

Piotr Kordzikowski¹⁾

SPECYFIKACJA ENERGETYCZNEGO WARUNKU RYCHLEWSKIEGO DLA MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH

A SPECIFICATION OF RYCHLEWSKI ENERGY CONDITION FOR ANISOTROPIC MATERIALS

STRESZCZENIE W artykule przedstawione jest całościowe podsumowanie zagadnień szczegółowo prezentowanych w pracach [5, 8–13] odnośnie wytrzymałości w anizotropowych materiałach z uwzględnieniem matematycznych podstaw anizotropii sprężystej [24]. Charakterystyczną cechą wymienionych materiałów są różne własności wytrzymałościowe, tzw. efekt różnicy wytrzymałości (*Strength Differential Effect*), a w konsekwencji asymetria zakresu sprężystego, w zależności od sposobu obciążenia wywołującego dany płaski stan naprężenia w ciele. W pracach [5, 8–13] wykorzystano teorię sprężystych stanów własnych, własności tensorów sprężystości Hooke'a i interpretację energetyczną kryterium stanów granicznych dla anizotropowych ciał liniowo-sprężystych, sformułowaną przez Jana Rychlewskiego na początku lat osiemdziesiątych XX wieku w pracach [28–31].

Słowa kluczowe:
anizotropowe materiały, kryterium wytrzymałości, sprężyste stany własne.

ABSTRACT This article presents a complete summary of issues presented in detail in papers [5, 8–13] relating to effort in anisotropic materials with regard to mathematics-based fundamentals of elastic anisotropy. A characteristic of the materials mentioned are various strength properties, the so called *Strength Differential Effect*, which in consequence is an elastic range asymmetry depending on the loading which causes a planar stress state in a body. Publications [5, 8–13] use the theory of own elastic conditions, Hooks' properties of elasticity tensors and the energy-based interpretation of criterion for limit conditions worked out by Jan Rychlewski at the beginning of 1980s in publications [28–31].

Keywords:
anisotropic materials, effort criterion, own elastic states.

DOI: 10.5604/0860889X.1114756

¹⁾ Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24, e-mail: pk@limba.wil.pk.edu.pl

WSTĘP

Pojęcie wyężenia jest pojmowane zazwyczaj intuicyjnie jako cecha materiału, która mówi o zmianie jego relacji spowodowanej obecnością zarówno stanu napężenia, jak i odkształcenia [23]. Łączy się ono z poszukiwaniem miary wyężenia jako pewnej funkcji składowych napężenia lub odkształcenia, której wartość mierzy odległość od przyjętego stanu granicznego. Energetyczne kryterium wyężenia dla ciał izotropowych zostało sformułowane blisko sto lat temu przez M. T. Hubera [7], gdzie proponowana hipoteza energii odkształcenia postaciowego odnosiła się do granicznych stanów sprężystych. Należy dodać, że koncepcja zmagazynowanej energii sprężystej odkształcenia postaciowego jako miary wyężenia została sformułowana już dużo wcześniej przez J. C. Maxwella w prywatnym liście do W. Thomsona z 18 grudnia 1856 r. oraz później w odniesieniu do całkowitej energii sprężystej przez E. Beltramię [1]. Propozycja J. C. Maxwella [14] nie była znana współczesnym badaczom, aż do opublikowania jego korespondencji w 1937 r., natomiast praca E. Beltramię była cytowana przez M. T. Hubera. Zagadnienia te są omawiane szerzej w esejach historycznych Z. S. Olesiaka [16, 17] oraz Z. Engla [4]. Propozycja J. C. Maxwella była omawiana bardziej szczegółowo przez J. Rychlewskiego, który w swoich pracach przytoczył także fragment wspomnianego listu. Próbę energetycznego podejścia do określenia kryterium wyężenia materiałów anizotropowych podjął W. T. Burzyński [2] w swojej

INTRODUCTION

Usually the notion of effort is intuitively perceived as a feature of material which points to a change in its relation caused by the presence of both a state of stress and a state of strain [23]. It is linked to seeking a measure of effort as a certain function of stress or strain components. Its magnitude measures the distance from the adopted limit condition. The energy-based effort criterion for isotropic bodies was formulated almost a hundred years ago by T. Huber [7], where the non-dilatational strain energy hypothesis proposed, referred to limited elastic states. It must be added that the concept of the stored elastic energy of non-dilatational strain as a measure of effort had been formulated much earlier by J.C. Maxwell in his private letter to W. Thomson dated 18th December, 1856 and later by E. Beltrami [1] with regard to the complete elastic energy. The proposal by J. C. Maxwell [14] had not been known to scientists until the publication of his correspondence in 1937, whereas E. Beltrami's work was cited by M. T. Huber. These issues are discussed in greater detail in historical essays by Z. S. Olesiak [16, 17] and Z. Engel [4]. The J. C. Maxwell's proposal was analyzed in detail by J. Rychlewski, who referred to a fragment of the letter mentioned in his works. An attempt of the energy-based approach to determining an effort criterion for anisotropic materials was made by W. T. Burzyński in his doctoral dissertation written under the scientific supervision of M. T. Huber. The assumption

pracy doktorskiej wykonanej pod opieką naukową M. T. Hubera. Założenie, że stałe sprężyste spełniają pewne dodatkowe związki pozwoliło W. T. Burzyńskiemu rozdzielić energię sprężystą na części objętościową oraz postaciową dla materiałów anizotropowych z pewnymi więzami. Można wykazać, że związki te są równoważne żądaniu, aby ciśnienie hydrostatyczne było stanem bezpiecznym i prowadzi do kryterium uplastycznienia dla klasy materiałów ortotropowych z więzami w postaci podobnej do tej, która została później opublikowana przez R. Hilla [6]. Należy zauważyć, że w 1928 r. ukazała się także podstawowa praca R. von Misesa [15], w której zaproponowano postać funkcji potencjału plastycznego oraz kwadratowy warunek uplastycznienia dla materiałów anizotropowych, a w szczególności dla kryształów o symetrii kubicznej i heksagonalnej. W tym wypadku także ograniczono rozważania do sytuacji, kiedy ciśnienie hydrostatyczne jest stanem bezpiecznym, dzięki czemu ograniczono maksymalną liczbę stałych materiałowych występujących w kwadratowej funkcji potencjału plastycznego do piętnastu.

Zagadnienia związane ze sformułowaniem energetycznego kryterium plastyczności oraz określeniem potencjału plastycznego dla ciał anizotropowych stały się polską specjalnością. Zajmowali się nimi, począwszy od M. T. Hubera i W. T. Burzyńskiego, także W. Olszak i W. Urbanowski [19] oraz W. Olszak i J. Ostrowska-Maciejewska [18]. Problem ten został w pełni rozwiązany przez J. Rychlewskiego [28–31], który

that elastic constants satisfy certain additional relations allowed W. T. Burzyński to split the elastic energy into dilatational and non-dilatational parts for anisotropic materials, with certain constraints. It can be demonstrated that these relations are equivalent to the demand that hydrostatic pressure be a safe condition and they lead to the plasticity criterion for the class of orthotropic materials with constraints in the form similar to the one published later by R. Hill [6]. It must be noted that in 1928 the fundamental work by R. von Mises was published. It proposed the form of plastic potential function and square plasticity condition for anisotropic materials, especially for crystals of cubical and hexagonal symmetries. In this case the considerations were also limited to the situation where hydrostatic pressure is a safe state. Owing to this the maximum number of material constants appearing in a square function of plastic potential was reduced to fifteen.

