

## SZYBKA ESTYMACJA PARAMETRÓW STANU DYNAMICZNEGO SAMOLOTU W CZASIE BADAŃ W LOCIE

ROBERT KRÓLIKOWSKI, FRANCISZEK LENORT, ANTONI NIEPOKÓLCZYCKI

*Instytut Lotnictwa*

### Streszczenie

*W pracy przedstawiono metodę obliczania estymaty funkcji autokorelacji na podstawie skończonych odcinków drgań, która zachowuje wartości współczynników tłumienia sygnału drgań i nadaje się do analizy sygnałów niestacjonarnych. Jest to narzędzie analizy czasowo-częstotliwościowej, umożliwiającej badanie chwilowych własności sygnałów niestacjonarnych.*

### 1. WSTĘP

Przepisy lotnicze [5,6] wymagają by każdy samolot był odporny na drgania flutterowe. Drganiami flutterowymi nazywane są występujące w locie samowzbudne drgania aerosprężyste struktury samolotu. Drgania te mogą spowodować uszkodzenie lub zniszczenie samolotu.

Aby tego uniknąć, wykonuje się teoretyczne obliczenia flutterowe, badania fizycznych modeli flutterowych w tunelach aerodynamicznych, badania rezonansowe na ziemi i badania flutterowe prototypu samolotu w locie.

Badania flutterowe w locie muszą udowodnić i udokumentować swobodę samolotu od drgań flutterowych w całym zakresie planowanych prędkości i wysokości lotu. Dowodem są wartości współczynników tłumienia postaci drgań struktury samolotu istotnych ze względu na flutter.

Klasyczne metody pomiarów współczynników tłumienia polegają na sztucznych wymuszeniach drgań i analizie tych drgań w czasie lotów z kolejno zwiększającymi prędkościami.

Stosuje się wymuszenia impulsowe, harmoniczne lub stochastyczne. Wymaga to zabudowy na samolocie dodatkowej aparatury, podnosi koszty badań i wydłuża czas badań.

W ostatnich latach udowodniono teoretycznie [1,7,8], że impulsowa odpowiedź obiektu badanego może być zastąpiona funkcją korelacji własnej sygnału drgań wymuszonych stochastycznie. Zakładając, że drgania skrzydeł lub usterzenia samolotu w czasie lotu mają charakter drgań wymuszonych stochastycznie, można oceniać współczynniki tłumienia analizując estymaty funkcji korelacji własnej (autokorelacji).

W badaniach zawsze uzyskujemy skończone sygnały drgań i na ich podstawie możemy obliczyć pewne przybliżenia, czyli estymaty funkcji autokorelacji. Dowód możliwości zastąpienia odpowiedzi impulsowej funkcją autokorelacji został przeprowadzony dla nieskończonego sygnału drgań.

Istniejące w literaturze metody obliczania estymaty autokorelacji były opracowane dla sygnałów stacjonarnych. Jednak metody te zmieniają wartości współczynników tłumienia pierwotnego sygnału drgań rzeczywistych.

Celem niniejszej pracy było opracowanie takiej metody obliczania estymaty autokorelacji na podstawie skończonych odcinków drgań, która zachowuje wartości współczynników tłumienia sygnału drgań i nadaje się do sygnałów niestacjonarnych. Oprócz sygnałów stacjonarnych mogą to być sygnały swobodnie zanikające lub sygnały rosnące. Jest to narzędzie nadające się do tzw. analizy czasowo-częstotliwościowej, badającej chwilowe własności sygnałów niestacjonarnych.

W następnych rozdziałach zostaną przedstawione teoretyczne przyczyny błędów obliczania współczynników tłumienia na podstawie przebiegu estymaty funkcji autokorelacji wyznaczonej istniejącymi metodami. Będą też przytoczone przykłady obliczeń tłumienia za pomocą różnych estymat funkcji autokorelacji.

## 2. KLASYCZNE METODY OBLICZANIA FUNKCJI KORELACJI WŁASNEJ

### Metoda podstawowa

W pracy [1] przytoczono powszechnie stosowane wzory do obliczania funkcji korelacji dla stacjonarnych ergodycznych procesów stochastycznych za pomocą jednej realizacji procesu stochastycznego dostatecznie długiej w czasie.

Funkcję korelacji własnej procesu  $y(t)$  wyznacza się ze wzoru:

$$R_{yy}(\tau) \approx \hat{R}_{yy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [y(t) - m_y][y(t+\tau) - m_y] dt \quad (2.1)$$

gdzie

$$m_y \approx \hat{m}_y = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (2.2)$$

Stwierdzono też tam, że w praktyce stosuje się przybliżone wzory sumacyjne:

$$R_{yy} \approx \frac{1}{N-l} \sum_{n=1}^{N-l} [y(n\Delta t) - m_y][y(n\Delta t + l\Delta t) - m_y] \quad (2.3)$$

gdzie

$$m_y \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n\Delta t) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, \dots, N & N\Delta t &= T \\ l &= 0, 1, 2, \dots, L & L\Delta t &= \tau_{\max} \end{aligned}$$

Proces stacjonarny ma stałą wartość średnią  $m_y$  w funkcji czasu i stałą wariancję w funkcji czasu. Proces stacjonarny jest ergodyczny gdy średnie po czasie są równe średnim po zbiorze realizacji procesu stochastycznego.

W cytowanej pracy [1] zaznaczono, że obliczenia ze wzorów sumacyjnych (obliczenia komputerowe) są pewnymi przybliżeniami funkcji autokorelacji. Wymagania dotyczące dokładności obliczeń będą omawiane w dalszej części tej pracy.

### Metody podane w MATLAB-ie

W tym zbiorze programów do obliczeń komputerowych [2] można wybrać kilka metod obliczania funkcji autokorelacji. Dla stacjonarnego procesu stochastycznego, o wartościach rzeczywistych, określono funkcję autokorelacji w postaci:

$$R_{yy}(l) = E\{y_n y_{n+l}\} \quad (2.5)$$

gdzie  $-\infty < n < +\infty$

$E\{\}$  jest operatorem wartości oczekiwanej.

Dla procesów skończonych, z jakimi mamy do czynienia w praktyce, dla przesunięć  $l$  dodatnich, jest podany wzór:

$$R_{yy}(l) = \sum_{n=1}^{N-l} y_n y_{n+l} \quad (2.6)$$

gdzie  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Ta postać wzoru jest traktowana jako standardowa, domyślna (ang. default).

Jako estymator nieobciążony (ang. unbiased) funkcji autokorelacji nazwano wzór:

$$R_{yy,umb}(l) = \frac{1}{N-l} R_{yy}(l) \quad (2.7)$$

Jako estymator obciążony (ang. biased) jest nazwany wzór:

$$R_{yy,biased}(l) = \frac{1}{N} R_{yy}(l) \quad (2.8)$$

Aby otrzymać znormalizowaną wartość estymatora funkcji autokorelacji należy podzielić wyniki obliczeń przez pierwszą wartość, czyli przez  $R_{yy}(0)$ . W tym przypadku estymata funkcji autokorelacji zaczyna się od wartości 1.

### Metoda stosowana w analizatorze drgań firmy B&K

W instrukcji użytkownika [3] dwukanałowego analizatora sygnałów firmy B&K Type 2034 przyjęto następujące zasady obliczania funkcji autokorelacji:

$$R_{yy}(n) = F^{-1} \left[ W(k) \cdot \overline{G_{yy}(k)} \right] \quad (2.9)$$

gdzie

$$0 \leq n \leq N-1, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad N = 2048,$$

$F^{-1}$  jest operatorem odwrotnej transformaty Fouriera,

$$W_k \text{ jest funkcją wagi, } \overline{G_{yy}(k)} = \overline{G_y^*(k) \cdot G_y(k)} = \overline{|G_y(k)|^2}$$

gdzie

$$G_y(k) = \begin{cases} Y(k) & \text{dla } k=0 \\ 2Y(k) & \text{dla } 1 \leq k \leq N/2-1 \\ 0 & \text{dla } N/2 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

$$Y(k) = F[y(n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi kn}{N}\right)$$

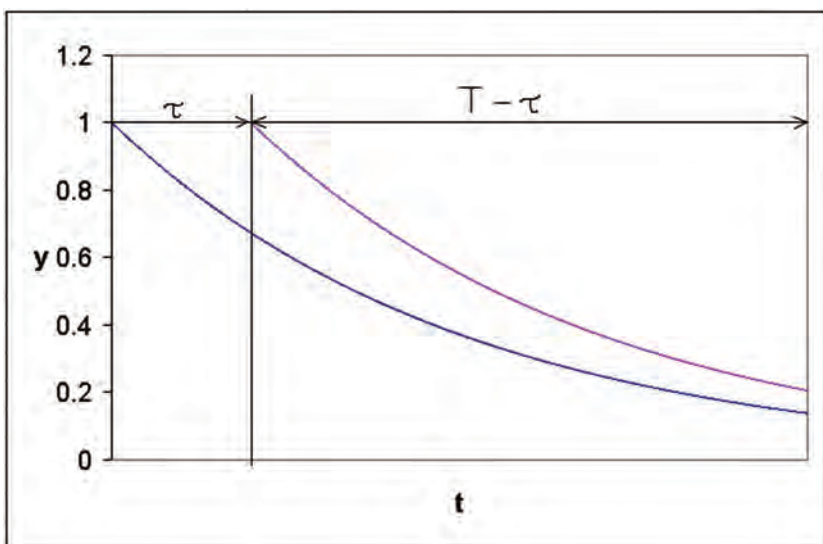
$$y(n) = F^{-1}[Y(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \cdot \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N}\right)$$

Tak obliczona funkcja autokorelacji  $R_{yy}(n)$  jest normalizowana i przyjmowana za poprawne przybliżenie współczynnika autokorelacji dla wartości wskaźnika  $n$  zawartych w zakresie:

$$0 \leq n \leq N/2-1$$

Obliczając dalej, dla punktów  $N/2 < n \leq N$  otrzymalibyśmy zwierciadlane odbicie wartości funkcji korelacji własnej:  $R_{yy}(N/2-i) = R_{yy}(N/2+i)$  dla  $i = 1, 2, 3, \dots, N/2$ .

