

Mirosław WCIŚLIK*
Paweł STRZĄBAŁA*

PROBLEMY NUMERYCZNE MODELOWANIA OBWODU PRĄDU PRZEMIENNEGO Z OBCIĄŻENIEM NIELINIOWYM

W pracy zaprezentowano metody modelowania obwodu AC z prostownikiem mostkowym. Przeanalizowano i zaproponowano modele takiego obciążenia przy użyciu funkcji *signum* z uwzględnieniem dodatkowych elementów obwodu. W metodach tych uwzględniono zastępcze parametry systemu zasilania i obciążenia prostownika. Ze względu na problemy numeryczne oraz dokładności rozwiązań, które mogą wystąpić dla modelu prostownika opisanego funkcją *signum* zaproponowano nowy model prostownika mostkowego. Analizy prowadzone były w systemie MATLAB/Simulink. Otrzymane wyniki zostały porównane z programem OrCAD PSpice.

SŁOWA KLUCZOWE: prostownik mostkowy, obciążenie nieliniowe, modelowanie, model statyczny, model dynamiczny

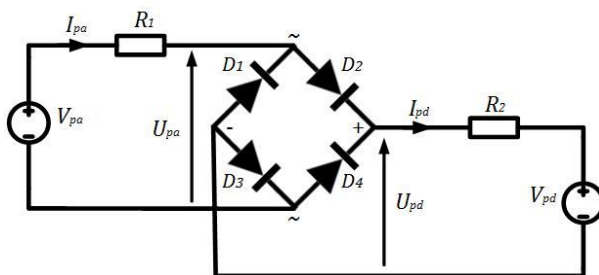
1. WSTĘP

W literaturze istnieją liczne opracowania dotyczące analizy i modelowania obciążeń nieliniowych [1, 2, 3], a także ich wykorzystania w symulacji komputerowej. Liczną grupę tych obciążeń stanowią układy prostownikowe, które są stosowane w większości urządzeń elektrycznych, szczególnie w sieciach nN. Analiza układów prostownikowych w większości przypadków nie ogranicza się jedynie do samego prostownika diodowego. Działanie układu prostownika zależy m.in. od charakteru obciążenia prostownika [4]. Ponadto, w przypadku, gdy prowadzone są analizy oddziaływań takiego obciążenia z systemem zasilania to konieczne jest również uwzględnienie sztywności sieci zasilającej. Jednym z podstawowych wymagań, ze względu na jakość energii elektrycznej jest natomiast, aby ilość harmonicznych generowanych przez takie obciążenia była jak najmniejsza. W tym celu stosuje się m.in. pasywne filtry wyższych harmonicznych [5, 6, 7]. W efekcie obwód, który powstaje po uwzględnieniu charakteru obciążenia DC, sztywności sieci zasilającej czy też elementów filtrów wyższych harmonicznych jest skomplikowany.

* Politechnika Świętokrzyska.

2. MODEL OBWODU AC Z PROSTOWNIKIEM MOSTKOWYM

Model prostownika mostkowego w istotny sposób zależy od pozostałych elementów obwodu, którymi są m.in. zastępcze elementy systemu zasilania, w decydującym stopniu indukcyjność, elementy pasywne filtrów harmoniczných czy też charakter samego obciążenia DC dołączonego na wyjściu prostownika. Ze względu na charakter obciążenia DC możemy wyróżnić przede wszystkim obciążenia pojemnościowe lub też indukcyjno-pojemnościowe tworzące najczęściej filtry tętnień napięcia wyjściowego prostownika. Podstawowym zadaniem prostownika jest najczęściej transformacja energii prądu przemiennego na energię prądu stałego. Dla takiego przypadku wyprostowane napięcie wyjściowe jest pomniejszone o spadek napięcia na dwu przewodzących diodach oraz rezystancjach tych diod w stanie przewodzenia. W niektórych przypadkach na wyjściu prostownika może być generowane napięcie ujemne np. jeżeli w obwodzie wyjściowym będzie indukcyjność. Wtedy często stosowana jest dioda zaporowa dołączona równolegle do wyjścia prostownika. W celu prześledzenia zjawisk, gdy ujemne napięcie na wyjściu jest obecne rozważany jest prosty obwód z mostkiem Graetza prezentowany na rysunku 1. Obwód ten składa się z dwóch źródeł napięciowych V_{pa} i V_{pd} i szeregowych rezystancji R_1 i R_2 na wejściu i wyjściu mostka.