The issues relating to the formulation of energy-based plasticity criterion and to the determination of plastic potential for anisotropic materials have become a Polish specialty. They have been dealt with by M. T. Huber and W. T. Burzyński, W. Olszak and W. Urbanowski [19], and W. Olszak and J. Ostrowska-Maciejewska [18]. The problem was fully solved by J. Rychlewski [28–31], who introduced a new concept of energy orthogonal states and proved that for a linear-elastic body of any anisotropy the elastic energy can be, at most, univocally distributed into

wprowadził nową koncepcję stanów energetycznie ortogonalnych i udowodnił, że dla ciała liniowo-sprężystego o dowolnej anizotropii energię sprężystą można rozłożyć jednoznacznie na co najwyżej sześć rozłącznych części. Stan graniczny materiału określony jest przez sumę odpowiednich udziałów energii sprężystej określonej na stanach energetycznie ortogonalnych. Udziały te są zdefiniowane przez wyznaczone doświadczalnie stałe (moduły wyężenia), które stanowią pewne wagi, z jakimi energie poszczególnych stanów energetycznie ortogonalnych wnoszą swój udział do warunku wyężenia. W szczególności dla ciał o symetrii kubicznej istnieją trzy stany ortogonalne: stan związany ze zmianami objętościowymi oraz dwa stany dewiatorowe, co prezentowali J. Ostrowska-Maciejewska i J. Rychlewski [25, 26]. Jeden ze stanów dewiatorowych związany jest z rozciągnięciem i skróceniem włókien materialnych leżących na osiach sieci regularnej, a drugi ze zmianą kątów między krawędziami komórki elementarnej. Wynik ten daje podstawę do sformułowania kryterium plastyczności opartego na warunku krańcowej wartości zmagazynowanej energii odkształcenia postaciowego [27]. Warto dodać, że w swoich pracach J. Rychlewski podkreślał także możliwość uwzględnienia bardziej ogólnej sytuacji, kiedy symetria tensora sprężystości jest różna od symetrii tensora granicznego, który występuje w kwadratowym warunku R. von Misesa, przy zachowaniu współosiowości tensorów. Należy zaznaczyć, że wiele znanych warunków granicznych ma charakter

six separable parts. The limit state of material is determined by the sum of appropriate shares of elastic energy calculated from energy orthogonal states. These shares are defined by experimentally determined constants (effort modules), which constitute certain balances with which the energies of particular energy orthogonal states contribute their shares to the effort state. For bodies of cubic symmetries in particular, there exist three orthogonal states: a state relating to changes in volume and two deviator states, which were presented by J. Ostrowska-Maciejewska and J. Rychlewski [25, 26]. One of the deviator states is associated with tension and shortening of material fibers and the other is associated with changes in angles between edges of the elementary cell. This result provides the basis for formulating the plasticity criterion based on the edge magnitude condition of the stored non-dilatational energy [27]. It is worth adding that in his works J. Rychlewski also underlined the possibility of taking into account a more general situation, where the symmetry of elasticity tensor differs from that of limit tensors which appears in the R. von Mises square condition, retaining co-axial tensors. It must be emphasized that several known limit conditions are empirical, which limits or even prevents their use in the range wider than those originally investigated. They are not known to all researchers dealing with anisotropic materials. Publications dedicated to their own elastic states or an energy-based approach to the effort criterion, can be more and

empiryczny, co ogranicza lub wręcz uniemożliwia ich stosowanie w zakresie szerszym od oryginalnie badanego. Nie są one znane szerszemu ogółowi badaczy dla materiałów anizotropowych. W literaturze spotyka się coraz częściej publikacje poświęcone zagadnieniu sprężystych stanów własnych czy też energetycznemu podejściu do kryterium wyężenia. Mają one jednak charakter wtórny w odniesieniu do omawianych. Proponowane podejście jest nowe i daje perspektywę zweryfikowania utartych poglądów na mechanikę materiałów anizotropowych, otwierając możliwość opracowania metod optymalnego doboru sztywności materiału oraz zbudowania fizycznych podstaw teorii wyężenia. Nowe i oryginalne jest także podejście do analizy lokalnych ekstremów sztywności dla stanów płaskich [3].

Wykorzystanie spostrzeżenia o uniwersalnym znaczeniu nowego podejścia opartego na jakościowej analizie tensorów Hooke'a [20–22], prowadzącej w szczególności do sprężystych stanów własnych i addytywnego rozkładu energii sprężystej na stanach energetycznie ortogonalnych, ma duże znaczenie dla przewidywania i projektowania własności oraz stanów granicznych anizotropowych materiałów i struktur na różnych poziomach obserwacji (od skali mikro i mezo do makroskopowej), a także zastosowania powyższego pomysłu do opracowania nowego podejścia do sformułowania podstaw projektowania materiałów anizotropowych i komórkowych ze względu na zadane własności i stany graniczne. Wiele wniosków i rezultatów znalazło też zastosowanie dla szerszej klasy materiałów.

more often found in literature. However, they have a secondary character in relation to the ones discussed here. The approach proposed is new and offers grounds for verifying the wide-spread views of the mechanics of anisotropic materials, paving the way to developing methods for the optimal selection of material stiffness and building physical fundamentals of effort theory. The approach to analyzing local stiffness extremes for planar states [3] is also new and original.

The realization of the universal significance of the new approach, based on the qualitative analysis of Hooke's tensors [2–22] leading, in particular, to own elasticity states and additive elastic energy distribution on energy orthogonal states, has a large significance for predicting and designing the properties and limit states of anisotropic materials, and structures at various levels of observation (from micro and mezzo scale to macroscopic), and in addition, for using the above idea to develop a new approach to formulating design fundamentals of anisotropic and cell materials with regard to pre-set properties and limit states. Several conclusions and results have been used for a wider class of materials.

THE LIMIT CONDITION AND RYCHLEWSKI ENERGY-BASED EFFORT CRITERION FOR ANISOTROPIC MATERIALS IN PLANAR STATES

For material getting deformed within the elastic range, J. Rychlewski [30] formulated and proved a theorem referred

**WARUNEK GRANICZNY
ORAZ ENERGETYCZNE KRYTERIUM
WYŁĘŻENIA RYCHLEWSKIEGO
DLA ANIZOTROPOWYCH MATERIAŁÓW
W STANACH PŁASKICH**

Dla materiału deformującego się w zakresie sprężystym J. Rychlewski [30] sformułował i udowodnił twierdzenie nazywane w pracy [24] ogólnym twierdzeniem Rychlewskiego.

Dla dowolnego ciała, którego własności sprężyste opisane są tensorem podatności \mathbf{C} (sztywności \mathbf{S}), a własności graniczne tensorem \mathbf{H} , istnieje dokładnie jeden energetycznie ortogonalny rozkład przestrzeni S (tensorów symetrycznych drugiego rzędu)

$$S = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{\kappa}, \quad \kappa \leq 6, \quad H_L \perp H_K,$$

dla $L \neq K$ i dokładnie jeden zbiór parami różnych stałych $h_1, h_2, \dots, h_{\kappa}$,

$h_{\alpha} \neq h_{\beta}$, dla $\alpha \neq \beta$, takich że

dla dowolnego naprężenia $\sigma \in S$,

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{\kappa}, \quad \sigma_K \in H_K$$

warunek graniczny $\sigma \cdot \mathbf{H} \cdot \sigma \leq 1$ przyjmie postać:

$$\sigma \cdot \mathbf{H} \cdot \sigma = \frac{1}{h_1} \phi(\sigma_1) + \dots + \frac{1}{h_{\kappa}} \phi(\sigma_{\kappa}) \leq 1, \quad (1)$$

gdzie:

where:

$$\phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) + \dots + \phi(\sigma_{\kappa}) = \phi(\sigma), \quad \phi(\sigma_K) = \frac{1}{2} \sigma_K \cdot \mathbf{C} \cdot \sigma_K = \frac{1}{2} \sigma_K \cdot \sigma_K$$

(bez sumowania / without summation)

h_{κ} — wagi energii sprężystej nazywane według [24] modułami Rychlewskiego /
balances of elastic energy referred to as Rychlewski modules in [24].

For material getting deformed within the elastic range, J. Rychlewski [30] formulated and proved a theorem referred to in the work [24], as the Rychlewski general theorem.