Niżej przedstawiamy na rysunkach zasady obliczeń według przytoczonych wyżej wzorów dla przykładowej funkcji  $y(t) = \exp(-\lambda t)$ .

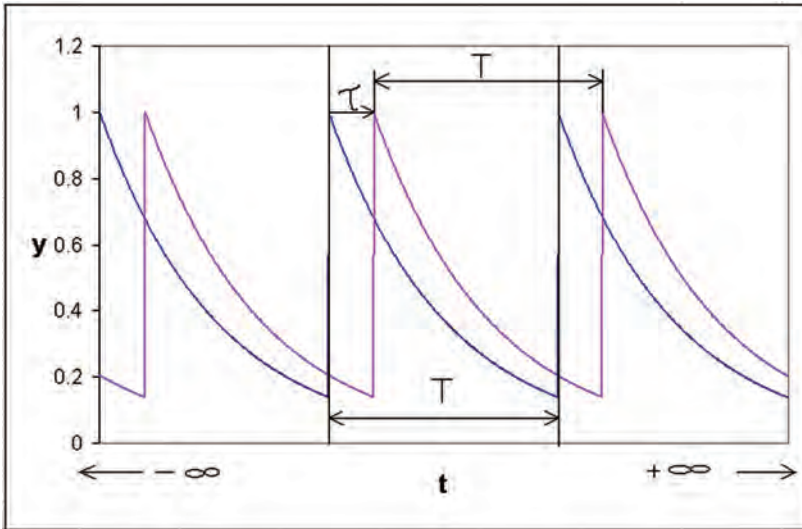


Rys.2.1.

Rys.2.1. Zasady obliczeń nieobciążonej estymaty funkcji korelacji własnej wg MATLAB-a, wzór (2.7), gdzie  $\tau = l \Delta t$ ,  $T = N \Delta t$ . Zmiana zakresu całkowania (lub sumowania iloczynów) powoduje zmianę współczynnika tłumienia  $\lambda$  obliczonej funkcji  $R_{yy}(l)$ , ponieważ wzór (2.7) został opracowany dla sygnałów  $y(t)$  stacjonarnych. Kolorem niebieskim naniesiono sygnały  $y(t)$  w przedziale czasu  $T$ . Kolorem czerwonym pokazano sygnały  $y(t)$  przesunięty w prawo o wartość  $\tau$ .

Podobnie jest obliczana funkcja korelacji własnej wg wzoru (2.1). Różnica polega na odjęciu od sygnału  $y(t)$ , przed obliczeniami, jego wartości średniej, wg wzoru (2.2). Centralny moment drugiego (2.1) można też obliczyć z niecentralnego momentu drugiego (2.7) ponieważ zachodzi zależność [1]:

$$R_{yy,centr}(l) = R_{yy,niecentr}(l) - m_y^2.$$



Rys.2.2.

Zasady obliczania funkcji korelacji własnej wg firmy B&K, wzór (2.9). Wzór ten jest równoważny sumowaniu iloczynów funkcji  $y(t)$  i przesuniętej funkcji  $y(t)$  o wartość  $\tau$ , w przedziale  $T = \text{const}$ . Przyjęto  $\tau_{\max} = (N/2 - 1)\Delta t$ , ponieważ  $R_{yy}(N/2+i) = R_{yy}(N/2-i)$  dla  $i = 1, 2, 3, \dots, N/2$ . Te własności wynikają z własności szybkiej transformaty Fouriera. Między innymi, w zasadach przyjętych w tych obliczeniach jest założenie, że funkcja  $y(t)$  jest funkcją okresową o okresie  $T$ , określoną w przedziale  $-\infty \leq t \leq +\infty$ . Dla sygnału  $y(t)$  niestacjonarnego, tak określona funkcja autokorelacji nie zachowuje współczynnika tłumienia  $\lambda$ . Przykładowe wyniki obliczeń funkcji korelacji własnej wg wzorów (2.1), (2.7), (2.9) są zamieszczone w rozdziale 5.

### 3. PROPONOWANA METODA OBLICZANIA FUNKCJI KORELACJI WŁASNEJ

Możliwość zastąpienia odpowiedzi impulsowej funkcją korelacji własnej jest ważnym zagadnieniem w czasie badań flatterowych w locie. Za pomocą funkcji autokorelacji można ocenić odporność samolotu na niebezpieczne drgania struktury samolotu w locie na podstawie mierzonych drgań w normalnym locie, bez specjalnych, dodatkowych urządzeń do wymuszania drgań.

Zastosowanie tej metody wymaga jednak sprawdzenia teoretycznego i praktycznego, czy stosowane obecnie estymaty funkcji korelacji własnej zachowują wartości współczynników tłumienia badanego obiektu.

Wątpliwości wynikają z tego powodu, że dowód przeprowadzono [7,8] dla nieskończenie długiego sygnału drgań. Funkcja korelacji własnej takiego sygnału zachowuje częstotliwości

i współczynniki tłumienia modalne badanego obiektu. W praktyce mamy jednak zawsze pomierzone skończone odcinki drgań. Estymaty funkcji autokorelacji takich sygnałów zmieniają współczynniki tłumienia, co będzie pokazane teoretycznie i praktycznie w dalszych rozdziałach. Właśnie wyniki naszych obliczeń praktycznych na sygnałach modelowych, o znanych współczynnikach tłumienia, wykazały jednoznacznie, że istniejące estymaty autokorelacji wnoszą błędy metodyczne, związane jednoznacznie z poszczególnymi estymatami.

Analiza rzeczywistych sygnałów drgań wnosi dodatkowo błędy wynikające z błędów pomiarowych i z tego powodu, że wymuszenia w czasie normalnego lotu nie są ściśle stacjonarnym białym szumem.

Aby wyeliminować błędy metodyczne oceny współczynników tłumienia za pomocą istniejących estymat, proponujemy nową estymatę funkcji korelacji własnej. Opisowo, polega to na tym, że mając pomierzony i spróbkowany odcinek drgań, bierzemy pierwsze  $N/2$  próbek i przesuwamy nad całym odcinkiem. Po każdym przesunięciu o jedną próbkę, mnożymy wartości przypadających na siebie próbek i sumujemy od 1 do  $N/2$  iloczynów. Otrzymaną sumę dzielimy przez  $N/2$ .

Przy zerowym przesunięciu otrzymujemy pierwszy punkt estymaty autokorelacji  $R_{yy}(0)$ . Punkty przesuwane odcinka o liczności  $N/2$  były dokładnie nad pierwszą połową całego odcinka.

Ostatni punkt proponowanej estymaty otrzymujemy gdy przesuwany odcinek znajduje się dokładnie nad drugą połową całego odcinka drgań ( $R_{yy}$ ).

Dla  $N$  punktowego wektora sygnału drgań otrzymujemy  $N/2+1$  punktów estymaty funkcji autokorelacji (gdy  $N$  jest parzyste).

Uwzględniając własności konkretnego sygnału, można długość przesuwane odcinka zwiększyć. Wtedy otrzymamy mniejszy odcinek funkcji autokorelacji. I odwrotnie, zmniejszając długość odcinka przesuwane odcinka, zwiększymy długość otrzymanej funkcji autokorelacji.

Jeżeli użyjemy szybkiej transformaty Fouriera (FFT) do obliczania funkcji autokorelacji, to  $N$  powinno spełniać warunek:  $N = 2^m$ , gdzie  $m$  jest liczbą naturalną.

Proponowaną estymatę funkcji korelacji własnej można zapisać w postaci sumacyjnej:

$$R_{yy}(l) = \frac{1}{N/2} \sum_{n=1}^{N/2} y_n \cdot y_{n+l} \quad (3.1)$$

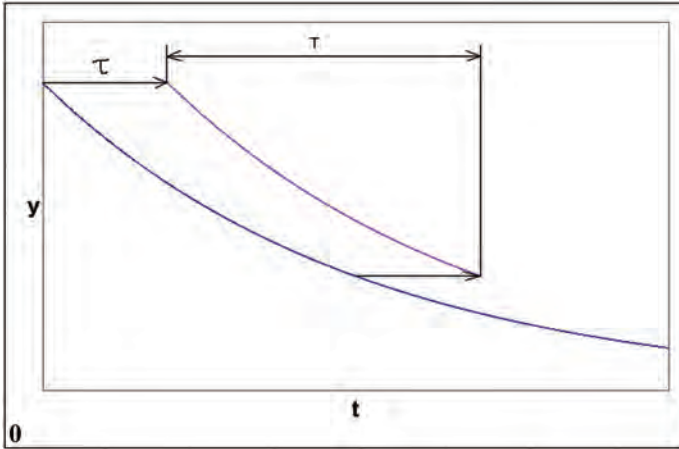
gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots, N$   $l = 0, 1, 2, \dots, N/2$

lub w postaci całkowej:

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T y(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt \quad (3.2)$$

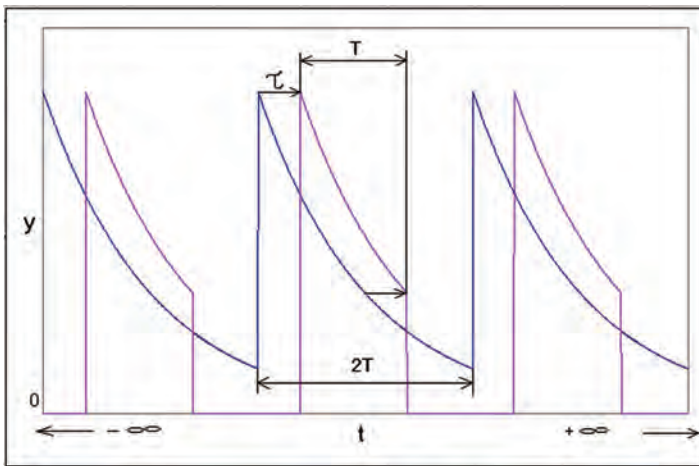
gdzie  $y(t)$  jest sygnałem rzeczywistym w przedziale  $0 \leq t \leq T + \tau$   
 $0 \leq \tau < T$

Oznaczenia przyjęte w równaniu (3.2) pokazano na rys. 3.1.