Rys. 1. Schemat obwodu do analizy przypadku, gdy na wyjściu prostownika jest napięcie o ujemnej wartości

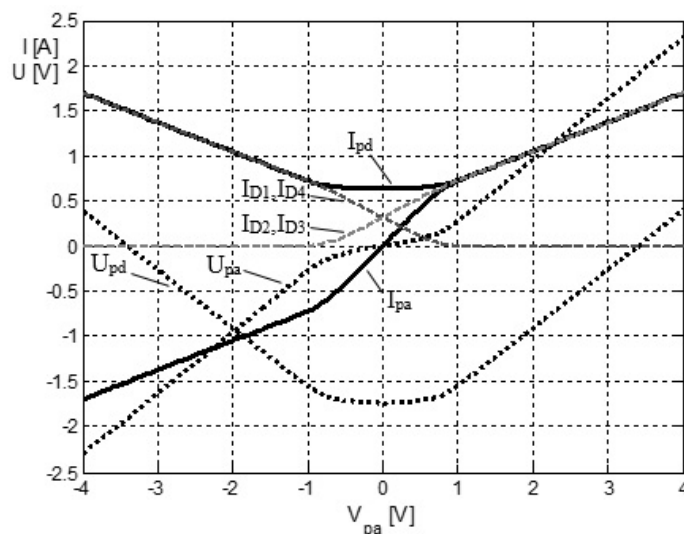
Dla takiego obwodu wykonano analizę stałoprądową DC Sweep w programie OrCAD PSpice. Charakterystyki obwodu prezentowane na rys. 2 uzyskano dla napięcia V_{pa} zmieniającego się w zakresie od -10 V do 10 V. Źródło napięcia V_{pd} natomiast ma stałą wartość -3 V. Rezystancja $R_1 = 1 \Omega$ i $R_2 = 2 \Omega$. Charakterystyka przedstawia obszar, w którym zachodzą analizowane zjawiska. Z charakterystyk tych wynika, że występują dwa obszary pracy prostownika, natomiast ich warunki graniczne są zależne od relacji prądów I_{pa} i I_{pd} . W przypadku, gdy prądy spełniają zależność, że:

$$I_{pd} > |I_{pa}| - 2I_o \quad (1)$$

to wszystkie cztery diody mostka przewodzą, co wynika z przebiegów I_{D1}, I_{D4} oraz I_{D2}, I_{D3} . Prąd I_o jest to prąd wsteczny diody w stanie zaporowym. Jeżeli natomiast spełniony jest warunek:

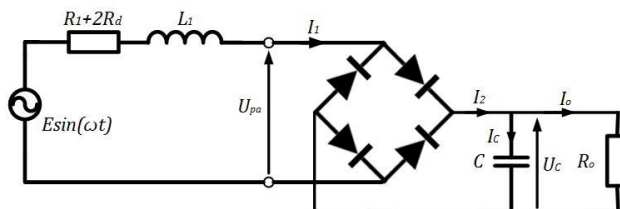
$$I_{pd} = |I_{pa}| - 2I_o \quad (2)$$

pary diod D_1, D_4 lub D_2, D_3 przewodzą naprzemiennie w zależności od polaryzacji napięcia U_{pa} .



Rys. 2. Charakterystyki obwodu z rysunku 1

W pracy analizowany jest przypadek, gdy spełniony jest warunek 2, mówiący, że prąd I_{pd} jest równy wartości bezwzględnej prądu I_{pa} z dokładnością do $2I_o$. We wcześniejszych pracach autorów [8, 9] rozważano obwód AC z prostownikiem mostkowym i obciążeniem RC. Prostownik zasilany był ze źródła napięcia przemiennego poprzez dodatkową rezystancję i indukcyjność tak jak to prezentowane jest na rysunku 3.



