dr Andrzej Antoni CZAJKOWSKI

University of Szczecin, Faculty of Mathematics and Physics, Department of Informatics and Technical Education
Uniwersytet Szczeciński, Wydział Matematyczno-Fizyczny, Katedra Edukacji Informatycznej i Technicznej
Higher School of Technology and Economics in Szczecin, Informatics and Technical Education
Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Szczecinie, Edukacja Techniczno-Informatyczna

ZWIĄZEK REKURENCYJNY ORAZ ZALEŻNOŚCI I RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE DLA WIELOMIANÓW LEGENDRE'A

Streszczenie

Wstęp i cel: W pracy przedstawiono związek rekurencyjny, zależności różniczkowe i równanie różniczkowe dla wielomianów Legendre'a. Celem rozważań było przeprowadzenie dowodów omawianych własności.
Materiał i metody: Materiał stanowiły wybrane zależności rekurencyjne i równanie różniczkowe uzyskane z literatury przedmiotu. W przeprowadzonych dowodach zastosowano metodę dedukcji.
Wyniki: Pokazano dowód twierdzenia o funkcji tworzącej dla wielomianów Legendre'a stosując metodę residuum funkcji. Przeprowadzono dowód związku rekurencyjnego, czterech zależności różniczkowych oraz równania różniczkowego dla wielomianów Legendre'a.
Wnioski: Pochodną wielomianu Legendre'a wyrażoną przez wielomiany Legendre'a można określić z równania $(1-z^2)P'_n(z) = nP_{n-1}(z) - nzP_n(z)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wielomian Legendre'a $u=P_n(z)$ jest całką szczególną równania $[(1-z^2)u']'+n(n+1)u = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Słowa kluczowe: Wielomiany Legendre'a, związek rekurencyjny, zależności różniczkowe, równanie różniczkowe.

(Otrzymano: 5.08.2014; Zrecenzowano: 15.09.2014; Zaakceptowano: 20.10.2014)

RECURRENCE FORMULA, DIFFERENTIAL PROPERTIES AND DIFFERENTIAL EQUATION FOR LEGENDRE POLYNOMIALS

Abstract

Introduction and aim: *The paper presents a recurrence formula, some differential compounds and differential equation for Legendre polynomials. The aim of the discussion was to give some proofs of presented dependences.*
Material and methods*: Selected material based on a recurrence formula, some differential compounds and differential equation has been obtained from the right literature. In presented proofs of theorems was used a deduction method.*
Results: *Has been shown some proof of the theorem of the generating function for Legendre polynomials by using the method of function residue. It has been done the proof of recurrence formula, some proofs of four differential compounds and differential equation for Legendre polynomials.*
Conclusions: *Some derivative of Legendre polynomial expressed by Legendre polynomials can be determined from the equation* $(1-z^2)P'_n(z) = nP_{n-1}(z) - nzP_n(z)$ *for* $n = 1, 2, \ldots$ *. Legendre polynomial* $u=P_n(z)$ *is the particular integral solution of the equation* $[(1-z^2)u']'+n(n+1)u = 0$ *for* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *.*

Keywords: *Legendre polynomials, recurrence formula, differential compounds, differential equation.*

(Received: 5.08.2014; Revised: 15.09.2014; Accepted: 20.10.2014)

1. Funkcje analityczne

Definicja 1.1.

Funkcję f(z) zmiennej zespolonej z określoną w pewnym obszarze D nazywamy funkcją analityczną w tym obszarze, jeżeli w każdym punkcie obszaru D ma pochodną $f'(z)$.

Definicja 1.2.

Mówimy, że funkcja f(z) jest analityczna w punkcie z_0 jeżeli jest analityczna w pewnym otoczeniu tego punktu.

Definicja 1.3.

Funkcję analityczną w punkcie z_0 (w obszarze D) nazywamy funkcją holomorficzną w punkcie z_0 (w obszarze D).

Definicja 1.4.