**Rys. 3.1.**

Przykład zasad obliczania funkcji korelacji własnej dla funkcji  $y(t) = \exp(-\lambda t)$ . Kolorem niebieskim jest narysowana funkcja  $y(t)$ . Kolorem czerwonym naniesiono pierwszą połowę sygnału  $y(t)$ , przesuwaną wzdłuż osi czasu. Pierwszy punkt funkcji autokorelacji otrzymujemy dla  $\tau = 0$ , a ostatni dla  $\tau = T$ .



**Rys. 3.2.**

Przykład zasad obliczania funkcji korelacji własnej dla funkcji  $y(t) = \exp(-\lambda t)$ , za pomocą szybkiej transformaty Fouriera (FFT). Kolor niebieski: funkcja okresowa  $y(t)$  o okresie  $2T$ , kolor czerwony: funkcja okresowa  $y(t)$  od 0 do  $T$ , uzupełniona zerami od  $T$  do  $2T$ .

#### 4. TEORETYCZNY DOWÓD POPRAWNOŚCI PROPONOWANEJ METODY

W trakcie dowodu, że funkcja korelacji własnej może zastąpić nieznaną funkcję odpowiedzi impulsowej badanego obiektu, wystąpiła potrzeba obliczenia całki nieskończonej (od 0 do  $+\infty$ ) z iloczynu dwu odpowiedzi impulsowych. Wynikiem tego działania była odpowiedź impulsowa zachowująca modalne wartości własne (częstotliwość i współczynnik tłumienia).

Udowodnimy, że proponowany estymator całkowy (3.2) też zachowuje wartości własne, nawet na podstawie skończonego sygnału drgań.



Przyjmujemy odpowiedź impulsową w postaci:

$$y(t) = A \exp(-\zeta \omega_0 t) \sin(\omega_d t) \quad (4.1)$$

gdzie:

$A$  - amplituda drgań,

$\zeta$  - współczynnik tłumienia wiskotycznego,

$\omega_0$  - częstotliwość drgań własnych układu badanego bez tłumienia,

$\omega_d$  - częstotliwość drgań własnych układu z tłumieniem,  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$

Równanie (3.2) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} R_{yy,T}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T y(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T A \exp(-\zeta \omega_0 t) \sin(\omega_d t) \cdot A \exp(-\zeta \omega_0 (t+\tau)) \sin(\omega_d (t+\tau)) dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \left[ \sin^2(\omega_d \tau) + \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t) \sin(\omega_d \tau) \right] dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \sin^2(\omega_d t) dt + \\ &+ \frac{A^2}{T} \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \sin(\omega_d \tau) \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t) dt = \\ &= C_1 \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) + C_2 \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \sin(\omega_d \tau) \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A^2}{T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \sin^2(\omega_d t) dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega_d t)) dt = \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) dt - \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \cos(2\omega_d t) dt = \\ &= C_{11} - C_{12} \end{aligned}$$



Całka

$$C_{11} = \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta\omega_0 t) dt = A^2 \frac{1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)}{4\zeta\omega_0 T}$$

Dla  $T = kT_{okr} = k 2\pi/2\omega_d$ ,  $k=1,2,3,\dots$  całka

$$C_{12} = \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta\omega_0 t) \cos(2\omega_d t) dt = A^2 \frac{\zeta\omega_0 [1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4T [\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2]}$$

Dla  $T = kT_{okr} = k 2\pi/2\omega_d$ ,  $k=1,2,3,\dots$  całka

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{A^2}{T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta\omega_0 t) \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t) dt = \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\zeta\omega_0 t) \sin(2\omega_d t) dt = \\ &= A^2 \frac{\omega_d (1 - \exp(-2\omega_0 T))}{4T [\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2]} \end{aligned}$$

A więc

$$\begin{aligned} R_{yy,T}(\tau) &= (C_{11} - C_{12}) \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) + C_2 \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \sin(\omega_d \tau) = \\ &= \left\{ A^2 \frac{1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)}{4\zeta\omega_0 T} - A^2 \frac{\zeta\omega_0 [1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4T [\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2]} \right\} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) + \\ &+ A^2 \frac{\omega_d [1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4T [\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2]} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \sin(\omega_d \tau) = \\ &= A^2 \frac{1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)}{4\zeta\omega_0 T [\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2]} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) [\omega_d^2 \cos(\omega_d \tau) + \omega_d \zeta\omega_0 \sin(\omega_d \tau)] = \\ &= A^2 \frac{\omega_d [1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4\zeta\omega_0 T \sqrt{\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2}} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \sin(\omega_d \tau + \varphi) = \\ &= A^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4\zeta\omega_0 T} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \sin(\omega_d \tau + \varphi) \end{aligned}$$

Otrzymany wynik możemy zapisać w postaci:

$$R_{yy,\tau}(\tau) = C \exp(-\zeta\omega_0\tau) \sin(\omega_d\tau + \varphi) \quad (4.2)$$

gdzie stała  $C$  wyraża się wzorem:

$$C = A^2 \sqrt{1-\zeta^2} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4\zeta\omega_0 T} \quad (4.3)$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega_d}{\sqrt{\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2}} \quad \cos \varphi = \frac{\zeta\omega_0}{\sqrt{\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_d}{\zeta\omega_0} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_0} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Z powyższej zależności wynika, że

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_d}{\zeta\omega_0} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

a więc:

$$\cos \varphi = \zeta \quad \varphi = \arccos \zeta \quad (4.4)$$

Formalnie, możemy w otrzymanym wzorze (4.2) czas oznaczyć literą  $t$  zamiast  $\tau$ . Widzimy, że obliczona, zgodnie z proponowaną metodą, estymata funkcji autokorelacji  $R_{yy,T}(\tau)$  jest swobodnie zanikającym sygnałem o tej samej wartości współczynnika tłumienia  $\zeta$  i o tej samej wartości częstotliwości własnej  $\omega_d$ , jak w sygnale przetwarzanym  $y(t)$ .

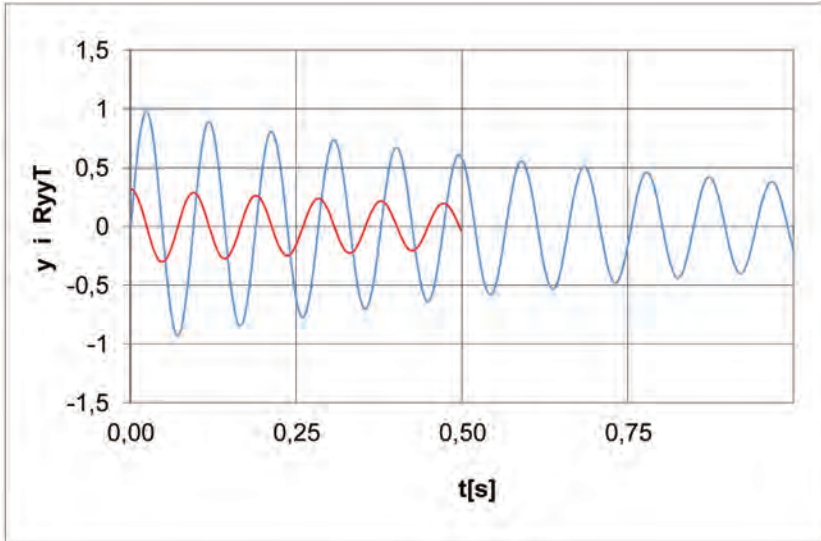
Stały współczynnik  $A$  został zastąpiony przez stałą  $C$ , a faza  $\varphi = 0$  na początku sygnału, została zastąpiona zgodnie ze wzorem (4.4): dla sygnału nie tłumionego, gdy  $\zeta = 0$ , faza tej sinusoidy wynosi  $\pi/2$  rad. Sinusoida nietłumiona jest zamieniana na cosinusoidę nietłumioną, zgodnie z teorią.

Należy tu podkreślić, że otrzymaliśmy poprawny wynik, czyli zachowanie wartości własnych dla skończonego sygnału odpowiedzi impulsowej: dla sygnału niestacjonarnego.

Wzór (4.4) mówi nam, że faza początkowa funkcji korelacji własnej jest jednoznacznie zależna od współczynnika tłumienia. Dla sygnału  $y(t)$  zanikającego, sygnał autokorelacji zaczyna się swoją wartością maksymalną. Przykładowo, dla  $\zeta = 0.015$ , funkcja autokorelacji wyrażona za pomocą funkcji  $\sin$  zaczyna się od fazy początkowej  $\varphi = 1.5558$  rad. Dla sygnału  $y(t)$  rosnącego, jego funkcja autokorelacji nie zaczyna się wartością maksymalną (ta funkcja też jest funkcją rosnącą). Na przykład, dla  $\zeta = -0.015$  faza początkowa  $\varphi = 1.5858$  rad. Taki sam wzór (4.4) otrzymano [9] poszukując położenia punktów maksymalnych zanikającej wykładniczo

funkcji  $\sin$  (patrz rys.4.4). Tłumiona sinusoida o fazie początkowej  $\varphi = 0$  ma pierwsze maksimum dla fazy  $\varphi = \arccos \zeta$ . Kolejne maksima przypadają w punktach  $\varphi + n \cdot 2\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Wracając do wyprowadzonego wzoru analitycznego na funkcję korelacji własnej (4.2), niżej przedstawiamy (Rys.4.1) przykładowy przebieg sygnału zanikającego (4.1) i jego funkcji korelacji własnej, dla  $A = 1$ ,  $\zeta = 0.015$  i  $f_d \approx f_0 = 10.6$  Hz.



