

Konrad DUDZIAK^{*}, Krzysztof STAWICKI^{**}, Andrzej BRYKALSKI^{**}

ULEPSZONA METODA MOMENTÓW VS. FUNKCJE PAKIETU OBLICZENIOWEGO MATLAB SYSTEM IDENTIFICATION TOOLBOX W ZAKRESIE ESTYMACJI PARAMETRÓW PROSTYCH MODELI DYNAMICZNYCH W NIESTACJONARNYCH ZAGADNIENIACH WIROPRAĐOWYCH

Jedną z niewielu metod, pozwalających na wykorzystanie do estymacji parametrów modeli transmitancyjnych charakterystyki częstotliwościowej jest metoda momentów. W niniejszej pracy, na przykładach dynamicznych zagadnień wiroprowadowych, autorzy przedstawiają porównanie uproszczonych typowe modeli transmitancyjnych otrzymanych z charakterystyki częstotliwościowej i czasowej.

Zbadana będzie zgodność modeli wyznaczonych ulepszoną metodą momentów z analogicznymi modelami uzyskanymi z wykorzystaniem komercyjnego pakietu obliczeniowego System Identification Toolbox™ (SIT) z pakietu MATLAB®. Adekwatność modeli uzyskanych ulepszoną metodą momentów oraz niezależnie, dzięki pakietowi System Identification Toolbox™, będzie sprawdzona przez porównanie zgodności odpowiednich charakterystyk czasowych i częstotliwościowych, uzyskanych przez rozwiązanie równania przewodnictwa lub zespolonego równania Helmholtza w programie COMSOL Multiphysics®. Autorzy wykażą konkurencyjność, a w niektórych przypadkach przewagę zmodyfikowanej metody momentów nad wybranymi funkcjami komercyjnego narzędzia.

SŁOWA KLUCZOWE: zmodyfikowana metoda momentów, model transmitancyjny, dynamika pola elektromagnetycznego, Matlab, COMSOL.

1. WPROWADZENIE

Istnieje wiele różnych metod opisujących sposoby uzyskiwania parametrów modeli transmitancyjnych. Metody te można podzielić na dwie grupy:

- metody wykorzystujące opis dynamiki w dziedzinie czasu (odpowiedzi skokowe lub impulsowe),
- metody wykorzystujące opis dynamiki w dziedzinie częstotliwości.

^{*} SOLERK Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością z siedzibą w Szczecinie

^{**} Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

O ile pierwsze z nich, które można uznać za klasyczne, są bardzo dobrze reprezentowane w literaturze, powszechnie wykorzystywane w praktyce a najczęściej pojawiające się skojarzenia zwykle obejmują metody graficzne, to w drugim przypadku, gdy punktem wyjścia w procesie identyfikacji dynamiki jest zespolona charakterystyka częstotliwościowa, istnieje już niewiele sposobów na wyznaczenie parametrów modeli dynamicznych. Należą do nich:

- metoda aproksymacji transmitancji widmowej, metoda Rao-Lamby,
- metoda aproksymacji części rzeczywistych i urojonych licznika i mianownika transmitancji widmowej, metoda Reddy`ego,
- metoda momentów [1] oraz opracowana przez autorów zmodyfikowana (ulepszona) metoda momentów, [2] pozwalająca dzięki optymalnemu doborowi kilku (od 6 do 9) pulsacji, określających węzły aproksymacji średniokwadratowej części rzeczywistej i części urojonej charakterystyki częstotliwościowej, dobrze dopasować model transmitancyjny do rzeczywistych charakterystyk zarówno częstotliwościowych, co wydaje się oczywiste, jak i skokowych.

Ulepszona metoda momentów okazuje się być narzędziem bardzo efektywnym, np. do analizy dynamiki pola elektromagnetycznego. Jej szczególne zalety są widoczne w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień wiroprowadowych, gdzie badana jest dynamika wielkości fizycznych pochodnych (wektor indukcji magnetycznej, strumień magnetyczny) w sytuacji, gdy adekwatne równania różniczkowe, opisujące stan nieustalony pola elektromagnetycznego są formułowane dla wielkości pomocniczych (wektorowy potencjał magnetyczny).