For any material, whose elastic properties are described with compliance tensor \mathbf{C} (stiffness \mathbf{S}), and limit properties with tensor \mathbf{H} , there exists only one energy orthogonal space distribution S (second order symmetric tensors) $S = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{\kappa}$,

$$\kappa \leq 6, \quad H_L \perp H_K, \quad \text{for } L \neq K \text{ and only}$$

one set of dyad-varied constants

$$h_1, h_2, \dots, h_{\kappa}, \quad h_{\alpha} \neq h_{\beta}, \quad \text{for } \alpha \neq \beta, \text{ such}$$

that for any stress $\sigma \in S$,

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{\kappa}, \quad \sigma_K \in H_K$$

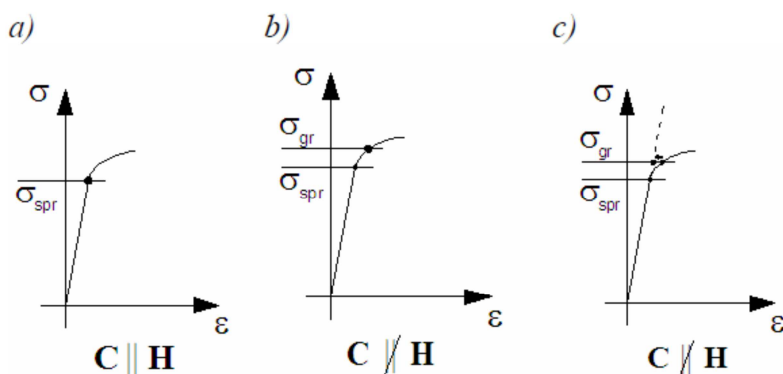
the limit condition $\sigma \cdot \mathbf{H} \cdot \sigma \leq 1$ will adopt the form:

Stanowi to podstawę do określenia kwadratowego warunku granicznego i jego specyfikacji dla symetrii prostokąta i kwadratu w bazie pokrywającej się z osiami symetrii w stanie granicznym.

This provides grounds for determining the square limit condition and its specification for rectangular and square symmetry in the base overlapping the symmetry axes in the limit condition.

Twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego jest sformułowane dla dowolnych tensorów \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H} .

The theorem relating to energy-based interpretation of the limit condition is formulated for any tensors \mathbf{S} , \mathbf{C} and \mathbf{H} .



Rys. 1. Idealizacja sprężystego stanu granicznego (σ_{spr} — kres liniowej sprężystości, σ_{gr} — stan graniczny): a) kres liniowej sprężystości; b) rzeczywiste występowanie stanu granicznego; c) przyjęty model obliczeniowy

Fig. 1. Idealization of the elastic limit state (σ_{spr} — end of linear elasticity, σ_{gr} — limit state): a) end of linear elasticity; b) real occurrence of limit state; c) the calculation model adopted

Daje to możliwość rozpatrywania różnych typów symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym. Aby podać warunek graniczny dla płaskich stanów, który ma charakter energetyczny, wykorzystano twierdzenie dotyczące energetycznej interpretacji warunku granicznego.

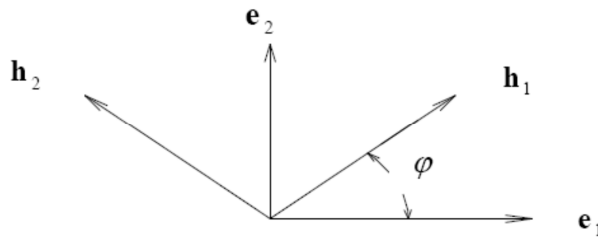
This gives the possibility to consider various types of material symmetry in the elastic state and in the limit condition. In order to offer the limit condition, which has an energy character, for planar conditions the theorem relating to energy-based interpretation of limit condition was used.

Rozpatrywany materiał jest symetryczny zarówno w stanie sprężystym, jak i w stanie granicznym. Dla stanów płaskich materiał ma wówczas co najmniej

The material under consideration is symmetrical both in the stress state and in the limit state. For planar states the material has at least a rectangular

symetrię prostokąta — jest materiałem ortotropowym. Założono, że materiał jest ortotropowy w stanie sprężystym i granicznym o różnych osiach symetrii i różnych dystrybutorach. Założono, że w stanie sprężystym osiami symetrii są kierunki \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 na płaszczyźnie fizycznej, a w stanie granicznym osiami symetrii są kierunki \mathbf{h}_1 i \mathbf{h}_2 obrócone względem \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 o kąt φ : $\mathbf{h}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$, $\mathbf{h}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$.

symmetry — it is an orthotropic material. It was assumed that the material is orthotropic in the elastic state and in the limit state of different symmetry axes and different distributors. It was assumed that in the elastic state the directions \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 on the physical plane are the axes of symmetry, and in the limit states the directions \mathbf{h}_1 and \mathbf{h}_2 turned in relation to \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 by the angle φ : $\mathbf{h}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$, $\mathbf{h}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$ are the axes of symmetry.



Rys. 2. Kierunki osi symetrii w stanach sprężystym i granicznym na płaszczyźnie fizycznej

Fig. 2. Directions of axes of symmetry in the elastic and limit states on the physical plane

Źródło / Source: J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski, *Anizotropia sprężysta i wyężenie cienkich warstw i powłok*, PAN, Kraków 2006 [*Elastic anisotropy and effort in thin layers and coatings — available in the Polish*].

Rozkłady spektralne tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p mają postać:

Spectral distributions of tensors \mathbf{C}^p and \mathbf{H}^p have the form:

$$\mathbf{C}^p = \frac{1}{\lambda_1} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \frac{1}{\lambda_2} \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \frac{1}{\lambda_3} \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III}; \quad (2)$$

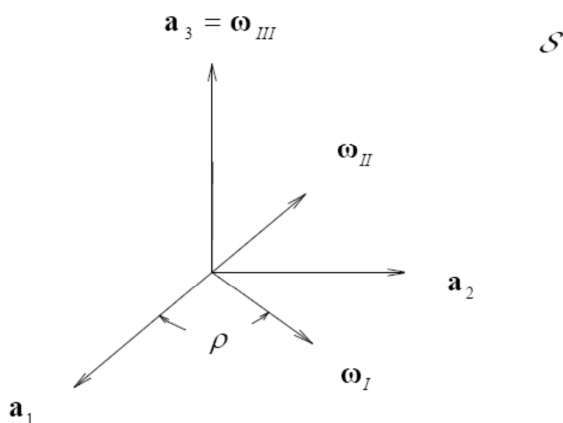
$$\mathbf{H}^p = \frac{1}{\chi_1^2} \boldsymbol{\eta}_I \otimes \boldsymbol{\eta}_I + \frac{1}{\chi_2^2} \boldsymbol{\eta}_{II} \otimes \boldsymbol{\eta}_{II} + \frac{1}{\chi_3^2} \boldsymbol{\eta}_{III} \otimes \boldsymbol{\eta}_{III}, \quad (3)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_K$ i $\boldsymbol{\eta}_L$ są stanami własnymi tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p .

where $\boldsymbol{\omega}_K$ i $\boldsymbol{\eta}_L$ are own states of tensors \mathbf{C}^p and \mathbf{H}^p .

W zakresie sprężystym osie symetrii materiału pokrywają się z kierunkami \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 , bazę w przestrzeni naprężeń S stanowią diady $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$.

They overlap directions \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 with in the elastic range, dyads $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$ constitute the base in the stress space S .

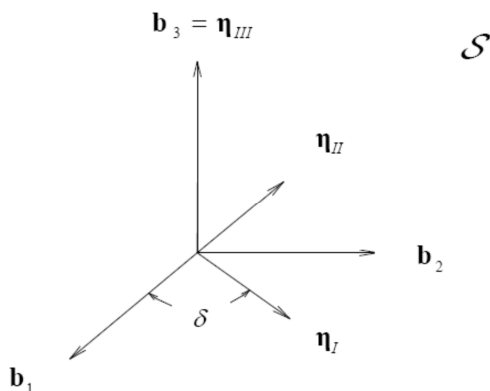


Rys. 3. Ilustracja bazy \mathbf{a}_i w przestrzeni S / Fig. 3. Illustration of the base \mathbf{a}_i in the space S

Źródło / Source: J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski, *op. cit.*

W stanie granicznym osiami symetrii materiału są osie \mathbf{h}_1 i \mathbf{h}_2 na płaszczyźnie fizycznej \mathfrak{E}_2 , w przestrzeni S bazę będą stanowiły diady $\mathbf{b}_1 = \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_2$, $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_1)$.

In the limit state the axes \mathbf{h}_1 and \mathbf{h}_2 are the axes of material symmetry on the physical plane \mathfrak{E}_2 , in the space S dyads $\mathbf{b}_1 = \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_2$, $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_1)$ will constitute the base.