Rys.4.1

Dla  $T = 1$  s obliczamy funkcję autokorelacji (kolor czerwony) tylko w przedziale  $0 \leq \tau \leq T/2$ . Wartość współczynnika tłumienia  $\zeta$  i częstotliwość  $f_d$  sygnału autokorelacji są takie same jak sygnału  $y(t)$ . Nastąpiła zmiana amplitudy i fazy początkowej. Na podstawie analizy wzoru (4.1), można stwierdzić, że dla  $\zeta = 0$  i  $A = 2$  amplituda funkcji autokorelacji pozostaje taka sama:  $C = 2$ . Ogólnie, dla amplitud  $A$  większych od 2, amplitudy autokorelacji są powiększane, zgodnie ze wzorem (4.2) a mniejsze od 2 są zmniejszane. To jest cecha pozytywna funkcji autokorelacji, bo ułatwia to dekompozycję złożonego sygnału odpowiedzi impulsowej, lub innych swobodnie zanikających sygnałów i sygnału drgań w czasie normalnej eksploatacji samolotu w locie. Szum biały jest praktycznie całkowicie usuwany, funkcja autokorelacji jest „gładsza” od pierwotnego sygnału drgań.

Zajmiemy się teraz zastosowaniem proponowanej metody obliczania funkcji korelacji własnej dla zanikającego sygnału o nieskończonej długości, gdy  $T \rightarrow +\infty$ . Zajmiemy się całką:

$$R_{yy,\infty}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{t=0}^T y(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt \quad (4.5)$$

gdzie  $y(t)$  jest sygnałem (4.1).

Wynikiem obliczeń jest wyrażenie:

$$R_{yy,\infty}(\tau) = A^2 \sqrt{1-\zeta^2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4\zeta\omega_0} \exp(-\zeta\omega_0\tau) \sin(\omega_d\tau + \varphi) \quad (4.6)$$

a więc

$$R_{yy,\infty}(\tau) = A^2 \sqrt{1-\zeta^2} \frac{1}{4\zeta\omega_0} \exp(-\zeta\omega_0\tau) \sin(\omega_d\tau + \varphi) \quad (4.7)$$

czyli

$$R_{yy,\infty}(\tau) = C_\infty \exp(-\zeta\omega_0\tau) \sin(\omega_d\tau + \varphi)$$

gdzie  $C_\infty = const$

Widzimy więc, że proponowana metoda obliczania funkcji korelacji własnej przekształca nieskończony zanikający wykładniczo sygnał na sygnał nieskończony o tej samej częstotliwości i o tym samym współczynniku tłumienia.

Jeżeli przyjmiemy ten sam sygnał (4.1), określony w przedziale skończonym  $0 \leq t \leq T$ , i obliczymy za pomocą stosowanego obecnie „nieobciążonego” estymatora funkcji autokorelacji (2.1) lub (2.7), tzn. obliczymy całkę

$$R_{yy,T-\tau}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_{t=0}^{T-\tau} y(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt \quad (4.8)$$

to otrzymamy wynik w postaci

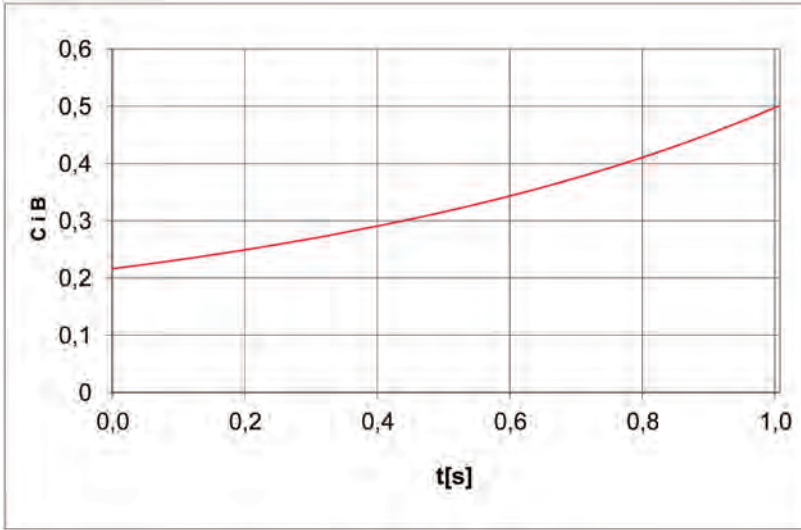
$$R_{yy,T-\tau}(\tau) = A^2 \sqrt{1-\zeta^2} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0(T-\tau))]}{4\zeta\omega_0(T-\tau)} \exp(-\zeta\omega_0\tau) \sin(\omega_d\tau + \varphi) \quad (4.9)$$

gdzie wyrażenie

$$C_{T-\tau}(T-\tau) = A^2 \sqrt{1-\zeta^2} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0(T-\tau))]}{4\zeta\omega_0(T-\tau)} \quad (4.10)$$

nie jest stałą a zależy od czasu przesunięcia  $\tau$ .

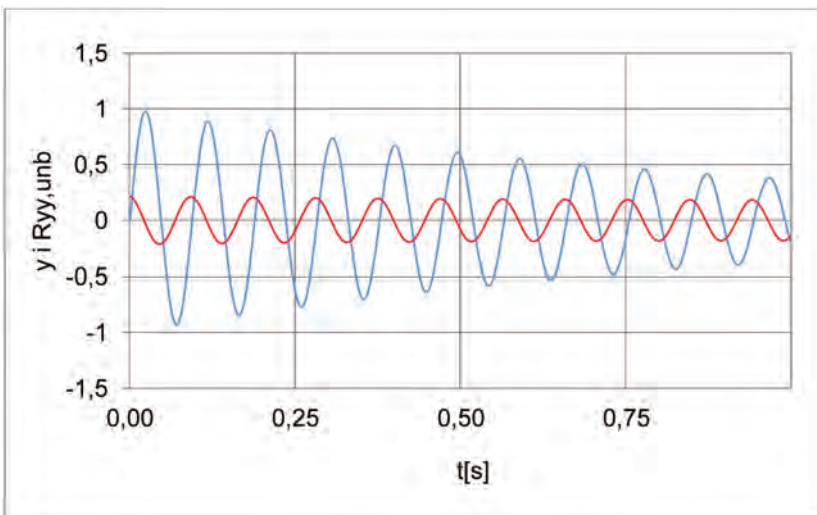
Przebieg w czasie tej wielkości dla typowych parametrów jest pokazany niżej.

**Rys.4.2**

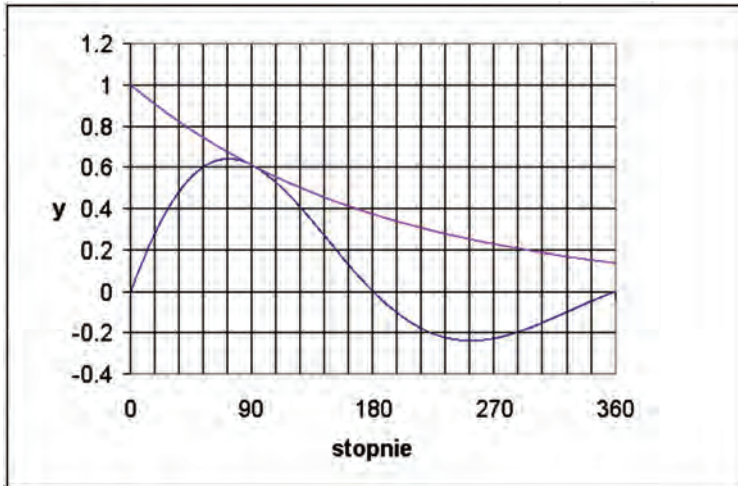
gdzie  $t$  jest czasem przesunięcia  $\tau$ , a  $C = C_{T-\tau}(T-\tau)$ . Wykres ten został sporządzony dla parametrów:  $A = 1$ ,  $\zeta = 0.015$ ,  $f_0 = 10.6$  Hz. Krzywa  $C$  w kolorze niebieskim jest dokładnie zakryta krzywą  $B$  naniesioną w kolorze czerwonym, wg zależności (4.15).

Estymatorem funkcji korelacji własnej jest tutaj funkcja wynikająca z przemnożenia znikającej wykładniczo sinusoidy i rosnącej funkcji  $C_{T-\tau}(T-\tau)$ , co w tym przypadku zmniejsza szybkość zanikania sinusoidy i zmienia jej charakter zmian w czasie – nie jest to już czysto wykładnicze zanikanie.

Na rys. 4.3 pokazano przebieg sygnału  $y(t)$  (4.1) (kolor niebieski) i przebieg jego funkcji korelacji własnej  $R_{yy, T-\tau}$  (kolor czerwony), dla  $T = 1$  s. Widać na nim, że funkcja autokorelacji wolniej zanika niż sygnał  $y(t)$ , ma mniejszy współczynnik tłumienia.

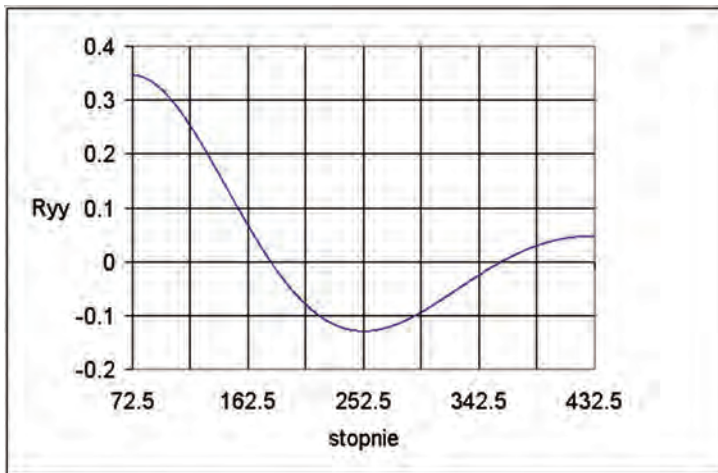
**Rys.4.3**

W następnym rozdziale sprawdzimy otrzymane wyniki z całkowania (wyniki analityczne), metodami stosowanymi w praktyce – komputerowymi metodami sumacyjnymi.