Rys. 3. Schemat obwodu AC z prostownikiem mostkowym

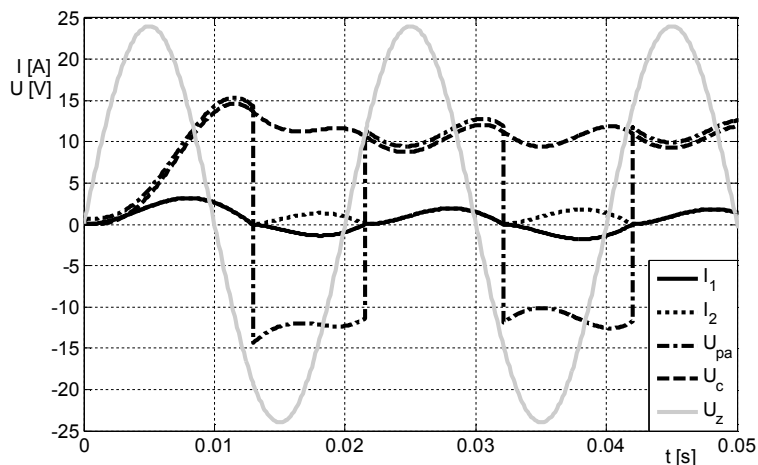
Obwód ten opisano równaniami (3–5). Model prostownika mostkowego utworzono przyjmując arbitralnie funkcję signum prądu I_1 , dla której współczynnikiem proporcjonalności jest napięcie U_c na wyjściu prostownika na kondensatorze C powiększone o spadek napięcia $2U_d$ na dwu przewodzących diodach mostka. Rezystancję dwóch diod mostka w stanie przewodzenia uwzględniono natomiast jako rezystancję szeregową w obwodzie zasilania i przedstawiono jako sumę rezystancji R_1 i $2R_d$.

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = E \sin(\omega t) - I_1(R_1 + 2R_d) - U_{pa} \quad (3)$$

$$C \frac{dU_c}{dt} = I_2 - \frac{1}{R_o} U_c \quad \text{gdzie} \quad I_2 = |I_1| \quad (4)$$

$$U_{pa} = (U_c + 2U_d) \cdot \text{sign}(I_1) \quad (5)$$

Symulację takiego obwodu dla pracy ciągłej i impulsowej można przeprowadzić przy użyciu programu Simulink. Szczególnie interesująca jest praca ciągła prostownika w takim obwodzie, ponieważ dla tego przypadku ilość harmonicznych generowanych do systemu zasilania jest znacznie zredukowana. Charakterystyczne przebiegi takiego obwodu prezentuje rysunek 4. Są to przebiegi typowe dla pracy ciągłej prostownika, przy której prąd zasilania I_1 ma przeliczalną ilość punktów przejść przez zero.



Rys. 4. Charakterystyczne przebiegi obwodu z rysunku 3, gdzie U_z oznacza napięcie zasilania

Symulację przeprowadzono dla następujących parametrów i wielkości wejściowych obwodu: $E = 24 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $R_1 = 1 \text{ }\Omega$; $L_1 = 30 \text{ mH}$; $U_d = 0,7 \text{ V}$; $R_d = 0,05 \text{ }\Omega$; $C = 1 \text{ mF}$; $R_o = 10 \text{ }\Omega$. W symulacji wykorzystano stałokrokową metodę całkowania numerycznego Heun'a. Przyjęto krok całkowania 10 ns .

Prąd I_2 jest równy co do wartości bezwzględnej prądu I_1 , zaś ten prąd wykazuje ujemne przesunięcie fazowe względem napięcia zasilania U_z .

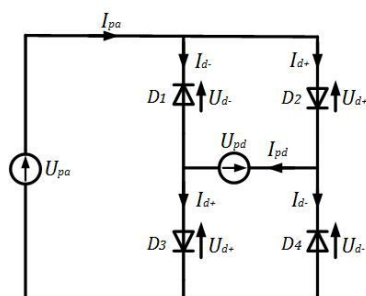
Prezentowany obwód AC z prostownikiem mostkowym modelowany przy użyciu funkcji *signum* prądu w obwodzie zasilania jest rozwiązywalny w Simulinku, tylko gdy wykorzystuje się metody stałokrokowe. Jeżeli stosowane są metody zmiennokrokowe zarówno dla równań różniczkowych sztywnych jak i niesztywnych obwód jest nierozwiązywalny. Problem ten nie jest więc związany ze sztywnością układu.