Rys. 4. Ilustracja bazy \mathbf{b}_i w przestrzeni S / Fig. 4. Illustration of the base \mathbf{b}_i in the space S

Źródło / Source: J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski, *op. cit.*

Ostatecznie rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych \mathbf{C}^p ma postać [24]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= [\cos(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4})\sin(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]\boldsymbol{\omega}_I + \\ &\quad + [\sin(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4})\cos(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]\boldsymbol{\omega}_{II} + \\ &\quad - [\sin(\delta - \frac{\pi}{2})\sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}]; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= [-\sin(\delta - \rho) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4})\sin(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]\boldsymbol{\omega}_I + \\ &\quad + [\cos(\rho - \delta) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4})\cos(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]\boldsymbol{\omega}_{II} + \\ &\quad - [\cos(\delta - \frac{\pi}{2})\sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}]; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi [\sin(\rho - \frac{\pi}{4})\boldsymbol{\omega}_I + \cos(\rho - \frac{\pi}{4})\boldsymbol{\omega}_{II}] + \cos 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III},\end{aligned}$$

gdzie ρ, δ dystrybutory sztywności tensora \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p .

Idea postępowania przy wyznaczaniu asymetrycznego energetycznego warunku wyężenia polega na wykorzystaniu badań doświadczalnych uzyskanych z testów w jednoosiowych stanach naprężenia. W celu wyznaczenia asymetrycznej powierzchni granicznej dla tej samej symetrii materiału w stanie sprężystym i w stanie granicznym (tensor podatności \mathbf{C} lub sztywności \mathbf{S} jest równoległy do tensora granicznego \mathbf{H}) należy przeprowadzić następujące postępowanie [5, 8-13]:

1. Wyznaczyć tensor podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}).
2. Wyznaczyć wartości własne (λ) i osie własne ($\boldsymbol{\omega}$) tensora podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}).

Finally the distribution of own tates of tensor \mathbf{H}^p in the base of own states \mathbf{C}^p has the form [24]:

where ρ, δ distributors of tensor stiffness \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p .

The idea how to determine an asymmetric energy effort condition is based on employing the results of experimental investigations obtained from tests in one-axis stress states. In order to determine an asymmetric limit area for the same material symmetry in the elastic state and in the limit state (the compliance tensor \mathbf{C} or the stiffness tensor \mathbf{S} is parallel to the limit tensor \mathbf{H}) it is necessary to follow the following procedure [5, 8-13]:

1. Determine compliance tensor \mathbf{C} (or stiffness tensor \mathbf{S}).
2. Determine own properties (λ) and own axes ($\boldsymbol{\omega}$) of compliance tensor \mathbf{C} (or stiffness tensor \mathbf{S}).

3. Wyznaczyć macierz transformacji z układu osi głównych (osi, w których został wykonany eksperyment) do układu osi własnych tensora podatności \mathbf{C} (lub sztywności \mathbf{S}).
 4. Transformować wartości naprężeń z eksperymentu wyznaczone w osiach głównych ($\sigma_{gr,r}^1$ — naprężenie graniczne dla rozciągania względem pierwszej osi; $\sigma_{gr,r}^2$ — naprężenie graniczne dla rozciągania względem drugiej osi; $\sigma_{gr,r}^3$ — naprężenie graniczne dla rozciągania względem trzeciej osi; $\sigma_{gr,s}^1$ — naprężenie graniczne dla ściskania względem pierwszej osi; $\sigma_{gr,s}^2$ — naprężenie graniczne dla ściskania względem drugiej osi; $\sigma_{gr,s}^3$ — naprężenie graniczne dla ściskania względem trzeciej osi) do układu osi własnych ($\sigma_{gr,r}^I$ — naprężenie graniczne w I stanie własnym dla rozciągania; $\sigma_{gr,r}^{II}$ — naprężenie graniczne w II stanie własnym dla rozciągania; $\sigma_{gr,r}^{III}$ — naprężenie graniczne w III stanie własnym dla rozciągania; $\sigma_{gr,s}^I$ — naprężenie graniczne w I stanie własnym dla ściskania; $\sigma_{gr,s}^{II}$ — naprężenie graniczne w II stanie własnym dla ściskania; $\sigma_{gr,s}^{III}$ — naprężenie graniczne w III stanie własnym dla ściskania).
 5. Podstawić wartości graniczne $\sigma_{gr,r}^I$, $\sigma_{gr,r}^{II}$, $\sigma_{gr,r}^{III}$, $\sigma_{gr,s}^I$, $\sigma_{gr,s}^{II}$, $\sigma_{gr,s}^{III}$ do kryterium J. Rychlewskiego w kolejnych częściach układu osi własnych:
3. Determine the transformation matrix from the set of main axes (the axes which were used in the experiment) for the set of own axes of compliance tensor \mathbf{C} (or stiffness tensor \mathbf{S}).
 4. Transform stress magnitudes from the experiment determined on the main axes ($\sigma_{gr,r}^1$ — limit stress for tension in relation to the first axis; $\sigma_{gr,r}^2$ — limit stress for tension in relation to the second axis; $\sigma_{gr,r}^3$ — limit stress for tension in relation to the third axis; $\sigma_{gr,s}^1$ — limit stress for compression in relation to the first axis; $\sigma_{gr,s}^2$ — limit stress in relation to the second axis; $\sigma_{gr,s}^3$ — limit stress in relation to the third axis) for the set of internal axis ($\sigma_{gr,r}^I$ — limit stress in the own state I for tension; $\sigma_{gr,r}^{II}$ — limit stress in the own state II for tension; $\sigma_{gr,r}^{III}$ — limit stress in the own state III for tension; $\sigma_{gr,s}^I$ — limit stress in the own state I for compression; $\sigma_{gr,s}^{II}$ — limit stress in the own state II for compression; $\sigma_{gr,s}^{III}$ — limit stress in the own state III for compression).
 5. Use limit magnitudes $\sigma_{gr,r}^I$, $\sigma_{gr,r}^{II}$, $\sigma_{gr,r}^{III}$, $\sigma_{gr,s}^I$, $\sigma_{gr,s}^{II}$, $\sigma_{gr,s}^{III}$ in J. Rychlewski criterion in subsequent parts of the system of own axes:

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części pierwszej / in the first part}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części drugiej / in the second part}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części trzeciej / in the third part}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_r^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części czwartej / in the fourth part}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części piątej / in the fifth part}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_r^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,r}^{III})} \leq 1 \text{ w części szóstej / in the sixth part}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_s^I)}{\Phi(\sigma_{gr,s}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części siódmej / in the seventh part}$$

$$\frac{\Phi(\sigma_r^I)}{\Phi(\sigma_{gr,r}^I)} + \frac{\Phi(\sigma_s^{II})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{II})} + \frac{\Phi(\sigma_s^{III})}{\Phi(\sigma_{gr,s}^{III})} \leq 1 \text{ w części ósmej / in the eighth part}$$

gdzie / where:

$\sigma = \sigma_{r,s}^I + \sigma_{r,s}^{II} + \sigma_{r,s}^{III}$ — rozkład tensora naprężenia na stany własne /
distribution of stress tensor over own states;

$\Phi(\sigma_{r,s}^{I,II,III})$ — graniczna wartość gęstości energii sprężystej w kolejnym
stanie własnym /
limit magnitude of elastic energy density in the subse-
quent own state.

Weryfikacja proponowanego schematu postępowania została wykonana z wykorzystaniem danych doświadczalnych i dokładnie omówiona, łącznie z prezentacją wyników końcowych w pracach [5, 8–13].

To verify the set of procedures proposed experimental data was used and a thorough analysis was done together with the presentation of the final results in publications [5, 8–13].

KRYTERIUM RYCHLEWSKIEGO DLA RÓŻNYCH SYMETRII W STANACH SPRĘŻYSTYM I GRANICZNYM

W pracy [24] stanowiącej matematyczną podstawę rozważań przedstawionych w publikacjach [5, 8–13] zaprezentowana została dyskusja kryterium Rychlewskiego dla różnych symetrii. Szczególne przypadki to:

- 1) $\varphi = 0$;
- 2) $\rho = \frac{\pi}{4}$ $\varphi \neq 0$;
- 3) $\delta = \frac{\pi}{4}$ $\varphi \neq 0$;
- 4) $\rho = \delta$ $\varphi \neq 0$.