**Rys.4.4.**

Przebieg tłumionej sinusoidy (kolor niebieski). Współczynnik tłumienia  $\zeta = 0.3$ , amplituda  $A = 1$ , faza początkowa  $\varphi = 0$ . Krzywa wykładnicza (kolor czerwony) jest styczna w punkcie  $\varphi = 90$  stopni, ale sinusoida ma maksimum lokalne w punkcie dla  $\varphi = \arccos\zeta = 72.542$  stopnia. Analityczne krzywe na rys.4.4 i na rys.4.5 są obliczone w  $N = 1001$  punktach.



**Rys.4.5.**

Przebieg funkcji autokorelacji dla tłumionej sinusoidy z rys.4.4. Wartość maksymalna funkcji autokorelacji  $R_{yy}(0) = 0.346$ , faza tej funkcji wyrażonej za pomocą tłumionej sinusoidy wynosi  $\varphi = 72.542$  stopnia.

### Rozwiązania całek $C_{12}$ i $C_2$ dla dowolnych wartości $T$

Całki  $C_{12}$  i  $C_2$  zostały wyżej rozwiązane dla przypadku bardzo upraszczającego postać wyniku, dla przypadku, gdy  $T = k \cdot T_{0kr}$ . To uproszczenie nie wprowadziło jednak widocznych błędów



w obliczeniach pokazanych na rys.4.2. W tym konkretnym przykładzie wyniki liczbowe różnią się dopiero od czwartej cyfry znaczącej.

Dla uproszczenia zapisu i zwiększenia przejrzystości wzorów przyjmijmy oznaczenia

$$\lambda = \zeta \omega_0 \quad \text{i} \quad \omega = \omega_d$$

Przy tym zapisie całka

$$C_{11} = A^2 \frac{1 - \exp(-2\lambda T)}{4\lambda T} \quad (4.11)$$

i ta całka ma decydujące znaczenie w analitycznej postaci wzoru funkcji autokorelacji. Wyprowadzony wzór dla całki  $C_{12}$ , dla dowolnej wartości  $T$ , ma postać:

$$C_{12} = \frac{A}{4T\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} [\cos \varphi - \exp(-2\lambda T) \cos(\omega T + \varphi)] \quad (4.12)$$

gdzie  $\varphi = \arctg \frac{\omega}{\lambda}$

Wartość pod pierwiastkiem w mianowniku jest tak duża, w stosunku do wartości w liczniku, że ta całka jest pomijalna w stosunku do całki  $C_{11}$ , dla typowych danych pomiarowych. Całka  $C_2$  dla dowolnej wartości  $T$  ma postać:

$$C_2 = \frac{A^2}{4T\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} [\sin \varphi - \exp(-2\lambda T) \sin(\omega T + \varphi)] \quad (4.13)$$

Ta wartość też jest pomijalnie mała w stosunku do całki  $C_{11}$ .

Wstawiając te wartości do wyżej wyprowadzonego wzoru na wartość funkcji korelacji własnej otrzymujemy zależność:

$$\begin{aligned} R_{yy,T}(\tau) &= C_1 \exp(-\lambda \tau) \cos(\omega \tau) + C_2 \exp(-\lambda \tau) \sin(\omega \tau) = \\ &= (C_{11} - C_{12}) \exp(-\lambda \tau) \cos(\omega \tau) + C_2 \exp(-\lambda \tau) \sin(\omega \tau) = \\ &= \exp(-\lambda \tau) [(C_{11} - C_{12}) \cos(\omega \tau) + C_2 \sin(\omega \tau)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wyrażenie typu  $a \cos \alpha + b \sin \alpha$  możemy przedstawić w innej postaci:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha \right) = B \sin(\alpha + \varphi)$$



gdzie

$$\sqrt{a^2 + b^2} = B \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$$

W naszym przypadku

$$B = \sqrt{(C_{11} - C_{12})^2 + C_2^2} \quad (4.15)$$

Wstawiając do powyższego wzoru odpowiednie wyrażenia  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  i  $C_2$  otrzymujemy wzór do oceny amplitudy  $B$ . Możemy zbadać czy amplituda  $B$  jest niezależna od przesunięcia  $\tau$ , czy zależy od  $\tau$  i w jaki sposób.

Jeżeli wstawimy wyrażenia  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  i  $C_2$  według wzorów (4.11), (4.12) i (4.13), gdzie górna granica całkowania jest stała i wynosi  $T$ , jak to jest w proponowanej metodzie obliczania funkcji autokorelacji, to wszystkie te wyrażenia są wielkościami stałymi, niezależnymi od  $\tau$  i amplituda  $B$  jest stała. W otrzymanej funkcji autokorelacji zostaje zachowany współczynnik tłumienia  $\zeta$  sygnału drgań.

Jeżeli w wyrażeniach  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  i  $C_2$  wstawimy zamiast stałej  $T$  zmienną granicę całkowania  $T - \tau$ , tak jak to jest w klasycznej metodzie obliczania funkcji autokorelacji, to amplituda  $B$  jest wielkością zależną od przesunięcia  $\tau$ . Na rys.4.2 naniesiono dla przykładu kolorem czerwonym amplitudę  $B$  w funkcji przesunięcia  $\tau$ , dla podanych wartości  $A$ ,  $f$  i  $\zeta$ .

Dla sygnału analitycznego nieskończonego (całka (4.5)) otrzymujemy funkcję korelacji własnej w postaci:

$$R_{yy,\infty}(\tau) = \frac{A^2}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2} \exp(-\lambda\tau) \sin(\omega\tau + \varphi)$$

Gdzie

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\lambda}$$

Wyrażenie  $\frac{A^2}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2} = A^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{1}{4\lambda} = \text{const}$  i dlatego obli-

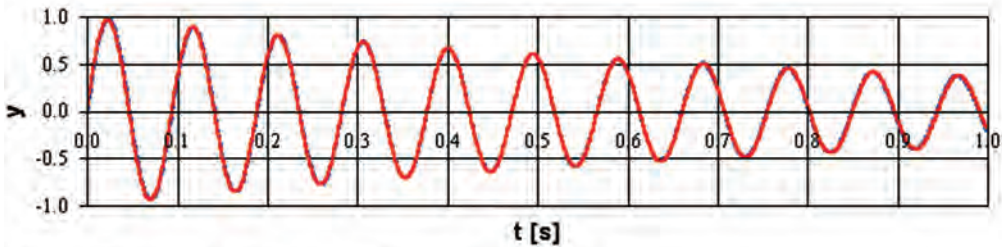
czona funkcja korelacji własnej  $R_{yy,\infty}(\tau)$  zachowuje współczynnik tłumienia  $\zeta$  sygnału analizowanego  $y(t)$ .

## 5. TESTOWANIE METODY NA DANYCH CYFROWYCH

W praktyce całkowanie musimy zastąpić sumowaniem. To może wprowadzić poważne zmiany w dokładności obliczeń. Dlatego niżej przytoczymy przykładowe wyniki obliczeń wykonanych na spróbkowanych sygnałach drgań modelowych i rzeczywistych.

Do tych analiz użyjemy opracowany w Instytucie Lotnictwa program ANDAT [10,11,12] do analizy modalnej drgań struktury samolotu w locie.

Najpierw sprawdzimy dokładność obliczeń na omawianym wyżej analitycznym sygnale modelowym  $y(t)$  (4.1), po jego spróbkowaniu.



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.060E+01	1.500E-02	0.000E+00	1.000E+00

## Results of calculations

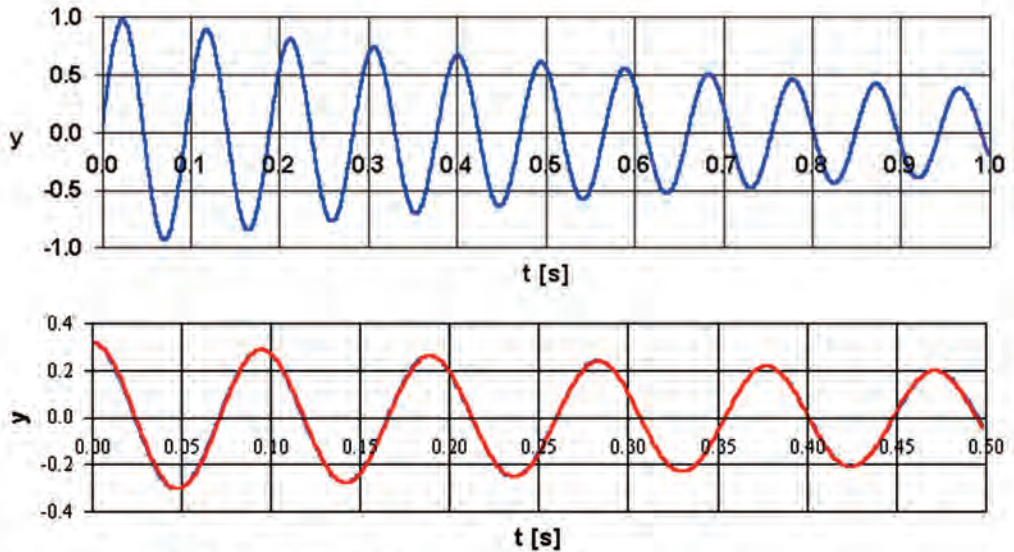
SUM OF SQ.  
2.209E+02

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					2.205E+02	1.963E-02
01	1.058E+01	1.500E-02	4.767E-02	9.965E-01	5.954E-01	-1.977E-02
00					2.209E+02	-1.389E-04
01	1.058E+01	1.500E-02	4.770E-02	9.982E-01	1.947E-01	-3.456E-05

Rys.5.1.

U góry sygnał (4.1) (kolor niebieski) przykryty krzywą (kolor czerwony), otrzymaną na podstawie obliczonych parametrów:  $f_d$ ,  $\zeta$ ,  $A$  i  $\varphi$  (w drugim przybliżeniu), bez obliczania funkcji korelacji własnej.

