznienie niepękniętego odcinka próbki,  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności,  $a/W$  oznacza znormalizowaną długość pęknięcia, a iloraz  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  jest miarą dwuosiowości obciążenia zewnętrznego. Indeks „lb” przy obciążeniu granicznym świadczy o najmniejszym możliwym rozwiązaniu, jakie otrzymali autorzy pracy [19].

Tab. 1. Wymiary geometryczne, wykorzystane w programie badawczym do oszacowania obciążeń granicznych.

szerokość próbki, $W$ [mm]	względna długość pęknięcia, $a/W$	grubość próbki, $B$ dla analizy 2D [mm]	
		p.s.n.	p.s.o.
40	0.05	1	1000
	0.20		
	0.50		
	0.70		

Powyższy wzór jest przez autorów różnie modyfikowany, by dopasować go do płyt o różnych wymiarach, tzn. różnego stosunku pomiędzy szerokością a długością płyty, przy czym autorzy pracy [19] rozważają jedynie dwie względne długości pęknięcia ( $a/W=0.20$  oraz  $a/W=0.60$ ) – o pozostałych nie wspominają.

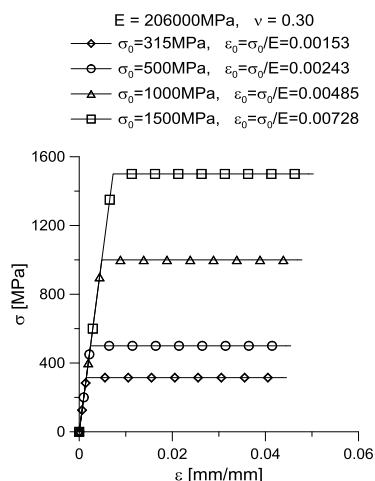
Brak szeroko opisanym programów badawczych dotyczących płyt ze szczeliną poddanych dwuosiowemu rozciąganiu, a także brak wzorów empirycznych skłania do poruszenia tej tematyki i przedstawienia wyników numerycznych.

### 1.2. Materiał próbek CCSP(BT)

Obciążenia graniczne wyznacza się dla materiałów sprężysto-doskonale plastycznych. Taki właśnie model materiału wykorzystano w trakcie programu badań numerycznych. Zdecydowano się określić, jak granica plastyczności wpływać będzie na oszacowywane numerycznie obciążenie graniczne. Modelując materiał zakładano stałą wartość modułu Young'a  $E=206\text{GPa}$  i stałą wartość współczynnika Poisson'a  $\nu=0.30$ . Modelowano cztery rodzaje materiałów sprężysto-doskonale plastycznych, które różniły się granicą plastyczności (patrz tabela 2).

Tab. 2. Własności mechaniczne modeli sprężysto – doskonale plastycznych materiałów wykorzystanych do numerycznego oszacowania obciążeń granicznych.

moduł Young'a, $E$ [MPa]	współczynnik Poisson'a, $\nu$	granica plastyczności, $\sigma_0$ [MPa]	odkształcenia odpowiadające granicy plastyczności, $\epsilon_0=\sigma_0/E$
206000	0.30	315	0.00153
		500	0.00243
		1000	0.00485
		1500	0.00728



**Rys. 4.** Graficzna prezentacja modeli materiałów sprężysto – doskonale plastycznych wykorzystanych w oszacowaniu wartości obciążeń granicznych.

### 1.3. Obciążenie próbek CCSP(BT)

Obciążenia próbek – płyt kwadratowych z centralną szczeliną poddanych dwuosiemu rozciąganiu realizowano przez przyłożenie do dwóch brzegów próbki w postaci wzajemnie prostopadłych naprężeń rozciągających:  $\sigma_{11}$  – naprężeń rozciągających płytę, działających w kierunku propagacji pęknięcia oraz  $\sigma_{22}$  – naprężeń rozciągających płytę, działających w kierunku prostopadłym do powierzchni pęknięcia – kierunek normalny. W celu dokładniejszego oszacowania obciążeń granicznych, testowano siedem wariantów ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22} = \{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50\}$