Mówimy, że funkcja f(z) zmiennej zespolonej z jest regularna w obszarze otwartym D, jeżeli jest holomorficzna w sąsiedztwie każdego punktu tego zbioru.

Definicja 1.5.

Szeregiem Laurenta o środku w punkcie $z_0 \neq \infty$ i współczynnikach a_n dla $n \in C$ nazywamy szereg [6]-[8]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{1.1}$$

Definicja 1.6.

Punkt z_0, w którego otoczeniu $|z-z_0|<R$ funkcja f(z) jest analityczna, nazywamy punktem regularnym funkcji.

Definicja 1.7.

Jeżeli funkcja f(z) jest analityczna w otoczeniu pierścieniowym $0<|z-z_0|<R$, to mówimy że z_0 jest punktem osobliwym odosobnionym funkcji f(z).

Twierdzenie 1.1.

Jeżeli funkcja f(z) jest funkcją analityczną w pierścieniu $r<|z-z_0|<R$, to daje się w nim przedstawić szeregiem Laurenta, gdzie współczynniki tego szeregu wyrażają się wzorami:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \tag{1.2}$$

dla a = 0, ±1, ±2, … , gdzie K jest dowolnym okręgiem o środku z_0, zorientowanym dodatnio i zawartym w pierścieniu $r < | z-z_0 | < R$ *(dowód [5] s. 126).*

Z twierdzenia tego wynika, że funkcja f(z), analityczna w pierścieniu $r < | z-z_0 | < R$, daje się w tym pierścieniu przedstawić jako suma dwóch funkcji [5]:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}, \tag{1.3}$$

z których pierwsza jest analityczna w kole $| z-z_0 | < R$, a druga jest analityczna dla $| z-z_0 | > r$.

W rozwinięciu postaci (1.3) funkcji f(z) pierwszy szereg nosi nazwę części regularnej funkcji f(z), a drugi szereg nosi nazwę części osobliwej tej funkcji.

Definicja 1.8.

Jeżeli część osobliwa redukuje się do zera to jest $a_{-n}=0$ dla n = 1, 2, … wówczas mówimy, że z_0 jest punktem pozornie osobliwym albo że f(z) ma w punkcie z_0 osobliwość usuwalną. Istnieje wtedy granica:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0 \tag{1.4}$$

a przyjmując $f(z_0)=a_0$ otrzymujemy funkcję analityczną w całym kole $|z-z_0|<R$, a punkt z_0 staje się punktem regularnym [1]-[3], [5].

Definicja 1.9.

Jeżeli część osobliwa składa się ze skończonej liczby wyrazów to jest:

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} \tag{1.5}$$

wówczas punkt z_0 nazywamy biegunem m-krotnym lub biegunem rzędu m funkcji f(z), a wyrażenie (1.5) częścią główną bieguna [5].

Definicja 1.10.

Jeżeli część osobliwa funkcji f(z) zawiera nieskończenie wiele wyrazów, wówczas z_0 nazywamy punktem istotnie osobliwym funkcji f(z).

Twierdzenie 1.2. Jeżeli

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}, \tag{1.6}$$

gdzie funkcje h(z) i g(z) są holomorficzne oraz $h(z_0) \neq 0$ i

$$g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = \ldots = g^{(n-1)}(z_0) = 0\,, \tag{1.7}$$

ale $g^{(n)}(z_0) \neq 0$, to funkcja f(z) ma w punkcie z_0 biegun n-krotny *(dowód [5] s. 143).*

Definicja 1.11.

Niech funkcja f(z) będzie funkcją analityczną w otoczeniu pierścieniowym $0<|z-a|<r$ punktu a, w którym jest rozwijalna w szereg [3]:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \tag{1.8}$$

ponadto oznaczymy przez C dowolny kontur zawarty w danym otoczeniu i zawierający w swym wnętrzu punkt a. Wówczas wartość całki:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = a_{-1} \tag{1.9}$$

czyli współczynnik a_{-1} rozwinięcia (1.8) nazywamy residuum funkcji f(z) w punkcie a i oznaczamy $\mathrm{res}_a f(z)$.