Gdy $\varphi = 0$, otrzymujemy przypadek, kiedy osie symetrii w stanie sprężystym i granicznym pokrywają się ($\mathbf{e}_i = \mathbf{h}_i$), wówczas rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych \mathbf{C}^p ma postać [24]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= \cos(\delta - \rho)\boldsymbol{\omega}_I + \sin(\delta - \rho)\boldsymbol{\omega}_{II}; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= -\sin(\delta - \rho)\boldsymbol{\omega}_I + \cos(\delta - \rho)\boldsymbol{\omega}_{II}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \boldsymbol{\omega}_{III}.\end{aligned}$$

Gdy $\rho = \frac{\pi}{4}$ $\varphi \neq 0$, osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i granicznym nie pokrywają się i materiał w stanie sprężystym jest materiałem o symetrii kwadratu (kubicznej), a rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych \mathbf{C}^p ma postać [24]:

RYCHLEWSKI CRITERION FOR VARIOUS SYMMETRIES IN THE ELASTIC STATE AND THE LIMIT STATE

Publication [24], which is a mathematical base for the considerations presented in publications [5, 8–13], contains the discussion of Rychlewski criterion with regard to various symmetries. The special cases are as follows:

When $\varphi = 0$, occurs a case where the symmetry axes in the elastic and limit states overlap ($\mathbf{e}_i = \mathbf{h}_i$), then the distribution of internal tensor of the tensor \mathbf{H}^p in the base of own states \mathbf{C}^p has the form [24]:

When $\rho = \frac{\pi}{4}$ $\varphi \neq 0$, the symmetry axes do not overlap on the physical plane in the elastic and limit states, and the material in the elastic condition is a material of square symmetry (cubic), and the distribution of own states of tensor \mathbf{H}^p in the base of own states \mathbf{C}^p has the form [24]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= \cos\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I + \sin\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{II} - \sin\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)\sin 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= -\sin\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I + \cos\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{II} - \sin 2\varphi\cos\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_{III}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{II} + \cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}.\end{aligned}$$

Jeżeli ponadto $\delta = \frac{\pi}{4}$, wówczas materiał jest materiałem o symetrii kubicznej także w stanie granicznym:

If additionally $\delta = \frac{\pi}{4}$, then the material is a material of cubic symmetry in the limit state also:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= \boldsymbol{\omega}_I; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= \cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{II} - \sin 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{II} + \cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}.\end{aligned}$$

Jeżeli do ogólnego wzoru zostanie podstawione $\rho = \delta = \frac{\pi}{4}$ i $\varphi \neq 0$, to:

If $\rho = \delta = \frac{\pi}{4}$ and $\varphi \neq 0$, are substituted in the general formula, then:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= \boldsymbol{\omega}_I; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= \cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{II} - \sin 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{II} + \cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}.\end{aligned}$$

Gdy $\delta = \frac{\pi}{4}$, $\varphi \neq 0$, to osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i w stanie granicznym nie pokrywają się i w stanie granicznym materiał ma symetrię kwadratu (kubiczną), a rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych \mathbf{C}^p ma postać [24]:

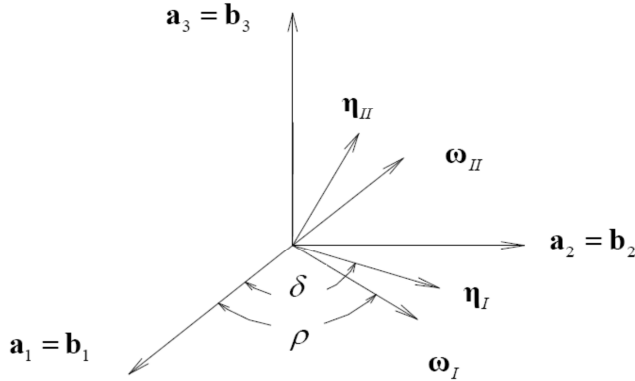
When $\delta = \frac{\pi}{4}$, $\varphi \neq 0$, the symmetry axes of the material on the physical plane in the elastic and limit states do not overlap and the material has the square symmetry (cubic), and the distribution of own states of tensor \mathbf{H}^p in the base of own states \mathbf{C}^p has the form [24]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I - \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_{II}; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= \cos 2\varphi\left[\sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I - \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_{II}\right] - \sin 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi\left[\sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I + \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_{II}\right] + \cos 2\varphi\boldsymbol{\omega}_{III}.\end{aligned}$$

Jeżeli $\rho = \frac{\pi}{4}$, to:

If $\rho = \frac{\pi}{4}$, then:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= \boldsymbol{\omega}_I; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= \cos 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{II} - \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{II} + \cos 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}.\end{aligned}$$



Rys. 5. Ilustracja przypadku, gdy osie symetrii w stanie sprężystym i granicznym pokrywają się, ale różne są dystrybutory stanów własnych $\boldsymbol{\eta}_L$ tensora \mathbf{H}^P i stanów własnych $\boldsymbol{\omega}_K$ tensora \mathbf{C}^P

Fig. 5. Illustration of the case when the symmetry axes in the elastic and limit states overlap, but distributors of internal states $\boldsymbol{\eta}_L$ of tensor \mathbf{H}^P and own states $\boldsymbol{\omega}_K$ of tensor \mathbf{C}^P

Źródło / Source: J. Ostrowska-Maciejewska, R. B. Pęcherski, *op. cit.*

Gdy $\varphi \neq 0$ $\rho = \delta$, to osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej nie pokrywają się, ale materiał o takich samych dystrybutorach jest tak samo symetryczny w stanie sprężystym i w stanie granicznym, a rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^P w bazie stanów własnych \mathbf{C}^P ma postać [24]:

When $\varphi \neq 0$ $\rho = \delta$, then the symmetry axes of the material on the physical plane do not overlap, but the material having the same distributors is identically symmetrical in the elastic and limit states, and the distribution of own states of tensor \mathbf{H}^P in the base of own states \mathbf{C}^P has the form [24]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_I &= \boldsymbol{\omega}_I - \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\left\{(1 - \cos 2\varphi)\left[\sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I + \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_{II}\right] + \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}\right\}; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= \boldsymbol{\omega}_{II} - \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\left\{(1 - \cos 2\varphi)\left[\sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I + \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_{II}\right] - \sin 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}\right\}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \sin 2\varphi\left[\sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_I + \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\omega}_{II}\right] + \cos 2\varphi \boldsymbol{\omega}_{III}.\end{aligned}$$

Uwzględniając współosiowość $\varphi = 0$,
otrzymujemy:

When taking into account coaxiality
 $\varphi = 0$, obtained are:

$$\boldsymbol{\eta}_I = \boldsymbol{\omega}_I;$$

$$\boldsymbol{\eta}_{II} = \boldsymbol{\omega}_{II};$$

$$\boldsymbol{\eta}_{III} = \boldsymbol{\omega}_{III}.$$

Analizując przypadek $\varphi = 0$, gdy osie symetrii w przestrzeni fizycznej pokrywają się w stanie sprężystym i w stanie granicznym, a następnie uwzględniając odpowiednie tożsamości trygonometryczne [24] i wykorzystując rozkład spektralny tensora \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p oraz rozkład tensora stanu granicznego w dyadach stanów własnych tensora sprężystości, otrzymujemy [24]:

Analyzing the case $\varphi = 0$, when the symmetry axes in the physical space overlap in the elastic and limit states, and then taking into account appropriate trigonometric identities [24] and using the spectral distribution of tensors \mathbf{C}^p and \mathbf{H}^p , and the distribution of limit state tensor in the dyads of own states of elasticity tensor, obtained is [24]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^p = & \left[\frac{1}{2\chi_1^2} (1 + \cos 2(\delta - \rho)) + \frac{1}{2\chi_2^2} (1 - \cos 2(\delta - \rho)) \right] \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \\ & + \left[\frac{1}{2\chi_1^2} (1 - \cos 2(\delta - \rho)) + \frac{1}{2\chi_2^2} (1 + \cos 2(\delta - \rho)) \right] \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \\ & + \frac{1}{\chi_3^2} \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III} + \left[\frac{1}{2} \sin 2(\delta - \rho) \left(\frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right) \right] (\boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_I). \end{aligned}$$

Dla $\delta = \rho$ (główny rozkład energetyczny) stany własne \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p pokrywają się i są współosiowe. Stany własne $\boldsymbol{\omega}_K$ są stanami energetycznie ortogonalnymi, jeżeli $\sin 2(\delta - \rho) \left(\frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right) = 0$. Dla założenia $\frac{1}{\chi_1^2} = \frac{1}{\chi_2^2}$ wyrażenie na \mathbf{H}^p można zapisać:

For $\delta = \rho$ (the main energy distribution) the own states \mathbf{C}^p and \mathbf{H}^p overlap and are coaxial. The own states $\boldsymbol{\omega}_K$ are energy orthogonal states, if $\sin 2(\delta - \rho) \left(\frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right) = 0$. For the assumption $\frac{1}{\chi_1^2} = \frac{1}{\chi_2^2}$ the expression relating to \mathbf{H}^p can be written as below:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^p = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\chi_1^2} + \frac{1}{\chi_2^2} + \cos 2(\delta - \rho) \left(\frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right) \right] \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\chi_1^2} + \frac{1}{\chi_2^2} - \cos 2(\delta - \rho) \left(\frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right) \right] \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \\ & + \frac{1}{\chi_3^2} \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III} + \frac{1}{2} \sin 2(\delta - \rho) \left(\frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{\chi_2^2} \right) (\boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_I). \end{aligned}$$

Następnie, uwzględniając warunek graniczny Misesa, z wykorzystaniem energetycznego iloczynu skalarnego wraz z rozkładem spektralnym tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p oraz rozkładem tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych tensora \mathbf{C}^p , można wyznaczyć dla płaskiego stanu specyfikację warunku granicznego Rychlewskiego poprzez uzyskanie głównego rozkładu energetycznego tensora granicznego \mathbf{H}^p .

Energetyczne stany własne, a zatem i specyfikacja energetycznego warunku wyężenia Rychlewskiego (1) dla prezentowanego przypadku, będą równe [24]:

$$\frac{1}{h_1} = \frac{2\lambda_1}{\chi_1^2}, \quad \frac{1}{h_2} = \frac{2\lambda_2}{\chi_2^2}, \quad h_3 = \frac{\chi_3^2}{2\lambda_3}.$$

Prowadzi to wyspecyfikowania następującego kryterium wyężenia:

$$\frac{(\cos \rho \sigma_{11} + \sin \rho \sigma_{22})^2}{\chi_1^2} + \frac{(-\sin \rho \sigma_{11} + \cos \rho \sigma_{22})^2}{\chi_2^2} + \frac{2\sigma_{12}^2}{\chi_3^2} \leq 1.$$

Równanie to zależy od modułów Kelwina λ_i , $i=1,2,3$, wartości własnych tensora stanu granicznego χ_i , $i=1,2,3$ oraz dystrybutora sprężystości ρ i dystrybutora stanów własnych granicznych δ (w omawianym przypadku $\delta = \rho$).

Then, taking into account Mises limit condition, using energy scalar product along with the spectral distribution of tensors \mathbf{C}^p and the distribution of tensor \mathbf{H}^p in the base of internal conditions of tensor \mathbf{C}^p , it is possible to determine the specification for Rychlewski limit condition for the planar state through obtaining the main energy distribution of limit tensor \mathbf{H}^p .

Own energy states, and consequently the specification for Rychlewski energy effort condition (1) for the case presented will be equal to [24]:

This leads to specifying the following effort criterion:

The equation depends on Kelvin module λ_i , $i=1,2,3$, own properties of the limit state tensor χ_i , $i=1,2,3$, the elasticity distributor ρ and the distributor of own limit states δ (in the case discussed $\delta = \rho$).

Warto również rozważyć przypadek najbardziej ogólny, gdy: $\varphi \neq 0$ $\rho \neq \delta$, wówczas osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i granicznym nie pokrywają się i materiał w stanie sprężystym ma inną symetrię niż w stanie granicznym. Rozkład stanów własnych tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych \mathbf{C}^p ma postać:

It is also worth considering the most general case, when: $\varphi \neq 0$ $\rho \neq \delta$, then the symmetry axes of material on the physical plane in the elastic and limit states do not overlap and the material in the elastic state has a different symmetry than in the limit state. The distribution of own states of tensor \mathbf{H}^p in the base of own states \mathbf{C}^p has the form:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_I &= \overbrace{[\cos(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4})\sin(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]}^A \begin{bmatrix} \cos \rho & 0 \\ 0 & \sin \rho \end{bmatrix} + \\ &+ \overbrace{[\sin(\delta - \rho) - \sin(\delta - \frac{\pi}{4})\cos(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]}^B \begin{bmatrix} -\sin \rho & 0 \\ 0 & \cos \rho \end{bmatrix} + \\ &\quad \overbrace{-[\sin(\delta - \frac{\pi}{2})\sin 2\varphi]}^C \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{\eta}_{II} &= \overbrace{[-\sin(\delta - \rho) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4})\sin(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]}^D \begin{bmatrix} \cos \rho & 0 \\ 0 & \sin \rho \end{bmatrix} + \\ &+ \overbrace{[\cos(\delta - \rho) - \cos(\delta - \frac{\pi}{4})\cos(\rho - \frac{\pi}{4})(1 - \cos 2\varphi)]}^E \begin{bmatrix} -\sin \rho & 0 \\ 0 & \cos \rho \end{bmatrix} + \\ &\quad \overbrace{-[\cos(\delta - \frac{\pi}{2})\sin 2\varphi]}^F \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{\eta}_{III} &= \overbrace{\sin 2\varphi \sin(\rho - \frac{\pi}{4})}^G \begin{bmatrix} \cos \rho & 0 \\ 0 & \sin \rho \end{bmatrix} + \overbrace{\sin 2\varphi \cos(\rho - \frac{\pi}{4})}^H \begin{bmatrix} -\sin \rho & 0 \\ 0 & \cos \rho \end{bmatrix} + \\ &\quad + \overbrace{\cos 2\varphi}^I \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie stany własne w osiach symetrii materiału mają postać:

where the own states on the symmetry axes have the form:

$$\mathfrak{w}_I = \begin{bmatrix} \cos \rho & 0 \\ 0 & \sin \rho \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_{II} = \begin{bmatrix} -\sin \rho & 0 \\ 0 & \cos \rho \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w}_{III} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując rozkład spektralny tensora \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p oraz rozkład tensora stanu granicznego w diadach stanów własnych tensora sprężystości, otrzymujemy:

Using the spectral distribution of tensors \mathbf{C}^p and \mathbf{H}^p and the distribution of the limit state in dyads of own states of elasticity tensor, obtained is:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^p = & \overbrace{\left[\frac{1}{\chi_1^2} A^2 + \frac{1}{\chi_2^2} D^2 + \frac{1}{\chi_3^2} G^2 \right]}^{A_{11}} \mathfrak{w}_I \otimes \mathfrak{w}_I + \\ & \overbrace{\left[\frac{1}{\chi_1^2} B^2 + \frac{1}{\chi_2^2} E^2 + \frac{1}{\chi_3^2} H^2 \right]}^{A_{22}} \mathfrak{w}_{II} \otimes \mathfrak{w}_{II} + \\ & \overbrace{\left[\frac{1}{\chi_1^2} C^2 + \frac{1}{\chi_2^2} F^2 + \frac{1}{\chi_3^2} I^2 \right]}^{A_{33}} \mathfrak{w}_{III} \otimes \mathfrak{w}_{III} + \\ & \overbrace{\left[\frac{1}{\chi_1^2} AB + \frac{1}{\chi_2^2} DE + \frac{1}{\chi_3^2} GH \right]}^{A_{12}} (\mathfrak{w}_I \otimes \mathfrak{w}_{II} + \mathfrak{w}_{II} \otimes \mathfrak{w}_I) + \\ & \overbrace{\left[\frac{1}{\chi_1^2} (-AC) + \frac{1}{\chi_2^2} (-DF) + \frac{1}{\chi_3^2} (-GI) \right]}^{A_{13}} (\mathfrak{w}_I \otimes \mathfrak{w}_{III} + \mathfrak{w}_{III} \otimes \mathfrak{w}_I) + \\ & \overbrace{\left[\frac{1}{\chi_1^2} (-BC) + \frac{1}{\chi_2^2} (-EF) + \frac{1}{\chi_3^2} (-HI) \right]}^{A_{23}} (\mathfrak{w}_{II} \otimes \mathfrak{w}_{III} + \mathfrak{w}_{III} \otimes \mathfrak{w}_{II}). \end{aligned}$$

Uwzględniając warunek graniczny Misesa, po wykorzystaniu energetycznego iloczynu skalarnego, otrzymamy $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \bullet (\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \bullet \boldsymbol{\sigma}$, ponieważ $\mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{L} \circ \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{I}_S$. Dla operatora symetrycznego $\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}$ ma sens rozpatrywanie zagadnienia na

Taking into account Mises limit condition, after the energy scalar product is used, the following is obtained $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \bullet (\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \bullet \boldsymbol{\sigma}$, because $\mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{L} \circ \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{I}_S$. It makes sense for the symmetric operator $\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}$ to consider the issue of

energetyczne wartości własne i energetyczne stany własne $(\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \boldsymbol{\chi}$.