Uzasadnieniem tego jest fakt, że w przypadku metod zmiennokrokowych krok całkowania jest ustalany w zależności od szybkości zmian wartości danej zmiennej czyli jej stałej czasowej [10]. W przypadku, gdy zmiany te są dość wolne krok całkowania jest zwiększany, natomiast, gdy wartości te zmieniają się gwałtownie krok całkowania jest zmniejszany. Takie działanie powoduje, że w pobliżu nieciągłości, czyli gdy zmiany wartości funkcji następują gwałtownie algorytm wykonuje obliczenia z bardzo małym krokiem. W efekcie zwiększa się dokładność, ale znacznie wydłuża czas symulacji. W przypadku funkcji *signum*, ze względu, że jest to funkcja nieciągła w zerze występuje znaczne zwolnienie obliczeń symulacji. Dlatego nie należy stosować metod zmiennokrokowych do rozwiązywania takiego modelu.

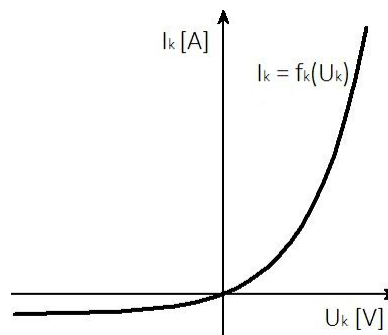
3. PROPOZYCJA MODELU PROSTOWNIKA MOSTKOWEGO

Model opisujący rozważany obwód AC z prostownikiem mostkowym przy użyciu funkcji *signum* jest rozwiązywalny w Matlabie jedynie przy użyciu metod stałokrokowych całkowania numerycznego. Nieciągłość funkcji *signum* wymusza stosowanie algorytmów całkowania ze stałym krokiem, którego wartość jest mała, a co za tym idzie czas rozwiązania długi. W efekcie symulacje przy użyciu tych metod są nieefektywne ze względu na całkowity czas ich wykonywania. Postawiono więc pytanie: jaki ma wpływ charakter modelu prostownika na efektywność rozwiązywania równań obwodu?

W tym celu rozważano schemat obwodu prezentowany na rysunku 5. Obwód ten zawiera dwa źródła napięciowe U_{pa} i U_{pd} dołączone równolegle odpowiednio na wejściu i wyjściu mostka Graetza. Każda z diod mostka jest opisana monotoniczną charakterystyką $I_k = f_k(U_k)$ tak jak na rysunku 6, gdzie $k = 1, 2, 3, 4$ [11]. W prowadzonej analizie zakłada się, że w zależności od polaryzacji napięcia U_{pa} przewodzą dwie diody D_1, D_4 lub D_2, D_3 . W przypadku przewodzenia jednej pary diod pozostałe diody są spolaryzowane zaporowo i płynie przez nie mały prąd wsteczny zgodnie z charakterystyką diody prezentowanej na rysunku 6.



Rys. 5. Schemat prostownika mostkowego – model statyczny



Rys. 6. Charakterystyka prądowo-napięciowa diody półprzewodnikowej [11]

Równania opisujące rozważany obwód zapisano wykorzystując nieliniowe równanie opisujące charakterystykę prądowo – napięciową diody półprzewodnikowej:

$$I_d = I_o \left(e^{\frac{U_d}{U_o}} - 1 \right) \quad (6)$$

gdzie: U_d – napięcie diody, U_o – potencjał elektrokinetyczny diody, I_o – prąd diody w kierunku zaporowym [12]. Prądy I_{pa} i I_{pd} obwodu z rysunku 5 można zapisać w następującej postaci:

$$I_{pa} = I_{d+} + I_{d-} \quad \text{oraz} \quad I_{pd} = I_{d+} - I_{d-} \quad (7)$$

gdzie:

$$I_{d-} = -I_o \left(e^{\frac{U_{d-}}{U_o}} - 1 \right) \quad \text{oraz} \quad I_{d+} = I_o \left(e^{\frac{U_{d+}}{U_o}} - 1 \right) \quad (8)$$

są to równania opisujące charakterystykę prądowo – napięciową diody półprzewodnikowej. Napięcia U_{d-} i U_{d+} zapisane są jako:

$$U_{d-} = \frac{U_{pd} + U_{pa}}{2} \quad \text{oraz} \quad U_{d+} = \frac{U_{pa} - U_{pd}}{2} \quad (9)$$