## 2. MODEL NUMERYCZNY PRÓBEK CCSP(BT)

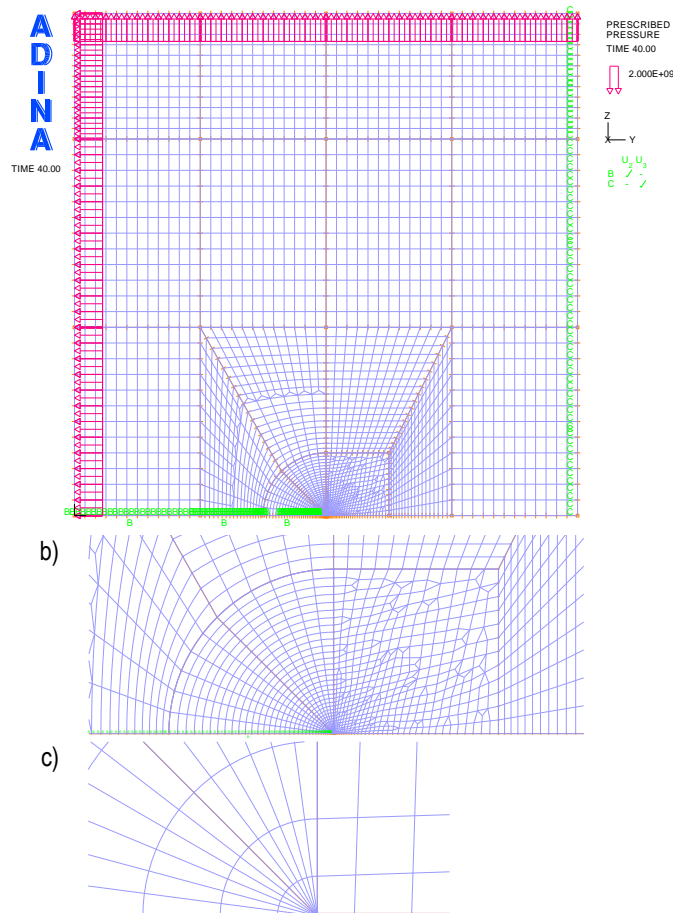
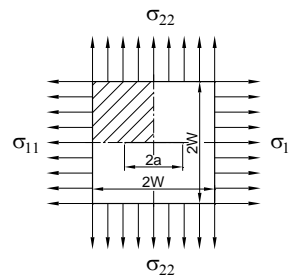
Modele numeryczne niezbędne do przeprowadzenia obliczeń numerycznych mających na celu określenia wartości obciążeń granicznych dla płyt CCSP(BT), zdominowanych przez p.s.o., wykonano wykorzystując pakiet obliczeniowy ADINA SYSTEM 8.8 [20, 21]. Modele numeryczne budowano w oparciu o właściwy dla systemu ADINA język programowania, tworząc pliki wsadowe w postaci tekstowej o rozszerzeniu „.in”.

W obliczeniach numerycznych mających na celu skorzystano z modelu sprężysto – doskonale plastycznego materiału, zakładając stałą wartość modułu Young'a  $E$  i współczynnika Poisson'a  $\nu$ , zmieniając jedynie granicę plastyczności  $\sigma_0$ . Tabela 2 prezentuje własności mechaniczne modeli materiałów wykorzystanych w analizie numerycznej. Natomiast rysunek 4 w sposób graficzny ilustruje modele sprężysto – doskonale plastycznych materiałów wykorzystanych w analizie numerycznej.

Tworząc numeryczne modele próbek CCSP(BT), zdecydowano się zamodelować wierzchołek pęknięcia, jako ćwiartkę łuku, o promieniu  $r_w$  w granicach  $(1 \div 5) \mu\text{m}$ . Oznacza to że promień wierzchołka pęknięcia był w skrajnych przypadkach 40000 oraz 8000 mniejszy od szerokości próbki. Ów wierzchołek pęknięcia podzielono na 12 części ze zagęszczeniem elementów ku krawędziom powierzchni (elementy brzegowe w zależności od modelu były  $(5 \div 20)$  razy mniejsze od największych elementów zlokalizowanych w centralnej części łuku). Wielkość promienia zaokrąglenia uwarunkowana była poziomem obciążenia zewnętrznego, a także faktem, o jakiej długości pęknięcia analizowano rozpatrywany przypadek. W przypadku każdej próbki, obszar przywierzchołkowy o promieniu równym około  $(1.0 \div 5.0) \text{mm}$ , podzielono na  $(36 \div 50)$  elementów skończonych (ES), z których najmniejszy położony przy wierzchołku pęknięcia był  $(20 \div 50)$  razy mniejszy od ostatniego. Oznaczało to, że w skrajnych przypadkach, najmniejszy element, zlokalizowany tuż przy wierz-

chołku pęknięcia stanowił około 1/3076 lub 1/10210 szerokości próbki  $W$ , a największy modelujący obszar przywierzchołkowy około 1/154 lub 1/204 szerokości próbki. Parametry modelu numerycznego zależały ściśle od analizowanej geometrii (typ próbki, długość pęknięcia), charakterystyki materiałowej oraz obciążenia zewnętrznego.

a)



**Rys. 5.** Przykładowy model numeryczny próbki CCSP(BT) wykorzystany w analizie numerycznej do oszacowania obciążeń granicznych: a) model ogólny; b) powiększony fragment siatki w obszarze przywierzchołkowym; c) model wierzchołka pęknięcia.

Analizę prowadzono przy założeniu małych odkształceń i małych przemieszczeń [9, 22-25], przy czym dla dominacji p.s.o. model skończenie elementowy wypełniono dziewięciowęzłowymi ES typu „2-D SOLID plane strain” o interpolacji typu „mixed” z dziewięcioma punktami całkowania numerycznego (PCN). Założenie płaskiego stanu odkształcenia, narzuca użytkownikowi programu ADINA grubość analizowanego elementu konstrukcyjnego, która automatycznie zostaje ustawiona na  $B=1\text{m}$ . Jak już wcześniej wspomniano, w obliczeniach skorzystano z sprężysto-doskonale plastycznego modelu materiału.

Ze względu na symetrię, próbki z przewagą rozciągania modelowano z uwzględnieniem stosownych osi symetrii, uwzględniając właściwe warunki brzegowe (patrz rys. 3). Podejście takie pozwala na wykorzystanie większej liczby ES na mniejszym fragmencie próbki, zmniejsza czas analizy numerycznej, a od prowadzącego analizę wymaga zablokowania we właściwym miejscu odpowiednich przemieszczeń w kolejnych węzłach. W przypadku próbki CCSP(BT) modelowano ćwiartkę próbki, wykorzystując dwie prostopadłe do siebie osie symetrii. Rysunek 5 prezentujący przykładowy model numeryczny próbki CCSP(BT), wykorzystane w projekcie badawczym oraz miniaturkę całej próbki z zakreślowanym fragmentem, który modelowano w programie ADINA SYSTEM 8.8 [20, 21].