2. OPIS STOSOWANYCH METOD I NARZĘDZI

2.1. System Identification Toolbox™ z pakietu Matlab®

Oprogramowanie MATLAB® zawiera m.in. narzędzie Simulink oraz System Identification Toolbox™ – aplikację do budowania modeli matematycznych systemów dynamicznych na podstawie pozyskanych danych. Dane te mogą pochodzić z pomiarów fizycznych lub z symulacji komputerowych. Zgodnie z zapewnieniami producenta, można użyć danych wejściowych i wyjściowych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości, aby zidentyfikować parametry modeli transmitancyjnych w czasie ciągłym i dyskretnym, modele procesów oraz modele przestrzeni stanów. Toolbox posiada również algorytmy wbudowanej oceny wyznaczonych parametrów [3].

Niestety, paleta uproszczonych modeli transmitancyjnych w pakiecie SIT jest bardzo uboga. Pozwala na estymację parametrów jedynie trzech typowych, wykorzystywanych w praktyce transmitancji, zastawionych w tabeli 1. Należy podkreślić, że dla innych sposobów opisu rzeczywistego modelu perfekcyjnie została zaimplementowana metoda wyznaczania kilkunastu współczynników transmitancji, przedstawionej w postaci ilorazu dwóch wielomianów. Niestety, wspomniane

kilkanaście współczynników wielomianowych, powoduje ograniczenie praktycznej stosowalności takich modeli transmitancyjnych lub wymaga stosowania kolejnych metod, celem uzyskania typowych modeli uproszczonych [4–6].

2.2. Zmodyfikowana Metoda Momentów

Zmodyfikowana metoda momentów, podobnie jak i wcześniej wykorzystywana metoda momentów [1, 4, 7] umożliwia upraszczanie transmitancji lub estymację parametrów typowych transmitancji uproszczonych na podstawie danych pomiarowych lub uzyskanych za pomocą eksperymentu numerycznego.

Tabela 1 przedstawia zależności stałych czasowych i opóźnienia od tzw. momentów znormalizowanych, których sposoby numerycznego lub eksperymentalnego wyznaczenia przedstawiono szczegółowo w pracach [1, 4, 8]. W tabeli 1 zestawiono jedynie te modele, które w dalszej części pracy posłużą celom porównawczym, czyli jedynie te, które zostały zaimplementowane w pakiecie komercyjnym SIT.

Tabela 1. Modele transmitancyjne i ich zależności od momentów znormalizowanych.

Model transmitancyjny	Parametry transmitancji	Momenty znormalizowane	Oznaczenia na rysunkach
$\frac{k_0}{1+s\tau_z}$	$\tau_z = M_1$	$M_1 = \tau_z$	MT1
$\frac{k_0 \exp(-s\tau_0)}{1+s\tau}$	$\tau = \sqrt{M_2 - M_1^2}$ $\tau_0 = M_1 - \sqrt{M_2 - M_1^2}$	$M_1 = \tau_0 + \tau$ $M_2 = \tau_0^2 + 2\tau_0\tau + 2\tau^2$	MT2
$\frac{k_0}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$	$\tau_1 = \frac{1}{2}(M_1 - \sqrt{2M_2 - 3M_1^2})$ $\tau_2 = \frac{1}{2}(M_1 + \sqrt{2M_2 - 3M_1^2})$	$M_1 = \tau_1 + \tau_2$ $M_2 = 2(\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2^2)$	MT3

Metoda momentów pozwala na wyznaczenie parametrów również innych typowych modeli transmitancyjnych, [4, 9, 10] które nie zostały zaimplementowane w pakiecie SIT i nie mogą być poddane porównaniu:

$$\frac{k_0}{(1+s\tau_m)^m}, \quad \frac{k_0 \exp(-s\tau_0)}{(1+s\tau_m)^m}, \quad \frac{k_0 \exp(-s\tau_0)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad (1)$$

oraz [5, 7]:

$$\frac{k_0 \exp(-s\tau_0)}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2}}, \quad k_0 \left(\frac{1+\eta}{1+s\tau_1} - \frac{\eta}{1+s\tau_2} \right) \quad (2)$$

Należy dodać, że momenty znormalizowane można wyznaczać numerycznie, jak i eksperymentalnie zarówno z charakterystyk czasowych [4], [6] jak i częstotliwościowych [1].