Wykonując kolejno podstawienia równań (9) do (8), a następnie otrzymane zależności I_{d-} i I_{d+} podstawiając do równania (7) otrzymujemy wzory na prądy I_{pa} i I_{pd} :

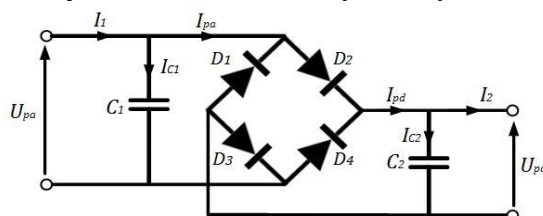
$$I_{pa} = 2I_o e^{\frac{U_{pd}}{2U_o}} \sinh\left(\frac{U_{pa}}{2U_o}\right) \quad (10)$$

$$I_{pd} = 2I_o \left(e^{\frac{U_{pd}}{2U_o}} \cosh\left(\frac{U_{pa}}{2U_o}\right) - 1 \right) \quad (11)$$

których wartość zależy od napięć na wejściu i wyjściu prostownika. Na podstawie równań (10) i (11) model prostownika mostkowego można zapisać w następującej postaci:

$$I_{pa} = (I_{pd} + 2I_o) \cdot \tanh\left(\frac{U_{pa}}{2U_o}\right) \quad (12)$$

Opracowany model statyczny w niektórych przypadkach, szczególnie w analizach obwodu AC i zmiennej konfiguracji obciążenia DC może wymagać zastosowania dodatkowych pojemności przyłączonych równolegle po stronie napięcia U_{pa} i U_{pd} tak jak to zaprezentowano na rysunku 7. W efekcie otrzymujemy model dynamiczny prostownika. Przyłączone pojemności C_1 i C_2 powinny mieć wartości rzędu ok. 1nF, co sprawia, że ich wpływ na wyniki prowadzonych symulacji będzie znikomy, natomiast znacznie uprości modelowanie obwodu.



Rys. 7. Schemat prostownika mostkowego z dodatkowymi pojemnościami C_1 i C_2 – model dynamiczny

Równania takiego obwodu można zapisać w postaci:

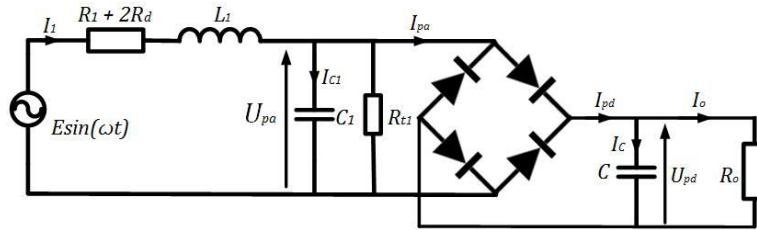
$$C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = I_1 - I_{pa} \quad (13)$$

$$C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} = I_{pd} - I_2 \quad (14)$$

Zmienne stanu U_{C1} i U_{C2} są to odpowiednio napięcia U_{pa} i U_{pd} . Prądy I_{pa} i I_{pd} obliczane są na podstawie zależności (10–12). Prądy I_1 i I_2 wynikają z pozostałych elementów obwodu.

4. ANALIZA OPRACOWANEGO MODELU PROSTOWNIKA W OBWODZIE AC

Aby przeanalizować opracowany model prostownika wykorzystano obwód z rysunku 3 i zmodyfikowano do postaci z rysunku 8. Wykorzystano dynamiczny model prostownika mostkowego. Równolegle do wejścia prostownika dołączono rezystancję R_{t1} w celu tłumienia oscylacji powstających w napięciu U_{pa} na zaciskach wejściowych prostownika.



Rys. 8. Zmodyfikowany schemat obwodu z rysunku 3

Obwód z rysunku 8 opisano układem równań różniczkowych (15–17), który następnie rozwiązano w Simulinku.