Obciążenie zewnętrzne – rozciąganie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, czyli złożony schemat obciążenia, składający się z I-wszego i II-giego sposobu obciążenia – realizowano poprzez przyłożenie do właściwych brzegów liniowo narastających w czasie naprężeń  $\sigma_{yy\_ext}$  (zapewniają składową charakterystyczną dla II-giego sposobu obciążenia) oraz naprężeń  $\sigma_{zz\_ext}$  (zapewniają składową charakterystyczną dla I-wszego sposobu obciążenia). W przypadku rozważanych próbek CCSP(BT) badano również, jak zmieni się obciążenie graniczne, przy różnym układzie wartości naprężeń rozciągających, testując różne wartości ilorazu  $\sigma_{yy\_ext}/\sigma_{zz\_ext} = \{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50\}$ . Indeksy „yy” oraz „zz” w modelu numerycznym wygenerowanym w programie ADINA [20, 21] odpowiadają odpowiednio indeksom „11” oraz „22” na rysunku 3, prezentującym geometrię próbki CCSP(BT).

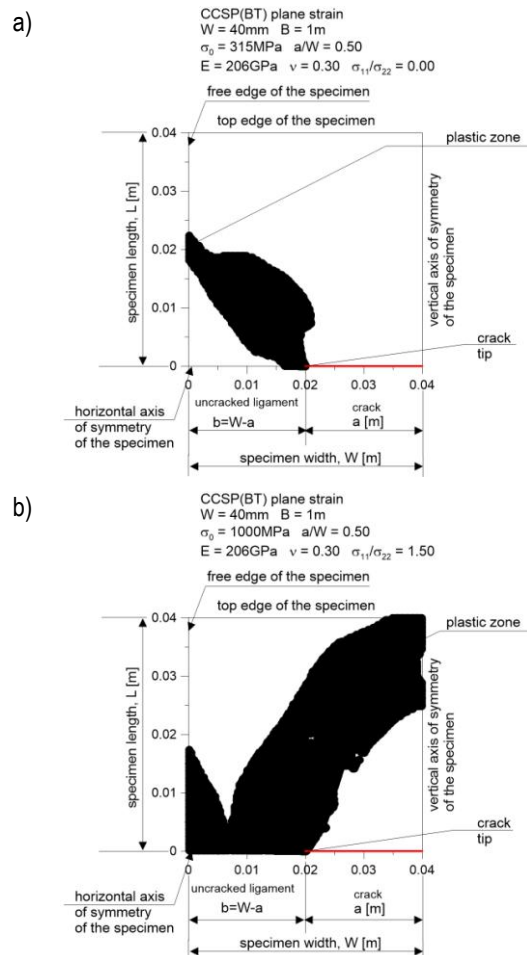
Całkowity model numeryczny, w zależności od rodzaju materiału, długości pęknięcia oraz obciążenia zewnętrznego, składał się z  $3149 \div 3428$  elementów skończonych, zawierających  $12803 \div 13921$  węzłów. Łącznie w programie badawczym analizie numerycznej poddano 96 modeli, różniących się granicą plastyczności, względną długością pęknięcia oraz rodzajem obciążenia zewnętrznego.

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH DLA PRÓBEK CCSP(BT) – WARTOŚCI OBCIĄŻEŃ GRANICZNYCH

Analizę uzyskanych wyników numerycznych, mających na celu oszacowanie obciążenia granicznego płyt CCSP(BT) prowadzono w oparciu o ocenę strefy plastycznej przed frontem pęknięcia (obserwowano rozwój strefy plastycznej na niepękniętym odcinku próbki), a także w wybranych przypadkach analizowano wykresy obciążenia zewnętrznego w funkcji przemieszczenia punktu przyłożenia siły.

Za wartość obciążenia granicznego, dla kwadratowych płyt z centralną szczeliną poddanych dwuosłowemu rozciąganiu – CCSP(BT), przyjęto wartość obciążającego naprężenia normalnego  $\sigma_{22}$ , przyłożonego do krawędzi próbki, które będąc w relacji z naprężeniem zewnętrznym  $\sigma_{11}$  (również przyłożonym do drugiej prostopadłej krawędzi próbki), powoduje pełne uplastycznienie niepękniętego odcinka próbki. Naprężenie graniczne dla płyt CCSP(BT) oznaczono w pracy jako  $(\sigma_{22})^{P0}$ . Wyniki dla wszystkich 96 przypadków analizowanych w programie badawczym zamieszczone w tabeli 3.

Rysunki 6 i 7 prezentują dla pięciu przypadków kształt strefy plastycznej przed wierzchołkiem pęknięcia w momencie pełnego uplastycznienia niepękniętego odcinka próbki, dla różnych płyt CCSP(BT) – płyty te różnią granicą plastyczności, długością pęknięcia oraz ilorazem naprężeń rozciągających  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ .

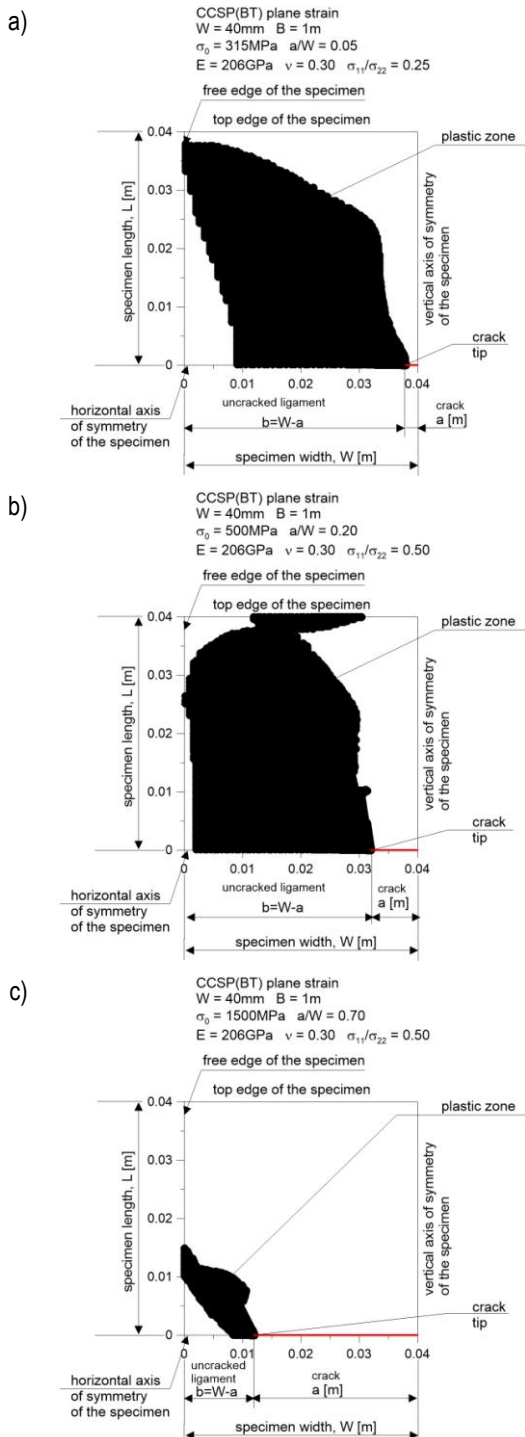


Rys. 6. Przykładowy kształt stref plastycznych dla płyt CCSP(BT) o tej samej długości pęknięcia i skrajnych wartościach dwuosowości naprężeń rozciągających  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ : a)  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0$ ; b)  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=1.50$ .

Tab. 3. Numerycznie oszacowane wartości obciążeń granicznych  $(\sigma_{22})^{P0}$  dla płyt CCSP(BT) zdominowanych przez p.s.o..

a/W	$\sigma_{11}/\sigma_{22}$	$(\sigma_{22})^{P0}$ [MPa] $\sigma_0=315\text{MPa}$	$(\sigma_{22})^{P0}$ [MPa] $\sigma_0=500\text{MPa}$	$(\sigma_{22})^{P0}$ [MPa] $\sigma_0=1000\text{MPa}$	$(\sigma_{22})^{P0}$ [MPa] $\sigma_0=1500\text{MPa}$
0.05	0.00	345	546	1095	1647
0.05	0.25	445	710	1411	2125
0.05	0.50	592	940	1880	2835
0.05	0.75	770	1215	2425	3640
0.05	1.00	780	1245	2475	3720
0.05	1.25	640	1005	2025	3040
0.05	1.50	480	765	1525	2280
0.20	0.00	290	462	924	1386
0.20	0.25	347	579	1152	1728
0.20	0.50	477	756	1513	2271
0.20	0.75	662	1048	2101	3152
0.20	1.00	680	1080	2156	3240
0.20	1.25	552	876	1754	2630
0.20	1.50	429	697	1361	2043
0.50	0.00	180	289	570	860
0.50	0.25	204	325	650	972
0.50	0.50	237	375	750	1128
0.50	0.75	282	450	900	1344
0.50	1.00	321	510	1020	1529
0.50	1.25	310	493	986	1478
0.50	1.50	281	446	893	1339
0.70	0.00	109	170	340	510
0.70	0.25	114	185	370	555
0.70	0.50	123	200	400	600
0.70	0.75	135	215	430	645
0.70	1.00	150	235	470	705
0.70	1.25	165	260	520	780
0.70	1.50	186	295	590	885

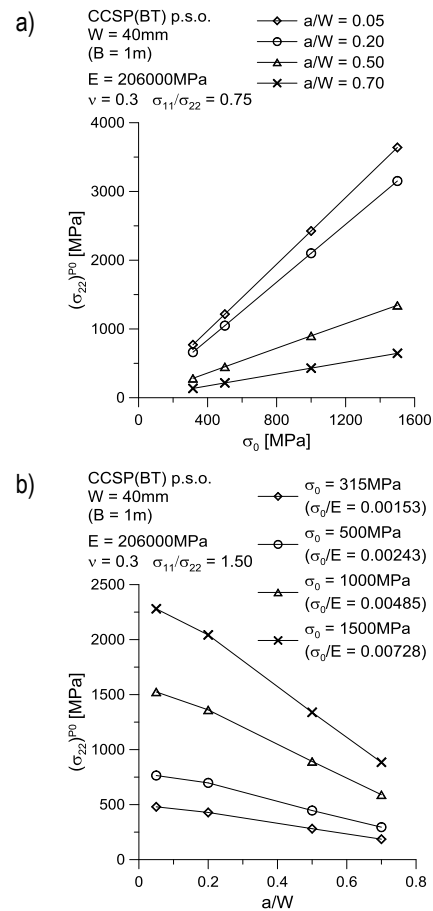
Rysunek 6 prezentuje kształt stref plastycznych dla dwóch skrajnych przypadków obciążenia zewnętrznego -  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0$  oraz  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=1.50$ , przy względnej długości pęknięcia  $a/W=0.50$ . Jak daje się zauważyć, udział obciążeń rozciągających, bardzo znacznie wpływa na kształt i rozmiar stref plastycznych – zdecydowanie mniejsza strefa plastyczna i o innym kształcie charakteryzuje płyty rozciągane tylko w jednym kierunku.