3. BADANIA PORÓWNAWCZE

3.1. Założenia

Aby porównać skuteczność identyfikacji parametrów modeli transmitancyjnych otrzymanych z wykorzystaniem ulepszonej metody momentów z parametrami estymowanymi pakietem System Identification Toolbox™, przyjęto następujące założenia:

1. Parametry modeli transmitancyjnych będą wyznaczone z zespolonej charakterystyki częstotliwościowej badanych obiektów, otrzymanej w wyniku symulacji komputerowej w programie COMSOL Multiphysics®, który dla odpowiedniego równania Helmholtza wykorzystuje metodę elementów skończonych (MES).
2. Charakterystyka częstotliwościowa została wyznaczona dla składowej B_z wektora indukcji magnetycznej.
3. Do oszacowania zgodności estymowanych modeli z dynamiką badanego obiektu zastosowano miarę błędu liczoną jako:

$$\int_0^{\infty} [h_z(t) - h(t)]^2 dt, \quad (3)$$

$$\int_0^{f_g} [B_z(f) - B(f)]^2 df, \quad (4)$$

gdzie:

$h(t)$ – odpowiedź skokowa (referencyjna) uzyskana numerycznie w programie COMSOL Multiphysics®,

$h_z(t)$ – odpowiedź skokowa (przybliżona) uzyskana odpowiednio: ulepszoną metodą momentów lub z pakietu System Identification Toolbox™,

$B_z(f)$ – wartości składowej B_z wektora indukcji magnetycznej otrzymane z modeli o estymowanych parametrach,

$B(f)$ – referencyjne wartości składowej B_z wektora indukcji magnetycznej otrzymane z programu COMSOL Multiphysics®,

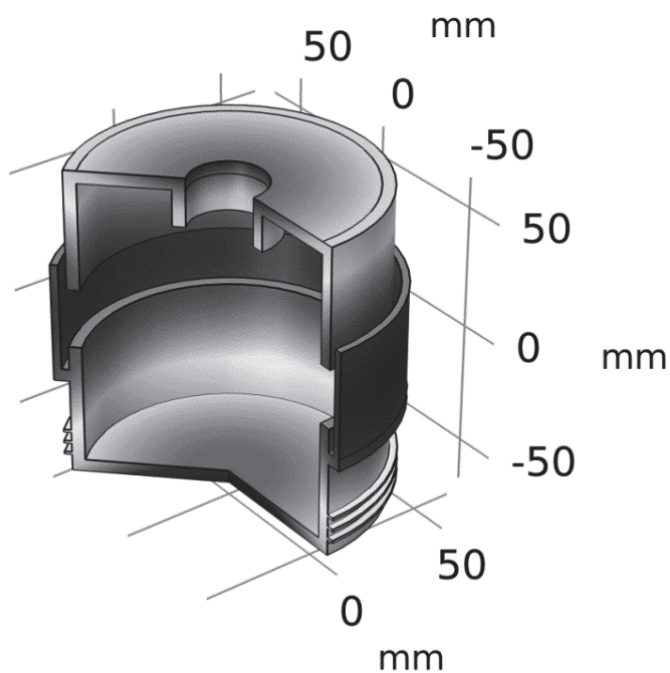
f_g – częstotliwość graniczna.

4. Porównane będą odpowiadające sobie charakterystyki czasowe oraz częstotliwościowe jedynie tych modeli transmitancyjnych, które są dostępne w paście komercyjnego pakietu System Identification Toolbox™ (tabela 1).

3.1. Model obliczeniowy

Wewnątrz cewki solenoidalnej, współosiowo z cewką umieszczono ekran wykonany z miedzi. Celem ekranu jest osłabienie pola w niewielkim obszarze

wewnętrznym. Dla modelu ekranu przedstawionego na rysunku 1 przeprowadzono symulacje w dziedzinie częstotliwości i dziedzinie czasu w programie COMSOL Multiphysics®.



Rys. 1. Badany model ekranu puszkowego umieszczony w polu jednorodnym skierowanym wzdłuż osi z

Symulację poprowadzono w trzech wybranych punktach znajdujących się wewnątrz ekranu:

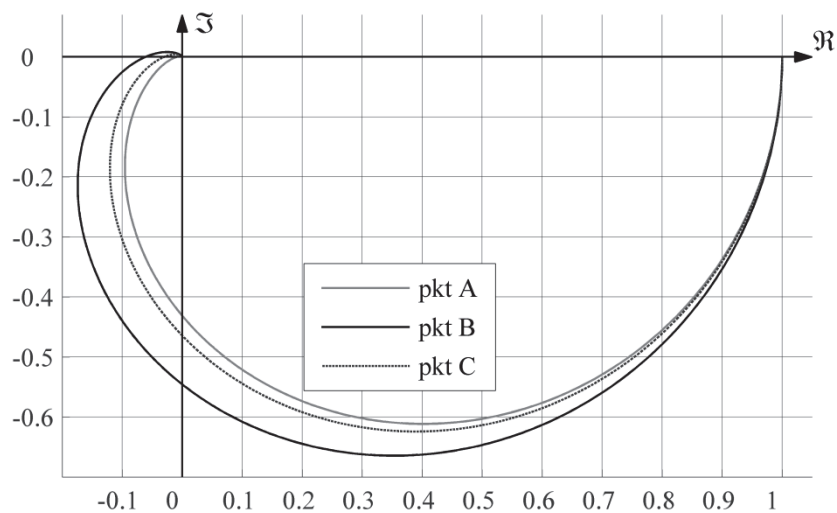
Punkt A o współrzędnych $r = 48$ mm, $z = 0$ mm.

Punkt B o współrzędnych $r = 0$ mm, $z = 40$ mm.

Punkt C o współrzędnych $r = 40$ mm, $z = -55$ mm.

Ze względu na ograniczenia dotyczące objętości niniejszego artykułu, autorzy przedstawiają kolejne, uzyskane wyniki symulacji jedynie dla punktu pomiarowego B, w którym wektor indukcji magnetycznej posiada jedynie składową B_z .

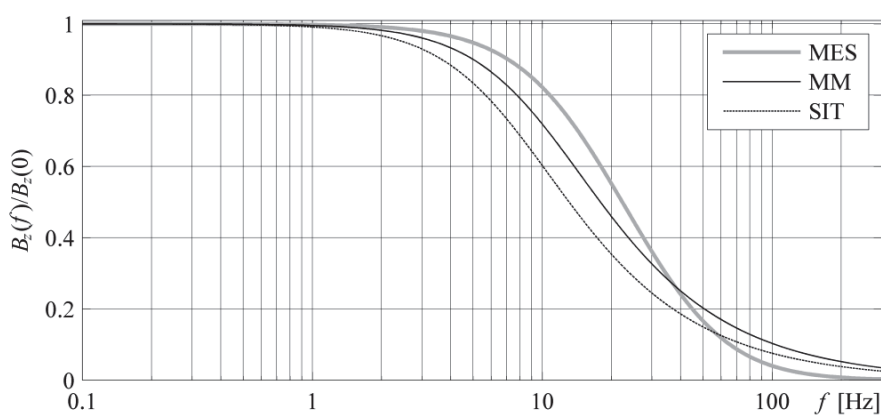
Charakterystykę amplitudowo-fazową dla składowej B_z na płaszczyźnie zmiennej zespolonej przedstawia rysunek 2.



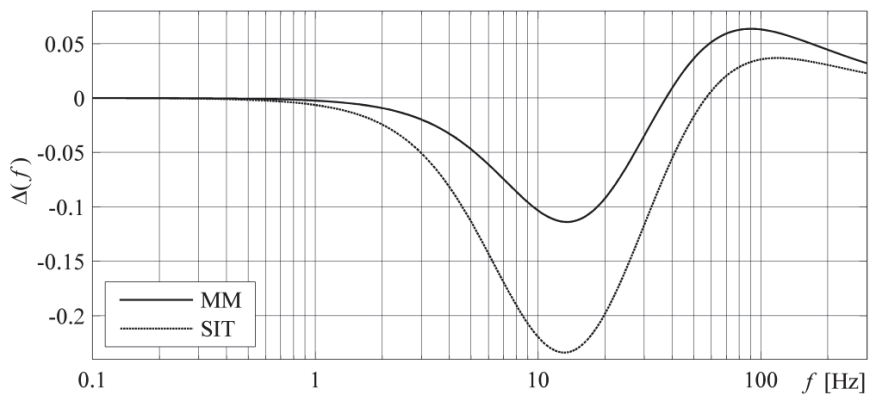
Rys. 2. Charakterystyka amplitudowo fazowa w badanych punktach