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = E \sin(\omega t) - I_1(R_1 + 2R_d) - U_{pa} \quad (15)$$

$$C_1 \frac{dU_{pa}}{dt} = I_1 - I_{pa} \quad (16)$$

$$C \frac{dU_{pd}}{dt} = I_{pd} - \frac{1}{R_o} U_{pd} \quad (17)$$

Prądy I_{pa} i I_{pd} obliczane są na podstawie zależności (10) i (11). Przykładowe wyniki symulacji przeprowadzone przy użyciu zmiennokrokowej metody ode23tb (zmodyfikowany algorytmu trapezów i Geara) zaprezentowano na rysunku 9. Są to charakterystyczne przebiegi prądów i napięć w obwodzie dla: $E = 24 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $R_1 = 1 \text{ } \Omega$; $C_1 = 1 \text{ nF}$; $R_{t1} = 1 \text{ k}\Omega$; $L_1 = 30 \text{ mH}$; $C = 1 \text{ mF}$; $R_o = 10 \text{ } \Omega$; $R_d = 0,04 \text{ } \Omega$; $I_o = 14.11 \text{ nA}$; $U_o = 51.8 \text{ mV}$. Układ rozwiązano dla dokładności względnej $1e-5$ oraz bezwzględnej $1e-7$.

Proponowany model jest również użyteczny, gdy w obciążeniu DC będzie indukcyjność tak jak jest to prezentowane na rysunku 10. Układ równań różniczkowych opisujących obwód z rysunku 10 jest następujący:

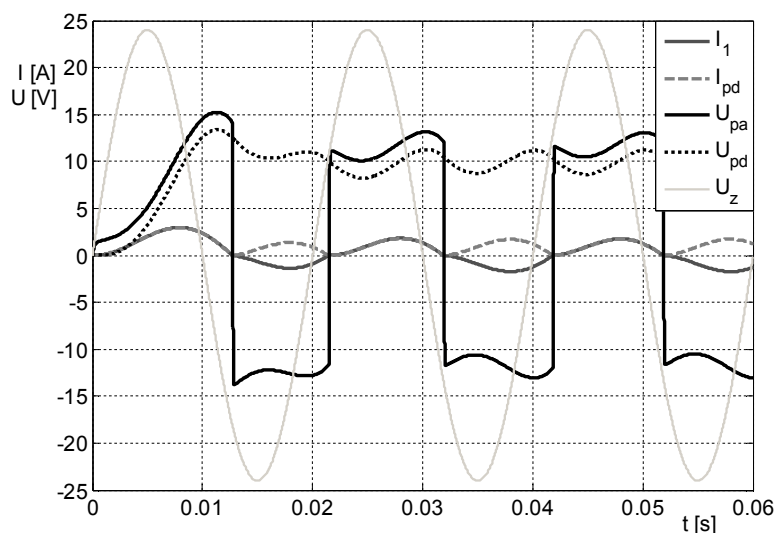
$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = E \sin(\omega t) - I_1 R_1 - U_{C1} \quad (18)$$

$$C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = I_1 - \frac{1}{R_{t1}} U_{C1} - I_{pa} \quad (19)$$

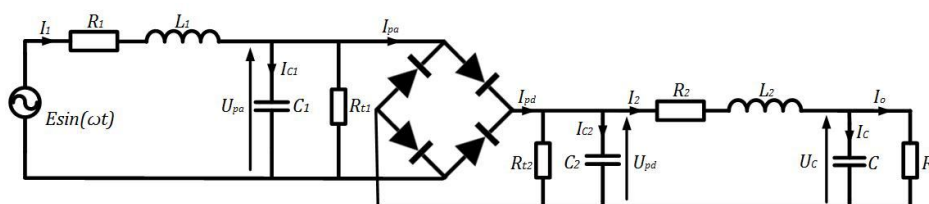
$$C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} = I_{pd} - \frac{1}{R_{t2}} U_{C2} - I_2 \quad (20)$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} = U_{C2} - U_c - I_2 R_2 \quad (21)$$

$$C \frac{dU_c}{dt} = I_2 - \frac{1}{R_o} U_c \quad (22)$$



Rys. 9. Przebiegi prądów i napięć w Simulinku dla obwodu z rysunku 8 – metoda ode23tb