**Rys. 7.** Kształt stref plastycznych dla płyt CCSP(BT) o charakterystyce: a)  $a/W=0.05$ ,  $\sigma_0=315\text{MPa}$ ,  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0.25$ ; b)  $a/W=0.20$ ,  $\sigma_0=500\text{MPa}$ ,  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0.50$ ; c)  $a/W=0.70$ ,  $\sigma_0=1500\text{MPa}$ ,  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0.50$ .

Rysunek 7 natomiast przedstawi kształt stref plastycznych dla próbek o różnych pęknięciach oraz o różnych poziomach dwuosiowości obciążenia. Prowadzona przez autora obserwacja kształtu i

wielkości stref plastycznych, wskazuje na fakt, że im większy jest iloraz naprężeń rozciągających  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , tym większa wielkość strefy plastycznej. Im dłuższe pęknięcie, tym większa jest strefa plastyczna. Są to dość naturalne wnioski, które jednak nie mogą być pozostawione bez komentarza.



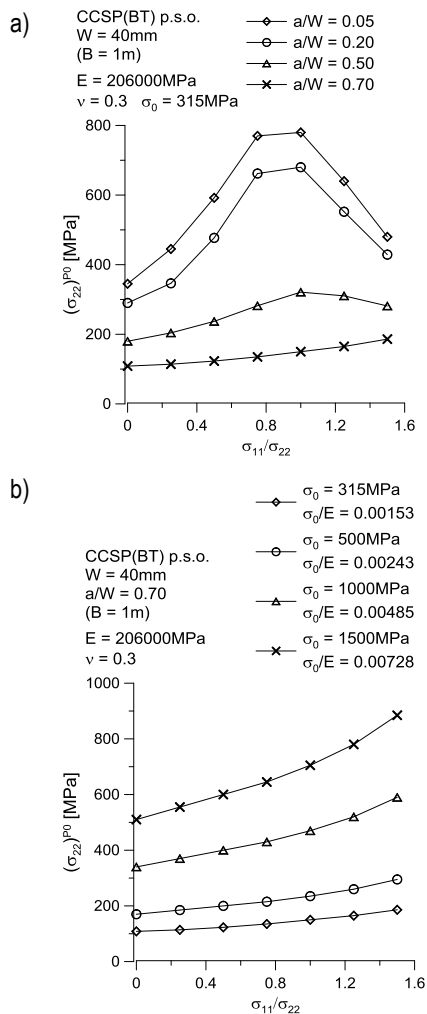
**Rys. 8.** Wpływ granicy plastyczności (a) oraz względnej długości pęknięcia (b) na poziom obciążenia granicznego płyt CCSP(BT) – wyniki przykładowe.

Analiza oszacowanych numerycznie obciążeń granicznych  $(\sigma_{22})^{P0}$  dla płyt CCSP(BT), prowadzi do bardzo prostych i naturalnych wniosków. Im większa jest granica plastyczności, tym większa wartość obciążenia granicznego. Im mniejsza jest względna długość pęknięcia, tym  $a/W$ , tym większe obciążenie graniczne charakteryzuje daną płytę. Wnioski te są prawdziwe bez względu na poziom dwuosiowości naprężeń rozciągających  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  (patrz rys. 8). Wnioski takie wyciągnąć można dla przypadku, gdy wyniki prezentowane będą dla określonego poziomu dwuosiowości naprężeń rozciągających płytę -  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ .

Dość interesujący jest natomiast wpływ poziomu dwuosiowości naprężeń rozciągających  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  na wartość wartości obciążeń granicznych  $(\sigma_{22})^{P0}$  dla płyt CCSP(BT) – patrz rysunek 9. W miarę wzrostu składowej  $\sigma_{11}$ , poziom obciążenia granicznego  $(\sigma_{22})^{P0}$  rośnie, osiągając wartość maksymalną dla przypadku dwuosiowości naprężeń  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=1$ , po czym wartość obciążenia granicznego spada. Ów wzrost i spadek wartości naprężenia granicznego, jest bardzo wyraźny dla płyt zawierających bardzo krótkie i krótkie pęknięcia (odpowiednio  $a/W=0.05$  oraz  $a/W=0.20$ ).