Stąd wynika, że $\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\chi}$ lub

$$(\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}.$$

Aby istniały niezerowe rozwiązania układu jednorodnego, musi być spełniony warunek $\det(\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C}) = 0$.

Tensor $\mathbf{K} = \mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C}$ jest zatem tensorem osobliwym. Wykorzystując rozkład spektralny tensorów \mathbf{C}^p i \mathbf{H}^p oraz rozkład tensora \mathbf{H}^p w bazie stanów własnych tensora \mathbf{C}^p , można zapisać dla płaskiego stanu

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C} = \frac{1}{\chi_1^2} \boldsymbol{\eta}_I \otimes \boldsymbol{\eta}_I + \frac{1}{\chi_2^2} \boldsymbol{\eta}_{II} \otimes \boldsymbol{\eta}_{II} \otimes \frac{1}{\chi_3^2} \boldsymbol{\eta}_{III} \otimes \boldsymbol{\eta}_{III} +$$

$$-\frac{1}{2h} \left(\frac{1}{\lambda_1} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \frac{1}{\lambda_2} \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} + \frac{1}{\lambda_3} \boldsymbol{\omega}_{III} \otimes \boldsymbol{\omega}_{III} \right).$$

Następnie uwzględniając reprezentację tensora \mathbf{K} w bazie $\boldsymbol{\omega}$ oraz to, że $\det \mathbf{K} = 0$, można wyznaczyć dla płaskiego stanu specyfikację warunku granicznego Rychlewskiego poprzez uzyskanie głównego rozkładu energetycznego tensora granicznego \mathbf{H}^p , co będzie ostatecznie sprowadzało się do rozwiązania równania ze względu na h :

$$\overbrace{[8 A_{11} A_{22} A_{33} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 8 A_{11} A_{23}^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 16 A_{12} A_{13} A_{22} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 8 A_{13}^2 A_{22} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]}^a} h^3 +$$

$$+ \overbrace{[-4 A_{11} A_{22} \lambda_1 \lambda_2 - 4 A_{11} A_{33} \lambda_1 \lambda_3 - 4 A_{22} A_{33} \lambda_2 \lambda_3 + 4 A_{23}^2 \lambda_2 \lambda_3 + 8 A_{12}^2 \lambda_1 \lambda_2 + 4 A_{13}^2 \lambda_1 \lambda_3]}^b} h^2 +$$

$$\overbrace{[2 A_{22} \lambda_2 + 2 A_{33} \lambda_3 + 2 A_{11} \lambda_1]}^c} h + \overbrace{(-1)}^d} = 0.$$

own energy magnitudes and own energy states $(\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \boldsymbol{\chi}$.

Hence, it follows that $\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\chi}$

$$\text{or } (\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}.$$

For the non-zero solutions of the homogenous set to exist the condition $\det(\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C}) = 0$ must be satisfied.

Therefore tensor $\mathbf{K} = \mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C}$ is a singular tensor. Using the spectral distribution of tensors \mathbf{C}^p and \mathbf{H}^p and the distribution of tensor \mathbf{H}^p in the base of own states of tensor \mathbf{C}^p can be written for the compliance state

Przyjmując, że $a \neq 0$, $h = y - \frac{b}{3a}$,

otrzymamy $y^3 + 3py + 2q = 0$,

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Liczba rozwiązań rzeczywistych zależy od wyróżnika $\Delta = q^2 + p^3$:

- jeżeli $\Delta > 0$, równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone;
- jeżeli $\Delta = 0$, to w przypadku $p = q = 0$ równanie ma jeden pierwiastek trzykrotny równy zero, a w przypadku $p^3 = -q^2 \neq 0$ równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest dwukrotny;
- jeżeli $\Delta < 0$, równanie ma trzy różne pierwiastki.

Interesuje nas przypadek, gdy $\Delta < 0$, a więc

$$p < 0, q^2 + p^3 \leq 0, r = \eta \sqrt{|p|},$$

gdzie:

$$\eta = \pm 1, \cos \Phi = \frac{q}{r^3} \Rightarrow \Phi = \arccos \frac{q}{r^3}, y_1 = -2r \cos \frac{1}{3} \Phi,$$

$$y_2 = 2r \cos(60^\circ - \frac{1}{3} \Phi), y_3 = 2r \cos(60^\circ + \frac{1}{3} \Phi).$$

Energetyczne stany własne, a zatem i specyfikacja energetycznego warunku wyłączenia Rychlewskiego (1) dla przypadku, gdy osie symetrii materiału w płaszczyźnie fizycznej w stanie sprężystym i granicznym nie pokrywają się i materiał w stanie sprężystym ma inną symetrię niż w stanie granicznym, będą równe:

Assuming that $a \neq 0$, $h = y - \frac{b}{3a}$,

we obtain $y^3 + 3py + 2q = 0$,

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

The number of real solutions depends on discriminant $\Delta = q^2 + p^3$:

- if $\Delta > 0$, the equation has one real root and two complex roots;
- if $\Delta = 0$, then in the case $p = q = 0$ the equation has one triple root equal to zero, and in the case $p^3 = -q^2 \neq 0$ the equation has two real roots, one of which is double;
- if $\Delta < 0$, the equation has three different roots.

We are interested in the case when $\Delta < 0$, therefore

where:

The own energy states, and so the specification for the Rychlewski effort energy condition (1) for the case where the symmetry axes of material on the physical plane in the elastic and limit states do not overlap, and the material in the elastic state has different symmetry than in the limit state, will be equal to:

$$h_1 = y_1 - \frac{b}{3a}, h_2 = y_2 - \frac{b}{3a}, h_3 = y_3 - \frac{b}{3a}.$$

Tak wyspecyfikowany warunek energetyczny można zastosować do oceny wyęczenia materiałów anizotropowych.

WNIOSKI

Prezentowana analiza energetycznego kryterium J. Rychlewskiego dla różnych symetrii w stanie sprężystym i granicznym pozwala wyspecyfikować to kryterium wyęczenia. W artykule zaproponowano teoretyczny model opisujący różnorodne układy związane z oceną wpływu anizotropii sprężystej oraz wyęczenia materiału na jego wytrzymałość oraz własności funkcjonalne związane z przeznaczeniem i zastosowaniem. Wspomniane układy mogą charakteryzować się różnymi symetriaми własności sprężystych i stanu granicznego materiału. Podstawą prezentowanych rozważań jest anizotropowy materiał charakteryzujący się w ogólności różnymi symetriaми w zakresie sprężystym oraz w stanie granicznym.

Prezentowane podejście daje możliwość zastosowania energetycznego kryterium J. Rychlewskiego [28–31] do oceny wyęczenia materiałów, które cechuje różnica własności wytrzymałościowych, a zatem i asymetria zakresu sprężystego. Takie podejście przedstawione w [5, 8–13] do analizy energetycznego kryterium wyęczenia J. Rychlewskiego pozwala na wykorzystanie jednoosiowych testów doświadczalnych do określenia wyęczenia materiału oraz daje podstawę do wyznaczenia modułów Rychlewskiego h_k , a więc tensora stanu granicznego \mathbf{H} .

The energy condition specified this way can be used for assessing effort in anisotropic materials.

CONCLUSIONS

The analysis presented of Rychlewski energy criterion for various symmetries in the elastic and limit states can be used to specify an effort criterion. This paper offers a theoretical model describing various sets relating to assessment of the effect of elastic anisotropy and effort in a material on its strength and functional properties with regard to designation and use. The sets mentioned can be characterized by different symmetries of elastic properties and material limit state. The basis for the considerations presented is anisotropic material characterized, in general, by different symmetries within the elastic range and in a limit state.