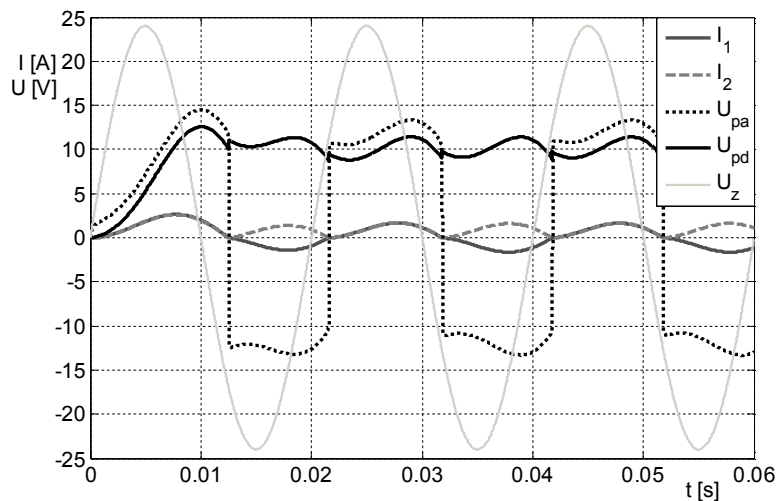


Rys. 10. Schemat obwodu AC z indukcyjnością na wyjściu prostownika

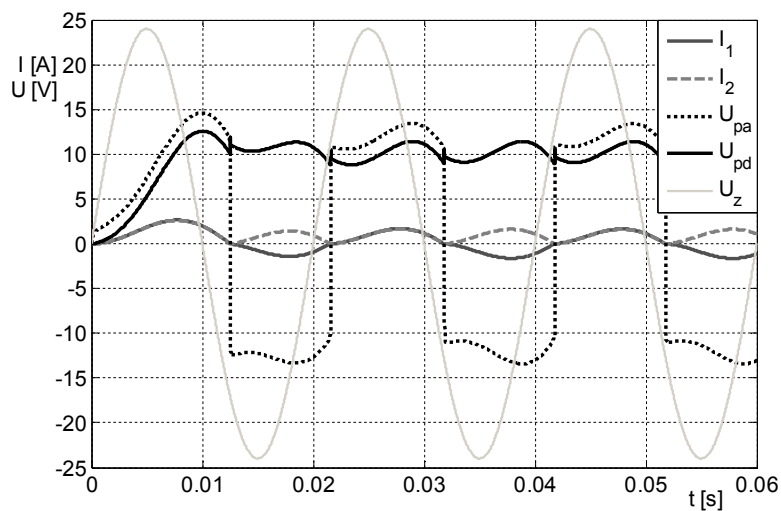
Prądy I_{pa} i I_{pd} są obliczane na podstawie (10) i (11). Symulacje obwodu przeprowadzono w Simulinku wykorzystując metodę ode23tb. Układ rozwiązano dla dokładności względnej $1e-5$ oraz bezwzględnej $1e-7$.

W symulacji przyjęto wartości: $E = 24 \text{ V}$; $\omega = 314 \text{ rad/s}$; $R_1 = 1 \text{ } \Omega$; $R_2 = 1 \text{ } \Omega$; $L_1 = 30 \text{ mH}$; $L_2 = 1 \text{ mH}$; $C_1 = 1 \text{ nF}$; $C_2 = 1 \text{ nF}$; $R_{t1} = 1 \text{ k}\Omega$; $R_{t2} = 1 \text{ k}\Omega$; $C = 1 \text{ mF}$; $R_o = 10 \text{ } \Omega$ oraz $I_o = 14.11 \text{ nA}$ i $U_o = 51.8 \text{ mV}$. W celu weryfikacji otrzymanych wyników symulację obwodu przeprowadzono w programie PSpice dla tych samych wartości elementów i parametrów wejściowych.

Otrzymane przebiegi w Simulinku jak i programie PSpice prezentowane odpowiednio na rysunkach 11 i 12 są porównywalne. W Simulinku układ rozwiązywano metodami zmiennokrokowymi zalecanymi do rozwiązywania równań różniczkowych sztywnych. W przypadku pozostałych metod zmiennokrokowych czas rozwiązywania takiego obwodu jest znacznie dłuższy.