## METODA PROPONOWANA (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.060E+01	1.500E-02	0.000E+00	1.000E+00

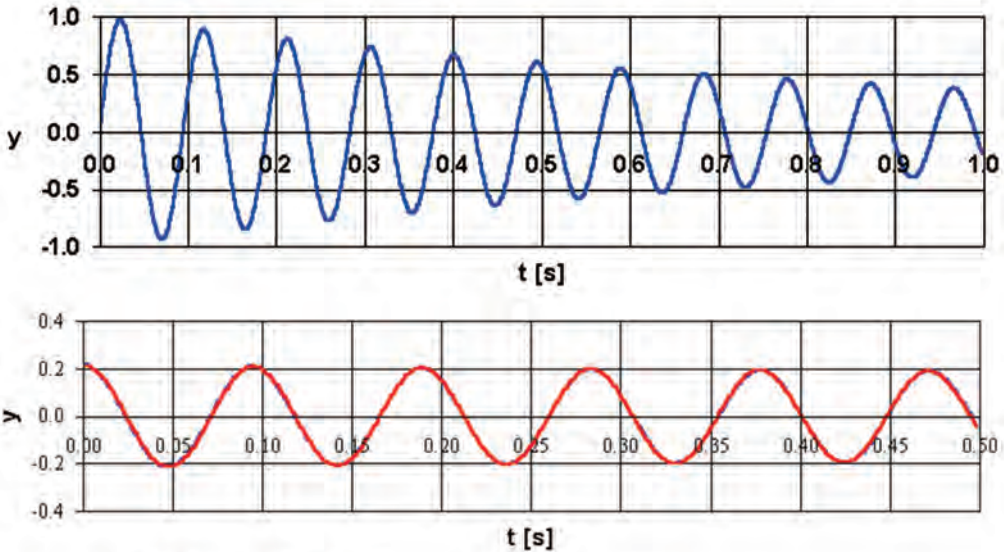
## Results of calculations

					SUM OF SQ.	
					1.632E+01	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					1.630E+01	6.377E-03
01	1.061E+01	1.493E-02	1.517E+00	3.165E-01	2.471E-02	-6.559E-03
00					1.632E+01	-1.825E-04
01	1.061E+01	1.488E-02	1.517E+00	3.168E-01	2.623E-03	-1.463E-05

Rys.5.2.

U góry sygnał modelowy (4.1), niżej estymata jego funkcji korelacji własnej (kolor niebieski) obliczona proponowaną metodą (3.1), przykryta krzywą (kolor czerwony) wykreśloną na podstawie obliczonych parametrów tej estymaty za pomocą programu ANDAT\_A\_acp do obliczeń parametrów modalnych badanego sygnału na podstawie jego funkcji korelacji własnej. Amplituda sygnału pierwotnego  $A = 1$  uległa zmniejszeniu do wartości 0.3168 – do wartości obliczonej analitycznie (punkt początkowy krzywej czerwonej na rys. 4.1). Faza teoretyczna 1.5558 rad, wynik analizy: 1.517. Sygnał pierwotny został spróbkowany z częstotliwością  $f_{pr}=1024$  próbk/s.

## METODA KLASYCZNA: MATLAB (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.060E+01	1.500E-02	0.000E+00	1.000E+00

## Results of calculations

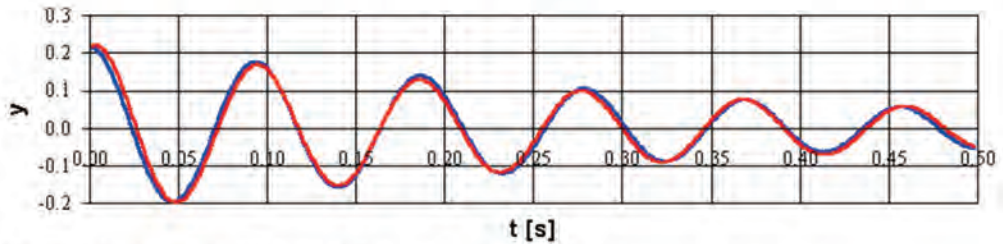
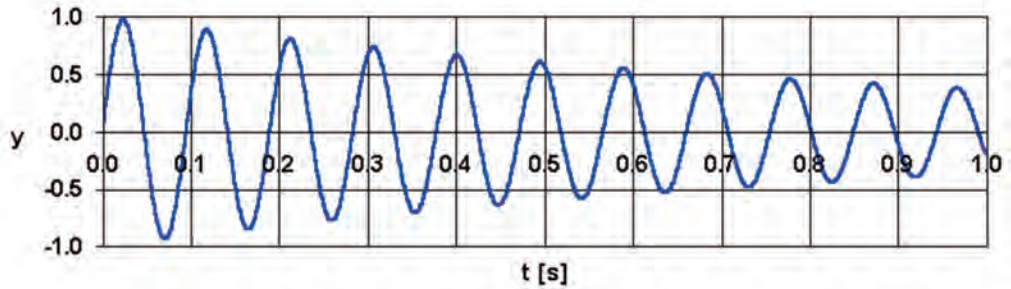
					SUM OF SQ.	
					1.038E+01	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					1.036E+01	5.896E-03
01	1.061E+01	3.695E-03	1.531E+00	2.139E-01	1.993E-02	-5.948E-03
00					1.038E+01	-5.166E-05
01	1.061E+01	3.678E-03	1.531E+00	2.142E-01	1.778E-03	-1.255E-05

Rys.5.3.

U góry sygnał modelowy (4.1), niżej estymata jego funkcji korelacji własnej (kolor niebieski), obliczona metodą klasyczną: (2.3), (2.7), przykryta krzywą (kolor czerwony) wykreśloną na podstawie obliczonych parametrów tej estymaty za pomocą programu ANDAT1unb do obliczeń parametrów modalnych badanego sygnału na podstawie jego funkcji korelacji własnej. Amplituda sygnału pierwotnego  $A = 1$  uległa zmniejszeniu do wartości 0.2142, (wartość obliczona analitycznie, wg wzoru (2.7) wynosi 0.2161). Faza teoretyczna 1.5558 rad, wynik analizy: 1.531. Sygnał pierwotny został spróbkowany z częstotliwością  $f_{pr}=1024$  próbkki/s. Wartość współczynnika tłumienia została zaniżona, z wartości 0.015 do 0.003678 !!!



## METODA KLASYCZNA: B&amp;K (sygnał modelowy)



Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.060E+01	1.500E-02	0.000E+00	1.000E+00

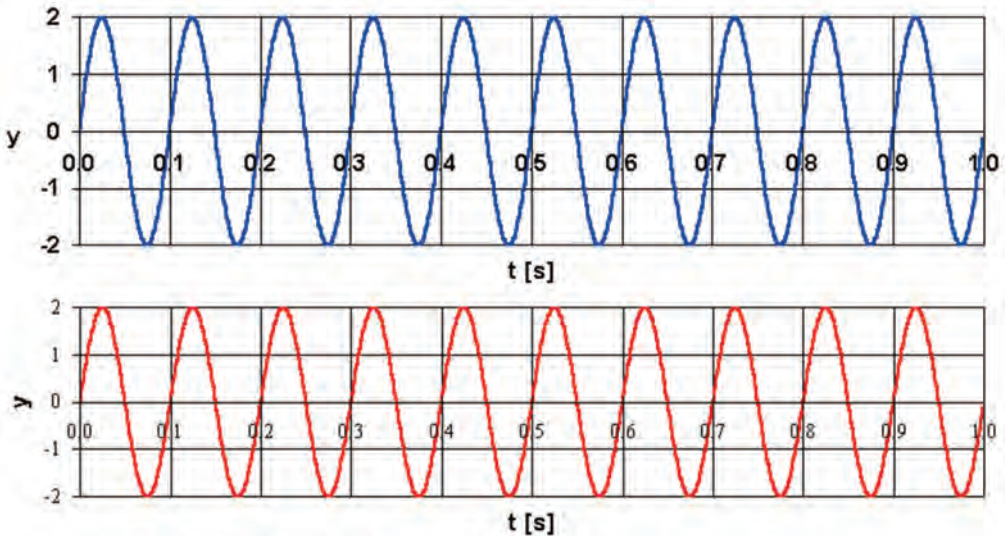
Results of calculations

					SUM OF SQ.	
					4.387E+00	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					4.387E+00	6.486E-04
01	1.095E+01	4.183E-02	1.317E+00	2.247E-01	7.247E-02	-2.829E-03
00					4.391E+00	-2.180E-03
01	1.095E+01	4.174E-02	1.317E+00	2.246E-01	6.827E-02	-7.765E-07

Rys.5.4.

U góry sygnał modelowy (4.1), niżej estymata jego funkcji korelacji własnej (kolor niebieski), obliczona metodą B&K (2.9), przykryta niezbyt dokładnie krzywą (kolor czerwony) wykreśloną na podstawie obliczonych parametrów tej estymaty za pomocą programu ANDAT1B&K do obliczeń parametrów modalnych badanego sygnału na podstawie jego funkcji korelacji własnej. Amplituda sygnału pierwotnego  $A = 1$  uległa zmniejszeniu do wartości 0.2246. Faza teoretyczna 1.5558 rad, wynik analizy: 1.317. Sygnał pierwotny został spróbkowany z częstotliwością  $f_{pr}=1024$  próbek/s. Wartość współczynnika tłumienia została zawyżona, z 0.015 do 0.04174 !!!, częstotliwość zamiast 10.6 Hz jest 10.95 Hz.