W przypadku szczelin normatywnych, a za takie uważa się pęknięcia o względnej długości  $a/W=0.50$ , wzrost obciążenia granicznego  $(\sigma_{22})^{P0}$  dla ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  w zakresie od 0 do 1 jest bardzo znaczny, jednakże przy dalszym wzroście poziomu dwuosiowości

naprężeń obserwuje się nieznaczny spadek wartości obciążeń granicznych  $(\sigma_{22})^{P0}$  (patrz rysunek 9a. Natomiast dla szczelin bardzo długich ( $a/W=0.70$ ), obserwuje się zupełnie odmienne zachowanie wartości obciążeń granicznych  $(\sigma_{22})^{P0}$  w funkcji poziomu dwuosiowości obciążenia zewnętrznego  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  – wraz ze wzrostem ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , obciążenie graniczne  $(\sigma_{22})^{P0}$  dla przypadku płyt zawierających szczeliny o względnej długości  $a/W=0.70$  rośnie, przy czym poziom zmian zależy od wielkości granicy plastyczności. Im większa granica plastyczności, tym większe zmiany w poziomie obciążeń granicznych wraz ze wzrostem poziomu dwuosiowości obciążenia zewnętrznego.

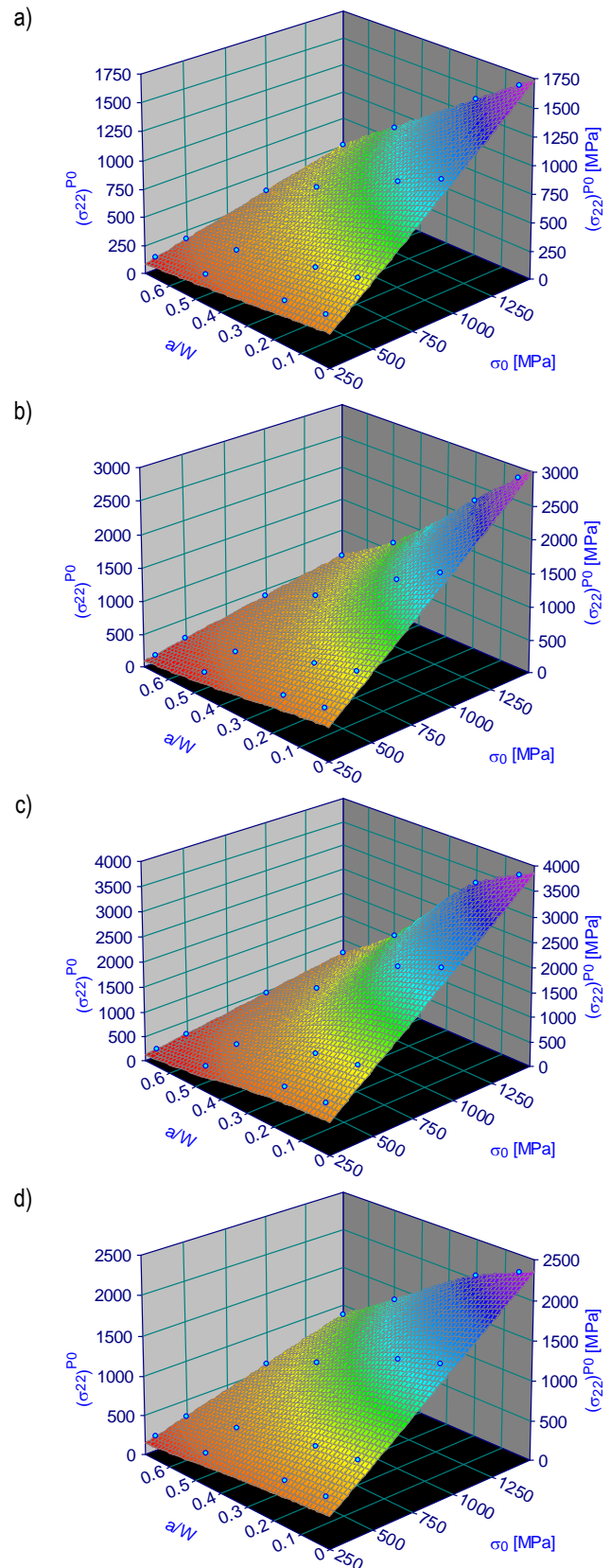


**Rys. 9.** Wpływ poziomu dwuosiowości obciążenia zewnętrznego  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  obciążenie graniczne płyt CCSP(BT): a) dla ustalonej granicy plastyczności; b) dla ustalonej względnej długości pęknięcia.

#### 4. APROKSYMACJA WYNIKÓW OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH DLA PRÓBEK CCSP(BT)

Uzyskane w trakcie realizacji programu numerycznego wyniki poddane zostały próbie aproksymacji. Aproksymację wykonano opierając się na sporządzonych w programie Table Curve 3D [26], wykresach trójwymiarowych, prezentujących w formie płaszczyzny zmianę wartości obciążenia granicznego  $(\sigma_{22})^{P0}$  płyt CCSP(BT), w funkcji granicy plastyczności  $\sigma_0$  oraz względnej długości pęknięcia. Przykładowe wykresy prezentuje rysunek 10. W kolejnym kroku wykorzystano wbudowaną funkcję programu Table Curve 3D i dokonano aproksymacji każdej otrzymanej powierzchni funkcją

wielomianową dwóch zmiennych – równanie nr 301 w zbiorze funkcji programu Table Curve 3D [26].



**Rys. 10.** Zależność obciążenia granicznego płyt CCSP(BT) od granicy plastyczności i względnej długości pęknięcia dla wybranych poziomów dwuosiowości obciążenia zewnętrznego: a)  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0$ ; b)  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=0.50$ ; c)  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=1.00$ ; d)  $\sigma_{11}/\sigma_{22}=1.50$ .