Twierdzenie 1.3. *(dowód [5] s. 134)*

Niech C będzie brzegiem obszaru ograniczonego D złożonym z jednej lub kilku krzywych zamkniętych zorientowanych dodatnio względem wnętrza obszaru. Jeżeli funkcja f(z) jest analityczna wewnątrz obszaru D i na jego brzegu C poza skończoną liczbą punktów z_1, z_2, …, z_n leżących wewnątrz D, w których funkcja ma odpowiednio residua A_1, A_2, …, A_n , to

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z). \tag{1.10}$$

Mamy zatem

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z). \tag{1.11}$$

Twierdzenie 1.4. *(dowód [5] s. 142)*

Jeżeli funkcja f(z) ma w punkcie z_0 biegun n-krotny, to

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]. \tag{1.12}$$

2. Wielomiany Legendre'a

Definicja 2.1.

Wielomiany Legendre'a $P_n(z)$ dla wartości zmiennej z mają postać [4]:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.1}$$

Obliczone wielomiany Legendre'a wprost z definicji (2.1) dają następujący układ funkcji:

$$P_0(z) = 1, \tag{2.2}$$

$$P_1(z) = z, \tag{2.3}$$

$$P_2(z) = \tfrac{1}{2}(z^2-1), \tag{2.4}$$

$$P_3(z) = \tfrac{1}{2}(5z^3-3z), \tag{2.5}$$

$$P_4(z) = \tfrac{1}{8}(35z^4-30z^2+3), \tag{2.6}$$

....

$$P_{n-1}(z) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^{n-1}, \tag{2.7}$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n, \tag{2.8}$$

....

Twierdzenie 2.1. *(O funkcji tworzącej)*

Funkcja

$$w(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} \tag{2.9}$$

jest funkcją tworzącą dla wielomianów Legendre'a, czyli dla małych wartości | t | zachodzi rozwinięcie w szereg [4]:

$$w(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n. \tag{2.10}$$

<u>Dowód</u>:

Ponieważ funkcja w(z,t) rozpatrywana jako funkcja zmiennej t jest funkcją regularną w kole | t |<r, to istnieje rozwinięcie postaci:

$$w(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)\, t^n. \tag{2.11}$$

Współczynniki $p_n(z)$ mogą być wyrażone przez całki krzywoliniowe postaci:

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{dt}{\sqrt{1-2tz+t^2}\cdot t^{n+1}}, \tag{2.12}$$

które są wzięte wzdłuż dowolnego konturu zamkniętego D obejmującego punkt t=0 i leżącego w obszarze regularności funkcji w(z,t).

Powyższe całki przekształcimy w całki funkcji wymiernych za pomocą podstawienia:

$$\sqrt{1-2tz+t^2} = 1 - tu\,, \tag{2.13}$$

skąd

$$t = 2\cdot\frac{u-z}{u^2-1}\,. \tag{2.14}$$

Wtedy podstawienie (2.13) otrzymuje postać:

$$\sqrt{1-2tz+t^2} = 1 - \frac{2(u-z)}{u^2-1}\,. \tag{2.15}$$

Po wykonaniu różniczkowania równości (2.14) otrzymujemy:

$$dt = 2\cdot\frac{-u^2+2zu-1}{(u^2-1)^2}\,du\,. \tag{2.16}$$

Uzyskane wyrażenia (2.15) i (2.16) podstawiamy do całki (2.12):

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} \frac{(u^2-1)[2(u-z)]^{-n-1}2(-u^2+2uz-1)}{(-u^2+2uz-1)(u^2-1)^{-n-1}(u^2-1)^2}\,du, \tag{2.17}$$

która po uproszczeniach przyjmuje postać:

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1} \frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-z)^{n+1}}\,du\,. \tag{2.18}$$