The approach presented offer a possibility of using Rychlewski energy-based criterion [28–31] to assess effort in materials which are characterized by differences in strength properties, and so asymmetry of elastic range. The approach to analysis of Rychlewski effort energy criterion, presented in [5, 8–13], allows using one-axis experimental tests to determine effort in a material and provides a base for determining Rychlewski modules h_k , an so limit state tensor \mathbf{H} .

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] Beltrami E., *Sulla condizioni di resistenza dei corpi elastici*, Rend. 1st. Lomb., II, 18–27, 1885 (także/also: *Opere matem*, Milano, 1920, t. IV, 180–189).
- [2] Burzyński W. T., *Studium nad hipotezami wyężenia*, Lwów 1928 (także/also: *Dzieła wybrane*, t. I, PWN, Warszawa 1982, 67–257) [*Study on effort hypothesis — available in the Polish*].
- [3] Blinowski A., Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J., *Two-dimensional Hooke's tensors-isotropic decomposition, effective symmetry criteria*, 'Arch. Mech.', 1996, No 48, pp. 325–345.
- [4] Engel E., *Historical aspects of Huber's works*, in: M. Pietrzyk, J. Kusiak, L. Sadok, Z. Engel (eds.), *Huber's Yield Criterion in Plasticity*, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 1994, pp. 1–7.
- [5] Hebda M., Kordzikowski P., *Energetyczne kryterium Rychlewskiego zastosowane do oceny wyężenia kompozytów włóknistych wykazujących efekt różnicy wytrzymałości*, 'Rudy i Metale Nieżelazne', 2009, Vol. 54, No 11, pp. 716–723 [*Rychlewski energy criterion used for assessing effort in fibrous composites demonstrating difference in strength effect — available in the Polish*].
- [6] Hill R., *Theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals*, 'Proc. Roy. Soc.', 1948, A193, pp. 281–297.
- [7] Huber M. T., *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału. Przyczynek do podstaw teorii wytrzymałości*, 'Czasopismo Techniczne', 1904, Vol. XXII, No 3, pp. 38–40, No 4, pp. 49–50, No 5, pp. 61–63, No 6, pp. 80–81 (także/also: *Pisma*, t. II, PWN, Warszawa 1956) [*Proper strain work as a measure of effort in a material. A contribution to fundamentals of the theory of strength — available in the Polish*].
- [8] Kordzikowski P., *Zastosowanie energetycznego kryterium Rychlewskiego do oceny wyężenia anizotropowych cienkich warstw wykazujących efekt różnicy wytrzymałości*, 'Rudy i Metale Nieżelazne', 2007, Vol. 52, No 11, pp. 689–695 [*Using Rychlewski energy criterion for assessing effort thin anisotropic layers demonstrating the difference in strength effect — available in the Polish*].
- [9] Kordzikowski P., *Zastosowanie energetycznego kryterium Rychlewskiego do oceny wyężenia anizotropowych materiałów wykazujących efekt różnicy wytrzymałości*, XII Krajowa Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Mechaniki Pękania, Politechnika Krakowska, Kraków 2009 [*Using Rychlewski energy criterion for assessing effort in anisotropic materials demonstrating the difference in strength effect — available in the Polish*].
- [10] Kordzikowski P., *Zastosowanie energetycznego kryterium Rychlewskiego do oceny wyężenia anizotropowych materiałów wykazujących efekt różnicy wytrzymałości*, 'Czasopismo Techniczne' seria 'Mechanika', 3-M/2010, Vol. 107, No 9, pp. 65–74 [*Using Rychlewski energy criterion for assessing thin anisotropic layers demonstrating the difference in strength effect — available in the Polish*].
- [11] Kordzikowski P., Pęcherski R. B., *Próba rozszerzenia kryterium energetycznego Rychlewskiego w zastosowaniu do oceny wyężenia wybranych materiałów anizotropowych z asymetrią zakresu sprężystego*, 'Rudy i Metale Nieżelazne', 2010, Vol. 55, No 2, pp. 89–95 [*An attempt to expand Rychlewski energy criterion used for assessing effort in selected anisotropic materials with asymmetry of elastic range — available in the Polish*].
- [12] Kordzikowski P., Pęcherski R. B., *Assessment of the material strength of anisotropic materials with asymmetry of the elastic range*, 'Mechanics and Control', 2010, Vol. 29, No 2, pp. 57–62.
- [13] Kordzikowski P., *Wyężenie wybranych materiałów anizotropowych z asymetrią zakresu sprężystego*, 'Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej', 2012, No 3, pp. 51–74.
- [14] Maxwell J. C., *Origins of Clerk Maxwell's electric ideas described in familiar letters to William Thompson*, 'Proc. Cambridge Phil. Soc.', 1936, No 32, Part V (also ed. by J. Larmor, Cambridge Univ. Press, 1937, pp. 31–33).

- [15] Mises R., *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, ZAMM, 1928, No 8, pp. 161–185 [also: *Selected papers of Richard von Mises*, I, ed. by Ph. Frank et al., 'American Mathematical Society', Providence, 1963, pp. 251–293].
- [16] Olesiak Z. S., *O warunku plastyczności Hubera-Misesa*, 'Mechanika Teoretyczna i Stosowana', 1975, No 13, pp. 523–528 [On Huber-Mises plasticity condition — available in the Polish].
- [17] Olesiak Z. S., *Professor Maksymilian Tytus Huber. His Life and Activity*, 'Eur. J. Mech. A/Solids', 2000, No 19, special issue S101-S119.
- [18] Olszak W., Ostrowska-Maciejewska J., *The plastic potential in the theory of anisotropic elastic-plastic solids*, 'Eng. Fracture Mech.', 1985, No 21, pp. 625–632.
- [19] Olszak W., Urbanowski W., *The plastic potential in the theory of anisotropic elastic-plastic bodies*, 'Arch. Mech.', 1956, No 8, pp. 671–694.
- [20] Ostrowska-Maciejewska J., *Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1982.
- [21] Ostrowska-Maciejewska J., *Mechanika ciała odkształcalnych*, PWN — PAN, Warszawa 1994 [Mechanics of strained bodies — available in the Polish].
- [22] Ostrowska-Maciejewska J., *Podstawy i zastosowania rachunku tensorowego*, PAN, Warszawa 2007 [Fundamentals and applications of tensor calculus — available in the Polish].
- [23] Ostrowska-Maciejewska J., Kowalczyk-Gajewska K., *Matematyczne podstawy anizotropii sprężystej z przykładami*, wykłady, Wydział Inżynierii Łądowej, Politechnika Krakowska, Kraków 2004 [Mathematical bases of elastic anisotropy with examples — available in the Polish].
- [24] Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R. B., *Anizotropia sprężysta i wyężenie cienkich warstw i powłok*, PAN, Kraków 2006 [Elastic anisotropy and effort in thin layers and coatings — available in the Polish].
- [25] Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J., *Plane elastic states in anisotropic solids*, 'Arch. Mech.', 1988, No 40, pp. 379–368.
- [26] Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J., *Generalized proper states for anisotropic elastic materials*, 'Arch. Mech.', 2001, No 53, pp. 501–518.
- [27] Pęcherski R. B., Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J., *Energetyczne kryterium uplastycznienia dla monokryształów o sieci RSC*, 'Rudy i Metale Nieżelazne', 2001, Vol. 46, pp. 639–644 [An energy-based criterion for plasticizing RSC mono-crystals — available in the Polish].
- [28] Rychlewski J., *CEIIINOSSSTTUV: Matematyczna struktura ciał sprężystych*, Inst. Problem Mechaniki AN SSSR, reprint 217, Moskwa 1983 (w j. rosyjskim/in the Russian) [Mathematical structure of elastic Bodies — available in the Polish].
- [29] Rychlewski R., *On Hooke's law*, 'PMM', 1984, No 48, pp. 420–435 (tłum. ang./trans. in the English 'Prikl. Matem. Mekhan', No 48, pp. 303–314).
- [30] Rychlewski J., *Elastic energy decomposition and limit criteria*, 'Uspekhi Mekh. — Advances in Mech.', 1984, Vol. 7, pp. 51–80 (w j. rosyjskim/in the Russian).
- [31] Rychlewski J., *Unconventional approach to linear elasticity*, 'Arch. Mech.', 1995, Vol. 47, pp. 149–171.