Wybrany do aproksymacji obciążeń granicznych  $(\sigma_{22})^{P0}$  funkcja, jest funkcją wielomianową o dwóch zmiennych – granicy plastyczności  $\sigma_0$  oraz względnej długości pęknięcia  $a/W$ :

$$(\sigma_{22})^{P0} = A_1 + A_2 \cdot \sigma_0 + A_3 \cdot \frac{a}{W} + A_4 \cdot (\sigma_0)^2 + A_5 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 + A_6 \cdot \sigma_0 \cdot \frac{a}{W} \quad (3)$$

gdzie współczynniki  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  zależą od poziomu dwuosowości obciążenia zewnętrznego  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ . Wartości współczynników tych zestawiono w tabeli 4.

**Tab. 4.** Współczynniki aproksymacyjne wzoru (3), niezbędne do oszacowania obciążenia granicznego  $(\sigma_{22})^{P0}$  dla płyt CCSP(BT).

$\sigma_{11}/\sigma_{22}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$R^2$
0.00	-0.83579	1.151174	11.71494	3.76E-06	-8.1789	-1.1703	1.0000
0.25	17.50299	1.499167	-257.559	-6.78E-06	350.7361	-1.62151	0.9997
0.50	55.32455	1.971651	-539.714	6.92E-06	726.4338	-2.32906	0.9988
0.75	27.17162	2.633399	-241.897	4.99E-07	316.4248	-3.23179	0.9932
1.00	-10.0275	2.689586	131.8	4.72E-06	-175.276	-3.21873	0.9960
1.25	-25.6442	2.174414	247.2069	3.01E-06	-321.686	-2.36762	0.9991
1.50	-21.4071	1.625967	236.2928	-5.81E-06	-328.903	-1.45234	0.9993

Wykorzystanie wzoru (3) wymaga od użytkownika znajomości względnej długości pęknięcia  $a/W$ , granicy plastyczności  $\sigma_0$  podawanej w MPa oraz wzajemnego ilorazu pomiędzy zewnętrznymi obciążeniami rozciągającymi -  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ . Otrzymany wynik będzie miał miano MPa. Wzór (3) poprawnie pozwoli oszacować obciążenia graniczne w zakresie charakterystyk materiałowych i geometrycznych rozważanych w niniejszej pracy. Dla przypadku gdy rozpatrywany poziom obciążeń zewnętrznym  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$  nie został ujęty w powyższej tabeli i programie badawczym, zaleca się przeprowadzenie dodatkowej liniowej aproksymacji dla dwóch najbliższych wartości poziomu dwuosowości naprężeń  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ .

## PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono została tematyka wyznaczania obciążeń granicznych  $(\sigma_{22})^{P0}$  dla kwadratowych płyt zawierających centralne pęknięcie – CCSP(BT), które poddane zostały dwuosowemu rozciąganiu. W pracy przedstawiono krótką charakterystykę tematu obciążeń granicznych, aspekty modelowania numerycznego oraz wybrane wyniki obliczeń numerycznych. Dyskutowano wpływ długości pęknięcia, granic plastyczności oraz współczynnika dwuosowości obciążenia zewnętrznego  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , zdefiniowanego na potrzeby pracy. Podano również wybrane formuły aproksymacyjne.

Wnioski wyciągnięte w trakcie przeprowadzenia programu badawczego są dość naturalne i oczywiste. Obciążenie graniczne wzrasta wraz ze wzrostem granicy plastyczności, a maleje wraz ze wzrostem długości pęknięcia. Niezmiernie ciekawy jest wpływ poziomu dwuosowości naprężeń zewnętrznym na poziom obciążeń granicznych. W przypadku bardzo krótkich i krótkich szczelin mamy do czynienia z dość znacznym wzrostem obciążenia granicznego wraz ze wzrostem ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , przy czym po osiągnięciu równego poziomu naprężeń rozciągających  $\sigma_{11}$  oraz  $\sigma_{22}$  obserwuje się spadek wartości obciążeń granicznych wraz z dalszym wzrostem ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ . W przypadku szczelin normatywnych ( $a/W=0.50$ )

charakter krzywych  $(\sigma_{22})^{P0}=f(\sigma_{11}/\sigma_{22})$  jest podobny, a w przypadku szczelin długich obserwuje się wzrost wartości obciążenia granicznego  $(\sigma_{22})^{P0}$  wraz ze wzrostem ilorazu  $\sigma_{11}/\sigma_{22}$ , określającego poziom dwuosowości naprężeń zewnętrznym, rozciągających próbkę.

Zaprezentowana prac nie wyczerpuje tematyki obciążeń granicznych dla płyt kwadratowych z centralną szczeliną poddanych dwuosowemu rozciąganiu. W najbliższym czasie autor pracy zamierza opublikować wyniki dotyczące płaskiego stanu naprężenia oraz rozszerzyć ideę obciążeń granicznych na przypadki trójwymiarowe.