Rys. 11. Przebiegi obwodu z rysunku 10 w Simulinku – metoda ode23tb



Rys. 12. Przebiegi obwodu z rysunku 10 w PSpice – algorytm Geara

5. PODSUMOWANIE

Wykonane analizy dowodzą, że wybór rodzaju modelu prostownika odgrywa istotną rolę w modelowaniu rozważanego obwodu. Modelowanie prostownika przy użyciu funkcji *sigum* jest możliwe, ale tylko gdy wykorzystuje się metody stałokrokowe całkowania numerycznego z bardzo małym krokiem. W przypadku metod zmiennokrokowych model taki zatrzymuje się w przejściu przez zero

napięcia wejściowego prostownika. Krok całkowania wtedy maleje. Czas rozwiązywania jest długi. Proponowany model prostownika mostkowego rozwiązuje wymienione problemy i znacznie poprawia czas rozwiązań wykorzystując metody zmiennokrokowe. Model taki jest użyteczny w analizie oddziaływań obciążenia nieliniowego z systemem zasilania. Analiza taka wymaga uwzględnienia sztywności systemu zasilania oraz dodatkowych elementów, które występują w obwodzie m.in. elementów pasywnych ograniczających przepływ wyższych harmonicznych. W efekcie obwód, który powstaje jest dość złożony i istotną rolę odgrywają procesy dynamiczne. Złożoność modelowanego obwodu ze względu na rodzaj i wartości znamionowe zastosowanych elementów sprawiają, że równania modelujące obwód są równaniami różniczkowymi sztywnymi, do których wymagane są dedykowane metody rozwiązywania równań. Na podstawie zaprezentowanych modeli prostownika można stwierdzić, że nie sztywność równań różniczkowych decyduje o rozwiązywalności układu, ale rodzaj nieliniowości w modelu prostownika.

LITERATURA

- [1] IEEE PES Harmonic Working Group, „Modeling Devices With Nonlinear Voltage–Current,” *IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, pp. 1802–1811, 4 October 2004.
- [2] IEEE PES Harmonic Working Group, „Characteristics and Modeling of Harmonic Sources—Power Electronic Devices,” *IEEE PES Harmonic Working Group*, pp. 791–800, October 2001.
- [3] N. Mohan, T. M. Undeland i W. P. Robbins, *Power Electronics Converters, Applications and Design*, John Wiley & Sons Ltd, 2003.
- [4] K. Iwan, P. Musznicki, J. Guziński i J. Łuszcz, *Laboratorium Podstaw Energoelektroniki*, Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2011.
- [5] J. Das, *Power System Harmonics and Passive Filter Designs*, John Wiley & Sons, 2015.
- [6] B. Singh i A. Chandra, *Power Quality – Problems and Mitigations Techniques*, John Wiley & Sons Ltd, 2015.
- [7] R. Supronowicz i H. Strzelecki, *Współczynnik mocy w systemie zasilania prądu przemiennego i metody jego poprawy*, Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2000.
- [8] M. Wciślik i P. Strząbała, „The simulation analysis of the bridge rectifier continuous operation in AC circuit,” *Computer Applications in Electrical Engineering*, 2016.
- [9] M. Wciślik i P. Strząbała, „Wyższe harmoniczne i moce w obwodzie prądu przemiennego z indukcyjnością i prostownikiem mostkowym,” *Przegląd Elektrotechniczny*, pp. 118–121, Marzec 2016.

- [10] MathWorks, „<https://www.mathworks.com/help/simulink/ug/zero-crossing-detection.html>,” MathWorks, 2016. [Online]. [Data uzyskania dostępu: 26 1 2017].
- [11] J. Kudrewicz, Nieliniowe obwody elektryczne. Teoria i symulacja komputerowa., Warszawa: WNT, 1996.
- [12] U. Tietze i C. Schenk, Układy półprzewodnikowe, Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2009.

NUMERICAL PROBLEMS OF AC CIRCUIT MODELING WITH RECTIFIER BRIDGE

The papers deal with a modeling methods of AC circuit witch rectifier bridge. Modeling methods such load by using the signum function and including additional circuit elements have been proposed and analyzed. In the methods replacements parameters of the power supply are included. Because of the numerical problems and the solutions accuracy, which can occur for the rectifier model described by signum function new rectifier model has been proposed. The analyses were carried out in MATLAB/Simulink. The results were compared with the program PSpice OrCAD.

(Received: 10. 02. 2017, revised:27. 02. 2017)