3.2. Wyniki symulacji komputerowych

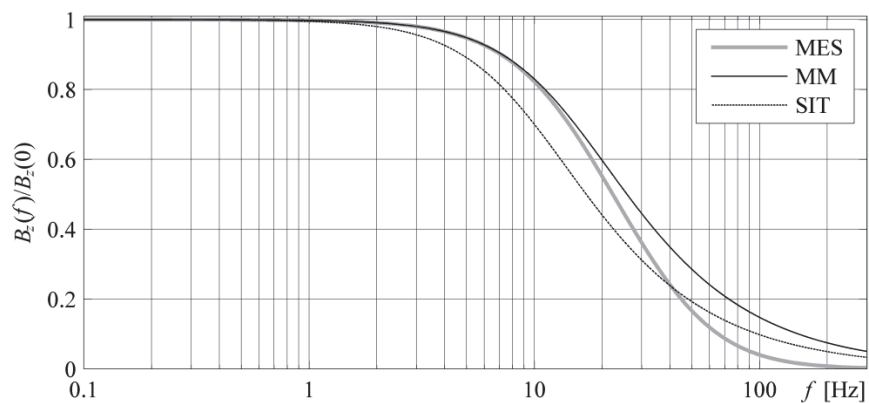
Rysunki 3, 5 i 7 przedstawiają charakterystyki częstotliwościowe, modeli transmitancyjnych z tabeli 1 zbudowanych w oparciu o estymowane parametry. Indeksy MM oznaczają charakterystyki uzyskane z wykorzystaniem zmodyfikowanej metody momentów, SIT charakterystyki otrzymane przy użyciu System Identification Toolbox™.



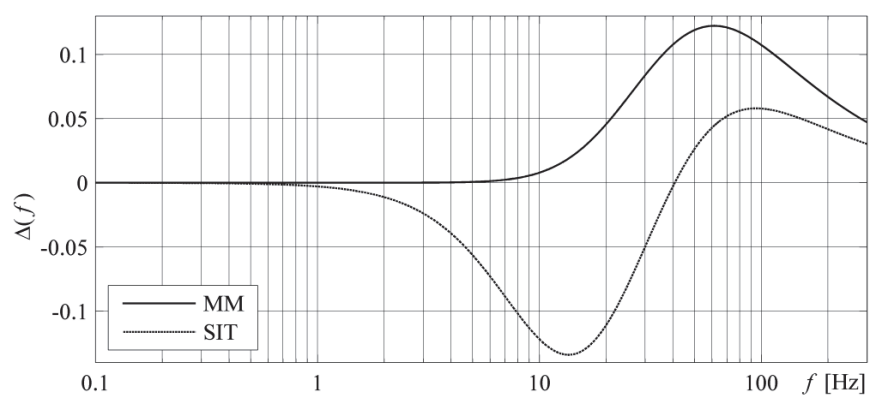
Rys. 3. Charakterystyka amplitudowa dla modelu MT1



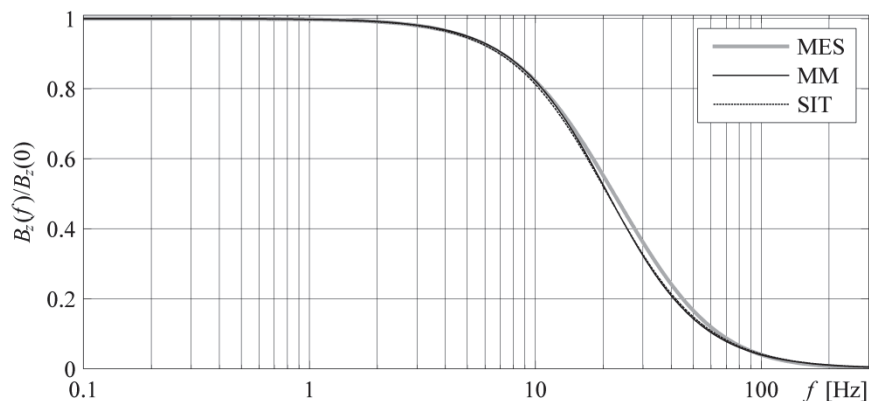
Rys. 4. Bezwzględny błąd dopasowania charakterystyk dla modelu MT1