Całka (2.18) wzięta jest wzdłuż konturu zamkniętego D_1, otaczającego punkt u=z. Zauważmy, że punkt t=0 odpowiada punktowi u=z, a kontur D odpowiada konturowi D_1, gdyż po obiegu wzdłuż D pierwiastek przyjmuje swą poprzednią wartość. Funkcja podcałkowa:

$$f(u) = \frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-z)^{n+1}} \tag{2.19}$$

spełnia założenia twierdzenia (1.3) i twierdzenia (1.4). Wobec tego:

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_1}\frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-z)^{n+1}}du = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{u=z}\frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-z)^{n+1}} = \operatorname*{res}_{u=z}\frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-z)^{n+1}}. \qquad (2.20)$$

Obliczamy residuum funkcji f(u):

$$p_n(z) = \operatorname*{res}_{u=z}\frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-z)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1-1)!}\cdot\lim_{n\to z}\frac{d^{n+1-1}}{du^{n+1-1}}\left[(u-z)^{n+1}\frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-z)^{n+1}}\right], \qquad (2.21)$$

co daje

$$p_n(z) = \frac{1}{n!}\cdot\lim_{n\to z}\frac{d^n}{du^n}\left[\frac{(u^2-1)^n}{2^n}\right] = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{du^n}\left[(u^2-1)^n\right] \equiv P_n(z). \qquad (2.22)$$

Zatem zostało wykazane, że

$$w(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)\, t^n \quad \text{dla} \quad |t| < r, \qquad (2.23)$$

co kończy dowód twierdzenia (2.1). ■[1]

3. Równanie rekurencyjne dla wielomianów Legendre'a

Twierdzenie 3.1. *(Równanie rekurencyjne dla wielomianów Legendre'a) [4]*

Jeżeli $P_{n-1}(z)$, $P_n(z)$, $P_{n+1}(z)$ są wielomianami Legendre'a, to [4]:

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (3.1)$$

Dowód:

Podstawiamy szereg (2.10) do tożsamości:

$$(1-2tz+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} + (t-z)w = 0. \qquad (3.2)$$

Wówczas otrzymujemy:

$$(1-2tz+t^2)\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n\right] + (t-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n = 0. \qquad (3.3)$$

Wobec czego:

$$(1-2tz+t^2)\frac{\partial}{\partial t}\left[P_0(z) + P_1(z)t + P_2(z)t^2 + P_3(z)t^3 + \ldots + P_n(z)t^n\right] + (t-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n = 0. \qquad (3.4)$$

Różniczkując względem zmiennej t wyraz po wyrazie mamy dalej:

$$(1-2tz+t^2)\left[0 + P_1(z) + 2P_2(z)t + 3P_3(z)t^2 + \ldots + nP_n(z)t^{n-1}\right] + (t-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n = 0. \qquad (3.5)$$

Wobec tego:

$$(1-2tz+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(z)t^{n-1} + (t-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n = 0. \qquad (3.6)$$

Skąd po przekształceniu:

[1] Znak ■ oznacza koniec dowodu.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-2tz+t^2)nP_n(z)t^{-1}+(t-z)P_n(z)\right]t^n=0. \tag{3.7}$$

Przyrównując współczynnik przy t^n do zera uzyskujemy:

$$(1-2tz+t^2)nP_n(z)t^{-1}+(t-z)P_n(z)=0. \tag{3.8}$$

Skąd po przekształceniach mamy:

$$nP_n(z)t^{-1}-2znP_n(z)+nP_n(z)t+tP_n(z)-zP_n(z)=0. \tag{3.9}$$

Z czego wynika, że:

$$(n+1)P_{n+1}(z)-2znP_n(z)+(n-1)P_{n-1}(z)+P_{n-1}(z)-zP_n(z)=0. \tag{3.10}$$

Skąd ostateczniec otrzymujemy:

$$(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0 \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots, \tag{3.11}$$

co kończy dowód twierdzenia (3.1). ■

4. Zależności różniczkowe dla wielomianów Legendre'a

Twierdzenie 4.1.