## METODA ANDAT : bez obliczania funkcji autokorelacji (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	2.000E+00

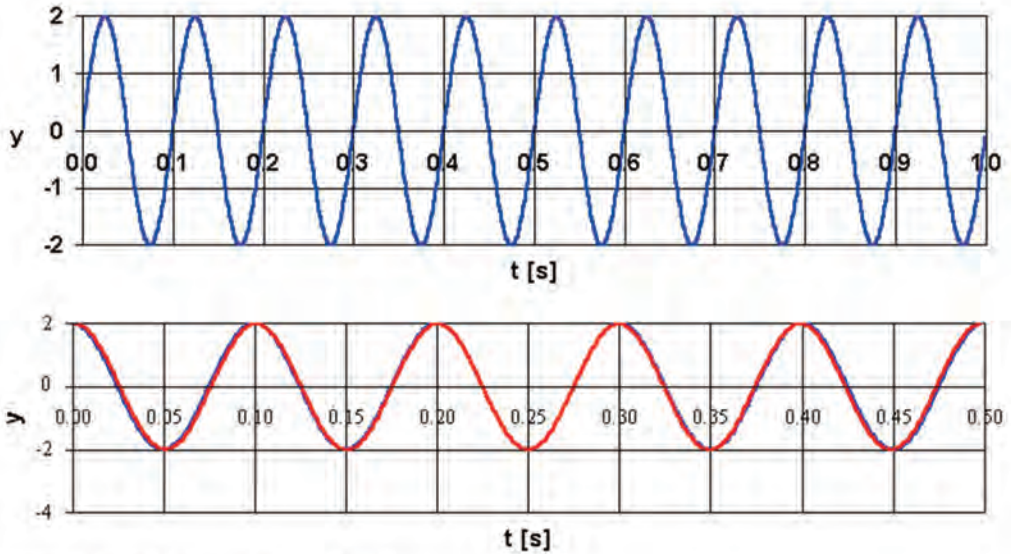
## Results of calculations

					SUM OF SQ.	
					2.000E+03	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					2.000E+03	3.072E-09
01	1.000E+01	2.916E-16	-1.379E-06	2.000E+00	1.555E-09	-3.072E-09
00					2.000E+03	-1.351E-13
01	1.000E+01	2.827E-16	-1.379E-06	2.000E+00	1.555E-09	1.190E-13

Rys.5.5.

U góry sygnał modelowy, próbkowanie 1000 próbek/s (kolor niebieski), sygnał nie tłumiony, o częstotliwości 10 Hz i amplitudzie 2. Niżej w kolorze czerwonym narysowana krzywa na podstawie wyników analizy dokonanej za pomocą programu ANDAT (bez obliczania funkcji autokorelacji). Pod tą krzywą jest sygnał modelowy w kolorze niebieskim (niewidoczny ze względu na dobrą dokładność analizy). Częstotliwość drgań i amplituda są obliczone dokładnie.

## METODA PROPONOWANA (sygnał modelowy)



Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	2.000E+00

Results of calculations

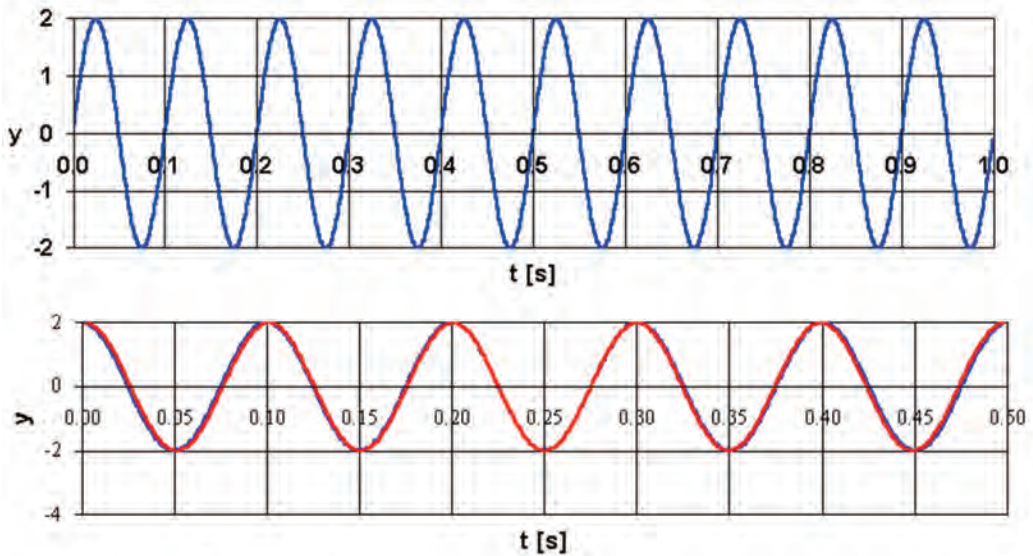
					SUM OF SQ.	
					1.000E+03	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					1.000E+03	-9.775E-08
01	1.005E+01	3.607E-06	1.492E+00	1.993E+00	2.036E+00	-9.952E-03
00					1.000E+03	-9.952E-03
01	1.005E+01	3.619E-06	1.492E+00	1.993E+00	1.986E+00	-4.952E-07

Rys.5.6.

U góry sygnał modelowy, próbkowanie 1000 próbek/s (kolor niebieski). Niżej naniesiono w kolorze czerwonym wynik analizy funkcji autokorelacji sygnału modelowego (nie tłumionego). Pod tą krzywą jest naniesiona, dla porównania, funkcja autokorelacji w kolorze niebieskim. Wyniki liczbowe świadczą o poprawności analizy: współczynnik tłumienia jest bardzo bliski zeru (0.000003619), częstotliwość modelowa 10 Hz, obliczona 10.05 Hz, faza teoretyczna funkcji autokorelacji 1.57 rad, obliczona 1.492 rad, amplituda teoretyczna 2, obliczona 1.993.



## METODA KLASYCZNA: MATLAB (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	2.000E+00

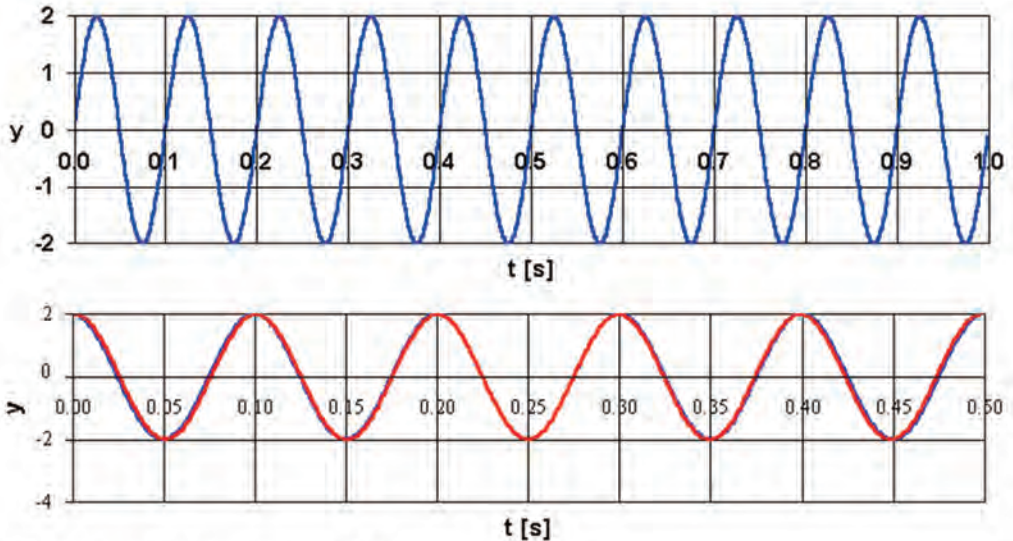
## Results of calculations

					SUM OF SQ.	
					1.000E+03	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					1.000E+03	-1.008E-03
01	1.005E+01	9.742E-06	1.470E+00	1.993E+00	2.437E+00	-9.941E-03
00					1.000E+03	-1.095E-02
01	1.005E+01	9.764E-06	1.470E+00	1.993E+00	2.388E+00	-4.960E-07

Rys.5.7.

U góry ta sama krzywa modelowa, jak na poprzednim rys.5.6 (kolor niebieski). Niżej w czerwonym kolorze narysowana krzywa na podstawie wyników analizy funkcji autokorelacji sygnału modelowego. Pod tą krzywą narysowana, dla porównania, funkcja autokorelacji (kolor niebieski). Wyniki bardzo podobne, jak w metodzie proponowanej – dla sygnału nie tłumionego metoda klasyczna obliczania funkcji korelacji własnej, na podstawie skończonego odcinka drgań, zachowuje wartość współczynnika tłumienia.

## METODA KLASYCZNA: B&amp;K (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	0.000E+00	0.000E+00	2.000E+00

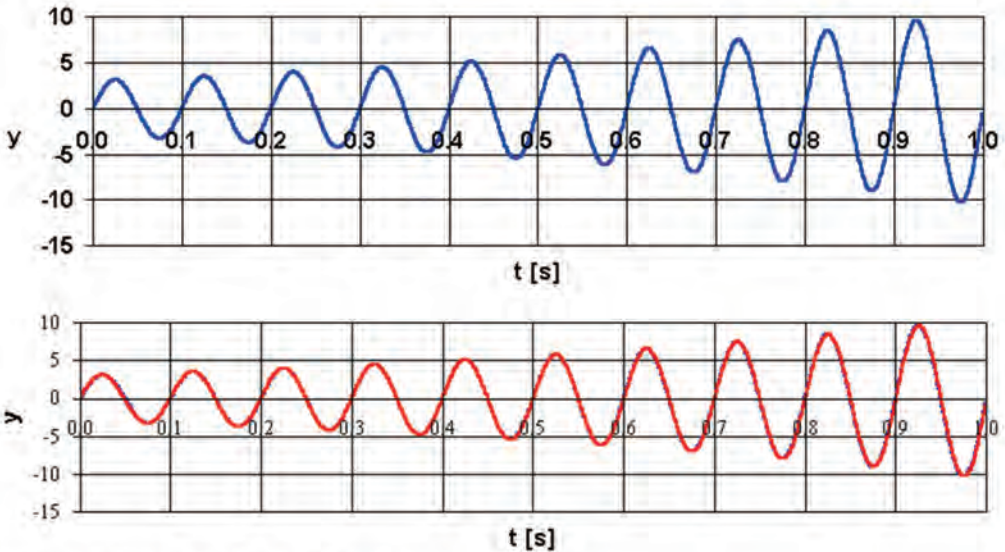
## Results of calculations

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
					SUM OF SQ.	
					1.000E+03	
00					1.000E+03	2.338E-15
01	1.005E+01	3.607E-06	1.492E+00	1.993E+00	2.036E+00	-9.952E-03
00					1.000E+03	-9.952E-03
01	1.005E+01	3.619E-06	1.492E+00	1.993E+00	1.986E+00	-4.952E-07

Rys.5.8.