## ADNOTACJA

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego IUVENTUS PLUS o numerze **IP2012 011872**, finansowanego ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

## BIBLIOGRAFIA

- Hutchinson J.W., 1968, *Singular Behavior at End of Tensile Crack in Hardening Material*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, No. 1, pp. 13-31.
- Rice J.R., Rosengren G.F., 1968, *Plane Strain Deformation Near Crack Tip in Power-Law Hardening Material*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, No. 1, pp. 1-12.
- O'Dowd N.P., Shih C.F., 1991, *Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter – I. Structure of Fields*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 39, No. 8, 1991., pp. 989-1015.
- O'Dowd N.P., Shih C.F., 1992, *Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter – II. Fracture Applications*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 40, No. 5, 1992, pp. 939-963.
- Yang S., Chao Y.J., Sutton M.A., 1993, *Higher Order Asymptotic Crack Tip Fields in a Power-Law Hardening Material*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 19, No. 1, 1993, pp.1-20.
- Guo Wanlin, 1993a, *Elastoplastic Three Dimensional Crack Border Field – I. Singular Structure of the Field*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 46, No. 1, pp. 93-104.
- Guo Wanlin, 1993b, *Elastoplastic Three Dimensional Crack Border Field – II. Asymptotic Solution for the Field*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 46, No. 1, pp. 105-113.
- Guo Wanlin, 1995, *Elastoplastic Three Dimensional Crack Border Field – III. Fracture Parameters*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 51, No. 1, pp. 51-71.
- Graba M., 2009, *Numerical analysis of the mechanical fields near the crack tip in the elastic-plastic materials. 3D problems.*, PhD dissertation, Kielce University of Technology - Faculty of Mechatronics and Machine Building, 387 pages, Kielce 2009 (in polish).
- Kumar V., German M.D., Shih C.F., 1981, *An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis*, Electric Power Research Institute, Inc. Palo Alto, CA (1981), EPRI Report NP-1931.
- Neimitz A., Dzioba I., Graba M., Okrajni J., 2008, *The assessment of the strength and safe-ty of the operation high temperature components containing crack*, Kielce University of Technology Publishing House, Kielce.
- SINTAP, 1999, *SINTAP: Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry. Final Procedure*, Brite-Euram Project No BE95-1426. – Rotherham: British Steel.
- FITNET, 2006, *FITNET Report, (European Fitness-for-service Network)*, Edited by M. Kocak, S. Webster, J.J. Janosch, R.A. Ainsworth, R. Koers, Contract No. G1RT-CT-2001-05071, 2006.

14. R6, 1997, *Assessment of the integrity of structures containing defects*, Nuclear Electric-R6 Manuals, Nuclear Electric Ltd, Barnett Way, Barnwood, Gloucester GL4 3RS, United Kingdom.
15. BS 7910: *Guide on Methods for Assessing the Acceptability of Flaws in Metallic Structures*, 2005.
16. Dowling A.R., Townley, C.H.A., 1975, *The effects of defects on structural failure: a two-criteria approach*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Tom 3, str. 77-137
17. Harrison R.P., Loosemore K., Milne I., 1976, *Assessment of the integrity of structures containing defects*, CEGB Report R/H/R6, Central Electricity Generating Board, United Kingdom
18. Harrison R.P., Loosemore K., Milne, I. Dowling A.R., 1980, *Assessment of the integrity of structures containing defects*, CEGB Report R/H/R6-Rev.2, Central Electricity Generating Board, United Kingdom
19. Meek C, Ainsworth RA. *The effects of load biaxiality and plate length on the limit load of a centre-cracked plate*, Engineering Fracture Mechanics (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.03.034>
20. ADINA 8.8, *ADINA: User Interface Command Reference Manual – Volume I: ADINA Solids & Structures Model Definition*, Report ARD 11-2, ADINA R&D, Inc., 2011.
21. ADINA 8.8, *ADINA: Theory and Modeling Guide – Volume I: ADINA Solids & Structures*, Report ARD 11-8, ADINA R&D, Inc., 2011.
22. Graba M., Galkiewicz J., 2005, *Wpływ modelu wierzchołka pęknięcia na wyniki uzyskane metodą elementów skończonych*, Materiały Konferencyjne X Krajowej Konferencji Mechaniki Pękania, Opole – Wisła 11 - 14 września 2005r.; str. 323-332.
23. Graba M., Galkiewicz J., 2007, *Influence of the Crack Tip Model on Results of the Finite Element Method*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 45, No. 2, pp. 225-237, Warsaw 2007r.
24. Brocks W., Cornec A., Scheider I., 2003, *Computational Aspects of Nonlinear Fracture Mechanics*, Bruchmechanik, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Germany, Elsevier pp.127-209.
25. Brocks W., Scheider I., 2003, *Reliable J-Values. Numerical Aspects of the Path-Dependence of the J-integral in Incremental Plasticity*, Bruchmechanik, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Germany, Elsevier pp.264-274.
26. Table Curve 3D version 4.0.0, 1993-2002

*mation formulas were presented for selected results.*

The paper was carried out in the framework of the research project IUVENTUS PLUS number IP2012 011872, financed by the Polish Ministry of Science and Higher Education.

Autorzy:

dr inż. **Marcin Graba** – Politechnika Świętokrzyska, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn, Katedra Technologii Mechanicznej i Metrologii, email: mgraba@tu.kielce.pl

## SHORT STUDY ABOUT DETERMINING THE LIMIT LOADS FOR CENTER CRACKED SQUARE PLATES IN BIAXIAL TENSION

### *Abstract*

*In the paper the short study about determining of the limit loads for center cracked square plate in biaxial tension was presented. Author presents the limit load topic, aspects of the numerical analysis and selected results of numerical calculations. The influence of the crack length, yield strength and a ratio of the biaxial external load were discussed. In the paper the approxi-*