Jeżeli $P_{n-1}(z)$, $P_n(z)$, $P_{n+1}(z)$ są wielomianami Legendre'a, to:

$$P'_{n+1}(z)-2zP'_n(z)+P'_{n-1}(z)-P_n(z)=0 \tag{4.1}$$

dla $n\in N$ [4].

Dowód:

Podstawiamy szereg (2.10) do tożsamości:

$$(1-2tz+t^2)\frac{\partial w}{\partial z}-tw=0. \tag{4.2}$$

Wówczas otrzymujemy:

$$(1-2tz+t^2)\frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n\right]-t\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n=0. \tag{4.3}$$

Wobec czego:

$$(1-2tz+t^2)\frac{\partial}{\partial z}\left[P_0(z)+P_1(z)t+P_2(z)t^2+P_3(z)t^3+\ldots+P_n(z)t^n\right]-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n=0. \tag{4.4}$$

Różniczkując względem zmiennej z wyraz po wyrazie mamy dalej:

$$(1-2tz+t^2)\left[P'_0(z)+P'_1(z)t+P'_2(z)t^2+P'_3(z)t^3+\ldots+P'_n(z)t^n\right]-t\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n=0. \tag{4.5}$$

Wobec tego:

$$(1-2tz+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(z)t^n-t\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n=0. \tag{4.6}$$

Skąd po przekształceniu:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-2tz+t^2)P'_n(z)-tP_n(z)\right]t^n=0. \tag{4.7}$$

Przyrównując współczynnik przy t^n do zera uzyskujemy:

$$(1-2tz+t^2)P_n'(z)-t\,P_n(z)=0. \tag{4.8}$$

Skąd po przekształceniach mamy:

$$P_n'(z)-2tzP_n'(z)+t^2P_n'(z)-t\,P_n(z)=0. \tag{4.9}$$

Z czego wynika, że:

$$P_n'(z)-2zP_{n-1}'(z)+P_{n-2}'(z)-P_{n-1}(z)=0 \quad \text{dla} \quad n=2,3,\dots. \tag{4.10}$$

Ostateczniec otrzymujemy:

$$P_{n+1}'(z)-2zP_n'(z)+P_{n-1}'(z)-P_n(z)=0 \quad \text{dla} \quad n=1,2,\dots, \tag{4.11}$$

co kończy dowód twierdzenia (4.1). ■

Dążymy do uzyskania równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego dla wielomianów Legendre'a. W tym celu udowodnimy jeszcze trzy twierdzenia.

Twierdzenie 4.2.

Jeżeli $P_{n+1}(z)$, $P_n(z)$ są wielomianami Legendre'a, to [4]:

$$P_{n+1}'(z)-zP_n'(z)=(n+1)P_n(z) \tag{4.12}$$

dla n = 0, 1, 2, … .

Dowód:

Różniczkujemy równość (3.1) względem zmiennej z i otrzymujemy:

$$[(n+1)P_{n+1}(z)]'-[(2n+1)zP_n(z)]'+[nP_{n-1}(z)]'=0. \tag{4.13}$$

Skąd uzyskujemy:

$$(n+1)P_{n+1}'(z)-(2n+1)P_n(z)-(2n+1)zP_n'(z)+nP_{n-1}'(z)=0. \tag{4.14}$$

Wyznaczamy z równania (4.1) i (4.14) wielomian $P'_{n-1}(z)$:

$$P_{n-1}'(z)=2zP_n'(z)-P_{n+1}'(z)+P_n(z), \tag{4.15}$$

$$P_{n-1}'(z)=\frac{1}{n}\left[(2n+1)P_n(z)+(2n+1)zP_n'(z)-(n+1)P_{n+1}'(z)\right]. \tag{4.16}$$