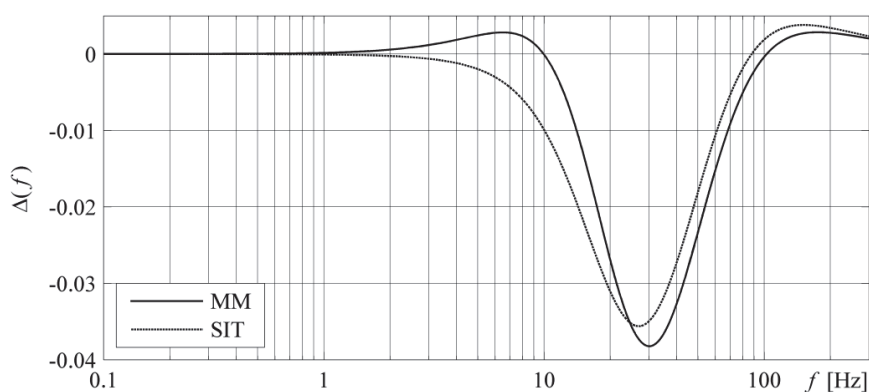
Rys. 5. Charakterystyka amplitudowa dla modelu MT2



Rys. 6. Bezwzględny błąd dopasowania charakterystyk dla modelu MT2



Rys. 7. Charakterystyka amplitudowa dla modelu MT3



Rys. 8. Bezwzględny błąd dopasowania charakterystyk dla modelu MT3

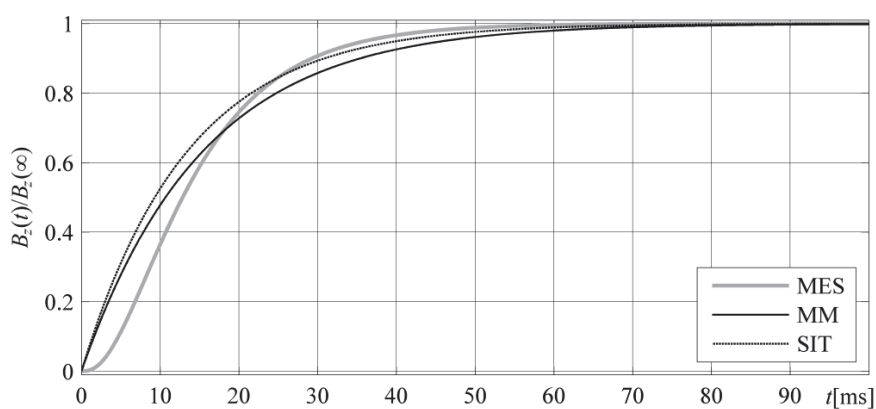
Rysunki 4, 6 i 8 ilustrują błąd dopasowania modeli transmitancyjnych definiowany jako różnica pomiędzy charakterystykami amplitudowymi: estymowanej (MM lub SIT) i referencyjnej (MES).

W tabeli 2 przedstawione są wyniki liczbowe błędów określonego równaniem (4), dla charakterystyk otrzymanych z odpowiedzi częstotliwościowej.

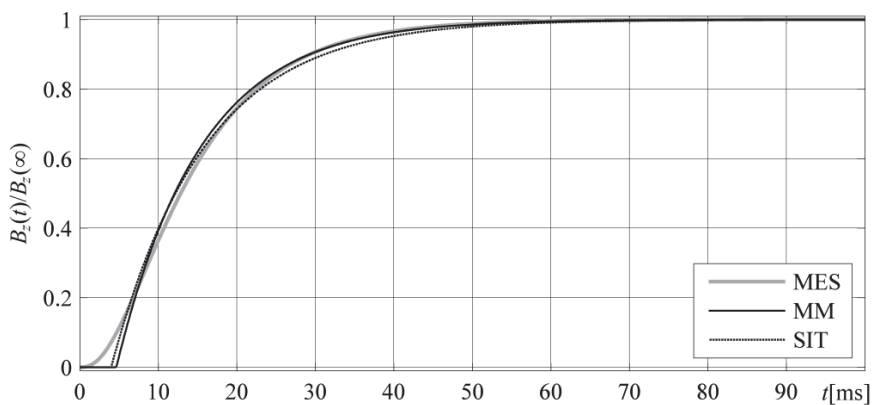
Tabela 2. Wartość błędów estymacji, obliczonego zgodnie z zależnością (4). Estymacja na podstawie charakterystyk: MM – częstotliwościowej, SIT – częstotliwościowej.