Porównując stronami równania (4.15) i (4.16) otrzymujemy:

$$2zP_n'(z)-P_{n+1}'(z)+P_n(z)=\frac{1}{n}\left[(2n+1)P_n(z)+(2n+1)zP_n'(z)-(n+1)P_{n+1}'(z)\right]. \tag{4.17}$$

Po odpowiednich przekształceniach mamy:

$$2nzP_n'(z)-nP_{n+1}'(z)+nP_n(z)=2nP_n(z)+P_n(z)+2nzP_n'(z)+zP_n'(z)-nP_{n+1}'(z)-P_{n+1}'(z). \tag{4.18}$$

A zatem po redukcji odpowiednich wyrazów uzyskujemy:

$$P_{n+1}'(z)-zP_n'(z)=2nP_n(z)-nP_n(z)+P_n(z). \tag{4.19}$$

Skąd po ostatecznie mamy:

$$P_{n+1}'(z)-zP_n'(z)=(n+1)P_n(z) \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\dots, \tag{4.20}$$

co kończy dowód twierdzenia (4.2). ■

Twierdzenie 4.3.

Jeżeli $P_n(z)$, $P_{n-1}(z)$ są wielomianami Legendre'a, to [4]:

$$zP_n'(z)-P_{n-1}'(z)=nP_n(z) \quad \text{dla} \quad n=1,2,\dots. \tag{4.21}$$

Dowód:
Wyznaczamy z równania (4.1) i (4.14) wielomian $P'_{n+1}(z)$:

$$P'_{n+1}(z) = 2zP'_n(z) - P'_{n-1}(z) + P_n(z), \tag{4.22}$$

$$P'_{n+1}(z) = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)P_n(z) + (2n+1)zP'_n(z) - nP'_{n-1}(z)\right]. \tag{4.23}$$

Porównując stronami równania (4.22) i (4.23) otrzymujemy:

$$2zP'_n(z) - P'_{n-1}(z) + P_n(z) = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)P_n(z) + (2n+1)zP'_n(z) - nP'_{n-1}(z)\right]. \tag{4.24}$$

Skąd dostajemy:

$$2(n+1)zP'_n(z) - (n+1)P'_{n-1}(z) + (n+1)P_n(z) = (2n+1)P_n(z) + (2n+1)zP'_n(z) - nP'_{n-1}(z). \tag{4.25}$$

Po odpowiednich przekształceniach mamy:

$$\begin{aligned} &2nzP'_n(z) + 2zP'_n(z) - nP'_{n-1}(z) - P'_{n-1}(z) + nP_n(z) + P_n(z) = \\ &= 2nP_n(z) + P_n(z) + 2nzP'_n(z) + zP'_n(z) - nP'_{n-1}(z). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Skąd po redukcji odpowiednich wyrazów ostatecznie mamy:

$$zP'_n(z) - P'_{n-1}(z) = nP_n(z) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.27}$$

co kończy dowód twierdzenia (4.3). ■

Twierdzenie 4.4. *(Wyrażenie pochodnej wielomianu Legendre'a przez wielomiany Legendre'a)[4]*

Jeżeli $P_n(z)$, $P_{n-1}(z)$ są wielomianami Legendre'a, to:

$$(1 - z^2)P'_n(z) = nP_{n-1}(z) - nzP_n(z) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.28}$$

Dowód:
Zastępujemy w równaniu (4.12) n na n–1 i wtedy mamy:

$$P'_n(z) - zP'_{n-1}(z) = nP_{n-1}(z). \tag{4.29}$$

Wyznaczamy z równania (4.21) i (4.29) wielomian $P'_{n-1}(z)$:

$$P'_{n-1}(z) = zP'_n(z) - nP_n(z), \tag{4.30}$$

$$P'_{n-1}(z) = \frac{1}{z}\left[P'_n(z) - nP_{n-1}(z)\right]. \tag{4.31}$$

Po porównaniu stronami związków (4.29) i (4.30) otrzymujemy:

$$zP'_n(z) - nP_n(z) = \frac{1}{z}\left[P'_n(z) - nP_{n-1}(z)\right]. \tag{4.32}$$