Model transmitancyjny	Zmodyfikowana Metoda Momentów	System Identification Toolbox™
MT1	4,61	3,64
MT2	2,73	6,14
MT3	0,12	0,16

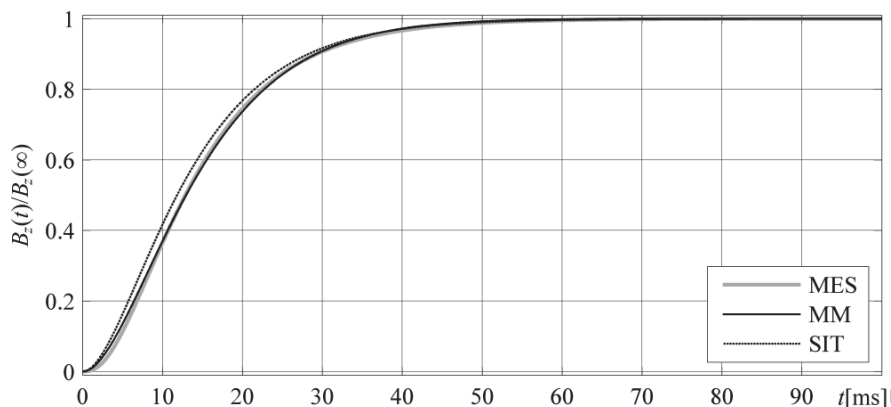
Kolejnym krokiem było porównanie charakterystyk czasowych wybranych modeli transmitancyjnych. Dla metody momentów, parametry modeli transmitancyjnych zostały otrzymane tak jak dotychczas, tj. z charakterystyki częstotliwościowej, natomiast przy wykorzystaniu pakietu System Identification Toolbox™, parametry zostały estymowane na podstawie charakterystyki czasowej (odpowiedzi na skok jednostkowy otrzymanej w programie COMSOL Multiphysics®). Rysunki 9-11 przedstawiają porównanie wyników dla odpowiednich modeli transmitancyjnych, otrzymanych obiema metodami.



Rys. 9. Porównanie charakterystyki czasowej dla modelu MT1



Rys. 10. Porównanie charakterystyki czasowej dla modelu MT2



Rys. 11. Porównanie charakterystyki czasowej dla modelu MT3

Tabela 3 przedstawia wyniki liczbowe błędu obliczonego zgodnie z wzorem (3).

Tabela 3 Wartość błędu estymacji, obliczonego zgodnie z zależnością (3). Estymacja na podstawie charakterystyk: MM – częstotliwościowej, SIT – czasowej.

Model transmitancyjny	Zmodyfikowana Metoda Momentów	System Identification Toolbox™
MT1	2,67	3,79
MT2	0,26	0,21
MT3	0,04	0,36

4. OMÓWIENIE WYNIKÓW, WNIOSKI

Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że korzystając z charakterystyki częstotliwościowej, zmodyfikowana metoda momentów ma lepszą zdolność aproksymacyjną dla dwóch z trzech wybranych modeli transmitancyjnych, (tabela 2 niższa wartość = lepsze dopasowanie modelu), niż System Identification Toolbox™ z pakietu Matlaba®. Również w przypadku wyznaczania parametrów modeli transmitancyjnych z odpowiedzi czasowej SIT, modele uzyskane z charakterystyki zespolonej częstotliwościowej dzięki zmodyfikowanej metodzie momentów wykazują mniejszy błąd dopasowania (tabela 3), czyli większą zdolność aproksymacyjną.

Modele otrzymane z wykorzystaniem zmodyfikowanej metody momentów są generalnie lepiej dopasowane do modelu wzorcowego (referencyjnego), tak w charakterystykach częstotliwościowych, jak i czasowych. Błąd dopasowania jest mniejszy, co ilustrują rysunki 4, 6, 8. Dla zmodyfikowanej metody momentów korzystniej wypadają błędy obliczone zgodnie z zależnością (3) i (4), przedstawione w tabelach 2 i 3 (mniejsza wartość oznacza mniejszy błąd). Potwier-

dzają one, że zmodyfikowana metoda momentów radzi sobie lepiej z estymacją parametrów modeli transmitancyjnych (zależne od punktu przestrzeni: stałe czasowe, opóźnienia oraz rząd inercji), niż na podstawie tych samych danych wejściowych komercyjny pakiet obliczeniowy SIT.