Skąd po odpowiednim uporządkowaniu ostatecznie mamy:

$$(z^2 - 1)P'_n(z) = nP_{n-1}(z) - znP_n(z) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.33}$$

co kończy dowód twierdzenia (4.4). ■

5. Równanie różniczkowe dla wielomianów Legendre'a

Twierdzenie 5.1. *(Równanie różniczkowe rzędu drugiego dla wielomianów Legendre'a) [4]*

Jeżeli $P_n(z)$ są wielomianami Legendre'a, to:

$$[(1 - z^2)P'_n(z)]' + n(n+1)P_n(z) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.1}$$

Dowód:

Różniczkujemy obustronnie równanie (4.28) względem zmiennej z i wtedy mamy:

$$[(1-z^2)P_n'(z)]' = [nP_{n-1}(z) - nzP_n(z)]'. \tag{5.2}$$

Skąd mamy

$$-2zP_n'(z) + (1-z^2)P_n''(z) = nP_{n-1}'(z) - nP_n(z) - nzP_n'(z). \tag{5.3}$$

Z równań (4.21) i (5.3) wyznaczamy wielomian $P'_{n-1}(z)$:

$$P_{n-1}'(z) = zP_n'(z) - nP_n(z), \tag{5.4}$$

$$P_{n-1}'(z) = \frac{1}{n}\left[(1-z^2)P_n''(z) + nP_n(z) + nzP_n'(z) - 2zP_n'(z)\right]. \tag{5.5}$$

Skąd po porównaniu stron równań (5.4) i (5.5) mamy:

$$zP_n'(z) - nP_n(z) = \frac{1}{n}\left[(1-z^2)P_n''(z) + nP_n(z) + nzP_n'(z) - 2zP_n'(z)\right]. \tag{5.6}$$

Skąd otrzymujemy:

$$znP_n'(z) - n^2P_n(z) = (1-z^2)P_n''(z) + nP_n(z) + nzP_n'(z) - 2zP_n'(z). \tag{5.7}$$

Po redukcji odpowiednich wyrazów uzyskujemy:

$$(1-z^2)P_n''(z) - 2zP_n'(z) = -n^2P_n(z) - nP_n(z). \tag{5.8}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$[(1-z^2)P_n'(z)]' + n(n+1)P_n(z) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{5.9}$$

co kończy dowód twierdzenia (5.1). ■

6. Wnioski

- Pochodną wielomianu Legendre'a wyrażoną przez wielomiany Legendre'a można określić z równania $(1-z^2)P'_n(z) = nP_{n-1}(z) - nzP_n(z)$ dla n = 1, 2, … .
- Wielomian Legendre'a $u = P_n(z)$ jest całką szczególną równania $[(1-z^2)u']' + n(n+1)u = 0$ dla n = 0, 1, 2, … .

Literatura

[1] Fichtenholtz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy, Tom 2*, PWN Warszawa 1976, w. 5.

[2] Fichtenholtz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy, Tom 3*, PWN Warszawa 1969, w. 3.

[3] Krysicki W., Włodarski L.: *Analiza matematyczna w zadaniach, Część 2*, PWN Warszawa 1970, w. 7.

[4] Лебедев Н.Н.: *Специальные функци и их приложения*, Государственное Издательсто Физико-Математческой Литературы, Москва-Ленинград 1963, издание второе.

[5] Leja F.: *Funkcje zespolone*, Biblioteka Matematyczna Tom 29, PWN Warszawa 1973, w. 3.

[6] Sikorski R: *Funkcje rzeczywiste, Tom 2*, PWN Warszawa 1959, w. 1.

[7] Smirnow W.I.: *Matematyka wyższa, Tom 3, Część 2*, PWN Warszawa 1965, w. 1.

[8] Whittaker E.T, Watson G.N.: *Kurs analizy współczesnej, Część 2*, PWN Warszawa 1968, w. 1.