W przypadkach, w których do estymacji parametrów modeli transmitancyjnych pakiet System Identification Toolbox™ wykorzystał charakterystykę czasową (odpowiedź na skok jednostkowy), obie, porównywane metody sprawdziły się jednakowo dobrze. Potwierdzają to charakterystyki czasowe z rysunków 9, 10, 11. Wartości błędu z tabeli 3 pokazują, że w dwóch przypadkach mniejszy błąd wykazuje pewną przewagę metody momentów (modele MT1 i MT2), natomiast w jednym przypadku (model MT2) nieznacznie korzystniej prezentują się wyniki uzyskane z użyciem pakietu SIT.

Podsumowując można stwierdzić, że zmodyfikowana metoda momentów jest skutecznym narzędziem wyznaczania parametrów modeli transmitancyjnych opisujących dynamikę pola elektromagnetycznego. Jej przewaga nad System Identification Toolbox™ polega m.in. na łatwej możliwości zaimplementowania jej w innych algorytmach (w tym w kodach źródłowych), np. wymagających optymalizacji geometrii układu ze względu na pożądane własności dynamiczne. Eksperymenty numeryczne wykazały, że estymacja parametrów transmitancji uproszczonych na podstawie zespolonej charakterystyki częstotliwościowej okazała się skuteczna zarówno w dziedzinie częstotliwości (co wydaje się być naturalne), ale i w dziedzinie czasu.

LITERATURA

- [1] Brykalski A., Rogala T., Identification of equivalent dynamic model parameters in eddy current problems, *COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 26, no. 2, pp. 544–561, 2007.
- [2] Dudziak K., Stawicki K., Brykalski A., Examination of the impact of the number of approximation nodes on the quality of transfer function models describing the diffusion of the electromagnetic field, in *2018 International Interdisciplinary PhD Workshop (IIPhDW)*, 2018, pp. 151–155.
- [3] MATLAB®. The MathWorks, Inc.
- [4] Halawa J., Determination of Simplified Transfer Functions by Means of the Moment Method, *Transactions of the Society for Computer Simulation, (USA)*, vol. 6, no. 1, pp. 17–29, 1989.
- [5] Gibilaro L.G., Lees F., The reduction of complex transfer function models to simple models using the method of moments, *Chem. Eng. Sci.*, vol. 24, pp. 85–93, 1969.
- [6] Purczyński J., Przybliżone modele układów opisywanych równaniami typu parabolicznego, *Rozprawy Elektrotechniczne*, pp. 1055–1068, 1986.
- [7] Lees F.P., The derivation of simple transfer function models of oscillating and inverting processes from the basic transformed equations using the method of moments, *Chemical Engineering Science*, vol. 26, no. 8, pp. 1179–1186, Aug. 1971.

- [8] Dudziak K., Stawicki K., Brykalski A., Analysis of field dynamics using numerically obtained normalized ordinary moments, *Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. ELEKTRYKA*, pp. 49–60, 2017.
- [9] Chen L., Li J., Ding R., Identification for the second-order systems based on the step response, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 53, no. 5, pp. 1074–1083, Mar. 2011.
- [10] Czemplik A., *Modele dynamiki układów fizycznych dla inżynierów: zasady i przykłady konstrukcji modeli dynamicznych obiektów automatyki.*, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2010.

IMPROVED METHOD OF MOMENTS VS. FUNCTIONS OF THE MATLAB IDENTIFICATION TOOLBOX CALCULATION PACKAGE IN THE SCOPE OF ESTIMATION OF SIMPLE PARAMETERS OF DYNAMIC MODELS IN EDDY CURRENT PROBLEMS

One of the few methods allowing to use the frequency response models for estimation of parameters is the improved moment method. In this paper, on selected examples of dynamic eddy current problems, the authors will practically present how simplified, typical transfer function's models can be obtained from the frequency response of computer methods.

The compatibility of the models determined by an improved method of moments with similar models obtained using the commercial System Identification Toolbox™ from the MATLAB® package will be tested. The adequacy of the models obtained with the improved torque method and independently, thanks to the System Identification Toolbox™, will be checked by comparing the compatibility of the relevant time characteristics and frequency characteristics obtained before direct solution of the conduct equation or complex Helmholtz equation in the COMSOL Multiphysics® program. The authors will show competitiveness and in some cases the advantage of an improved method of moments over selected features of the commercial System Identification Toolbox™ for MATLAB®.

(Received: 08.02.2019, revised: 07.03.2019)