U góry sygnał modelowy, jak na rys.5.7, nie tłumiony. Niżej naniesiono kolorem czerwonym krzywą na podstawie wyników analizy funkcji autokorelacji. Funkcja autokorelacji jest naniesiona w kolorze niebieskim (pod krzywą czerwona, dla wizualnego porównania). Liczbowe wyniki analizy są też poprawne, bardzo zbliżone do wyników podanych na rys.5.7 – dla sygnału nie tłumionego ta metoda też jest dobra.

## METODA ANDAT: bez obliczania funkcji autokorelacji (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	-2.000E-02	0.000E+00	3.000E+00

## Results of calculations

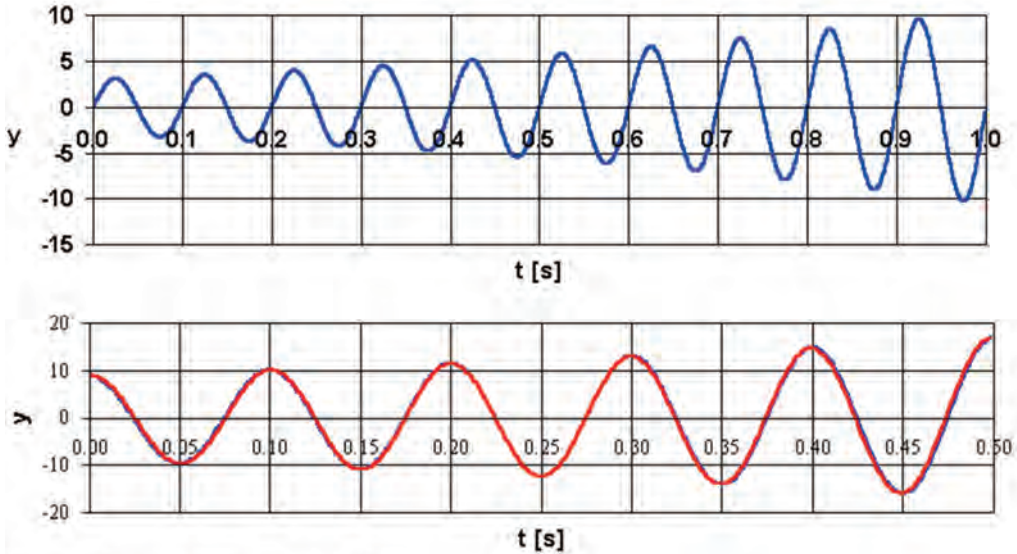
					SUM OF SQ.	
					2.080E+04	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R. OF S. OF SQ.	MEAN VAL.
00					2.079E+04	-1.200E-01
01	9.990E+00	-2.000E-02	2.277E-02	2.999E+00	2.737E+01	1.197E-01
00					2.080E+04	-3.011E-04
01	9.990E+00	-2.000E-02	2.274E-02	2.999E+00	1.273E+01	1.137E-07

Rys.5.9.

U góry sygnał modelowy, próbkowanie 1024 próbki/s, rosnący (ujemny współczynnik tłumienia  $-0.02$ ). Niżej kolorem czerwonym naniesiono krzywą na podstawie wyników analizy krzywej modelowej. Pod tą krzywą narysowano, dla porównania, sygnał modelowy (kolor niebieski). Współczynnik tłumienia sygnału modelowego  $-0.02$ , jest obliczony dokładnie. Częstotliwość drgań, amplituda początkowa i faza też są obliczone poprawnie.



## PROPONOWANA METODA (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	-2.000E-02	0.000E+00	3.000E+00

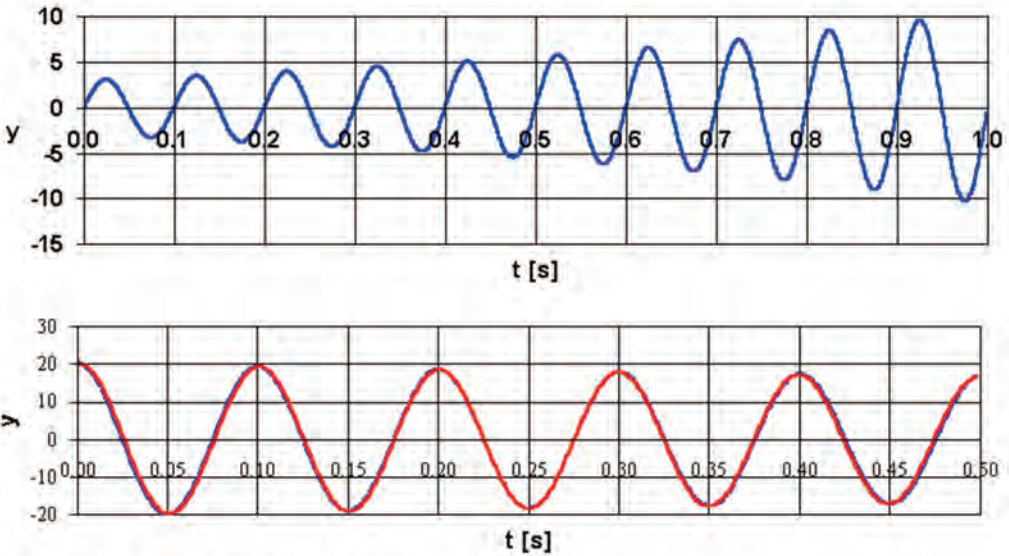
## Results of calculations

					SUM OF SQ.		
					4.144E+04		
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R. OF S. OF SQ.	MEAN VAL.	
00					4.144E+04	2.326E-03	
01	1.004E+01	-1.984E-02	1.533E+00	8.988E+00	5.816E+01	-5.344E-02	
00					4.144E+04	-5.112E-02	
01	1.004E+01	-1.984E-02	1.533E+00	8.989E+00	5.669E+01	-1.298E-06	

Rys.5.10.

U góry sygnał modelowy, próbkowanie 1024 próbki/s, rosnący (ujemny współczynnik tłumienia), kolor niebieski. Niżej krzywa czerwona narysowana na podstawie wyników analizy funkcji autokorelacji sygnału modelowego. Pod krzywą czerwoną jest funkcja autokorelacji (niebieska). Wyniki analizy są poprawne: częstotliwość modelu 10 Hz, obliczona 10.04 Hz, współczynnik tłumienia krzywej modelowej  $-0.02$ , obliczony  $-0.01984$ , faza początkowa sygnału autokorelacji, teoretyczna 1.55 rad, obliczona 1.533 rad, amplituda wzrosła zgodnie z teorią dla funkcji korelacji własnej.

## METODA KLASYCZNA: MATLAB (sygnał modelowy)



Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	-2.000E-02	0.000E+00	3.000E+00

Results of calculations

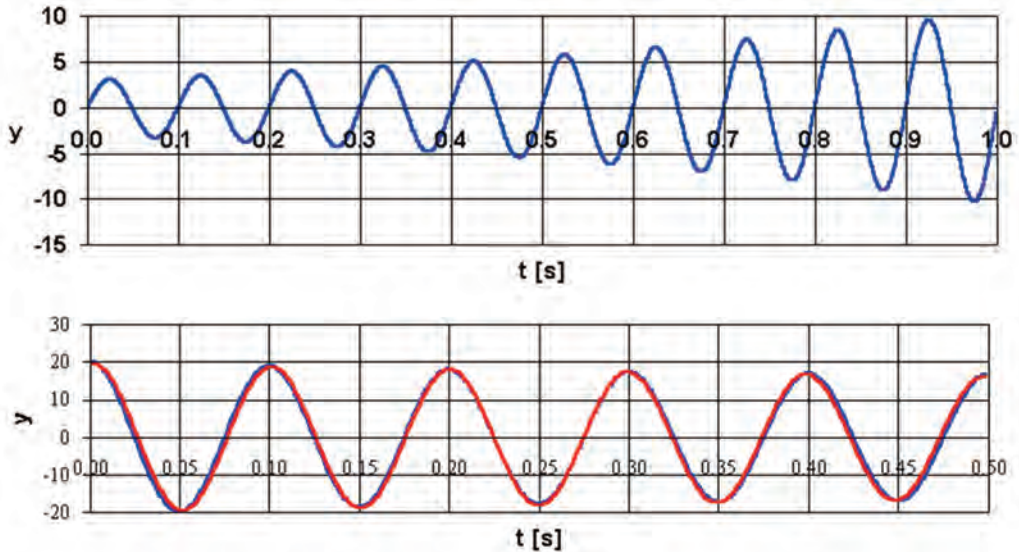
					SUM OF SQ.	
					8.676E+04	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					8.676E+04	2.050E-03
01	1.004E+01	5.915E-03	1.480E+00	2.009E+01	1.286E+02	-7.869E-02
00					8.676E+04	-7.664E-02
01	1.004E+01	5.914E-03	1.480E+00	2.009E+01	1.254E+02	-2.150E-06

Rys.5.11.

U góry sygnał modelowy, próbkowanie 1024 próbki/s, rosnący (ujemny współczynnik tłumienia), kolor niebieski. Niżej krzywa czerwona narysowana na podstawie wyników analizy funkcji autokorelacji sygnału modelowego. Pod krzywą czerwoną jest funkcja autokorelacji (niebieska). Wyniki analizy są błędne: współczynnik tłumienia krzywej modelowej  $-0.02$ , obliczony  $+0.005914$ .

Rosnący sygnał modelowy w wyniku obliczenia jego funkcji korelacji, został zastąpiony sygnałem malejącym, tłumionym.

## METODA KLASYCZNA: B&amp;K (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0.000E+00
01	1.000E+01	-2.000E-02	0.000E+00	3.000E+00

## Results of calculations

					SUM OF SQ.		
					8.336E+04		
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.	
00					8.336E+04	1.775E-02	
01	1.009E+01	5.992E-03	1.427E+00	1.963E+01	4.851E+02	-1.614E-01	
00					8.337E+04	-1.437E-01	
01	1.009E+01	5.991E-03	1.427E+00	1.963E+01	4.718E+02	-2.353E-05	

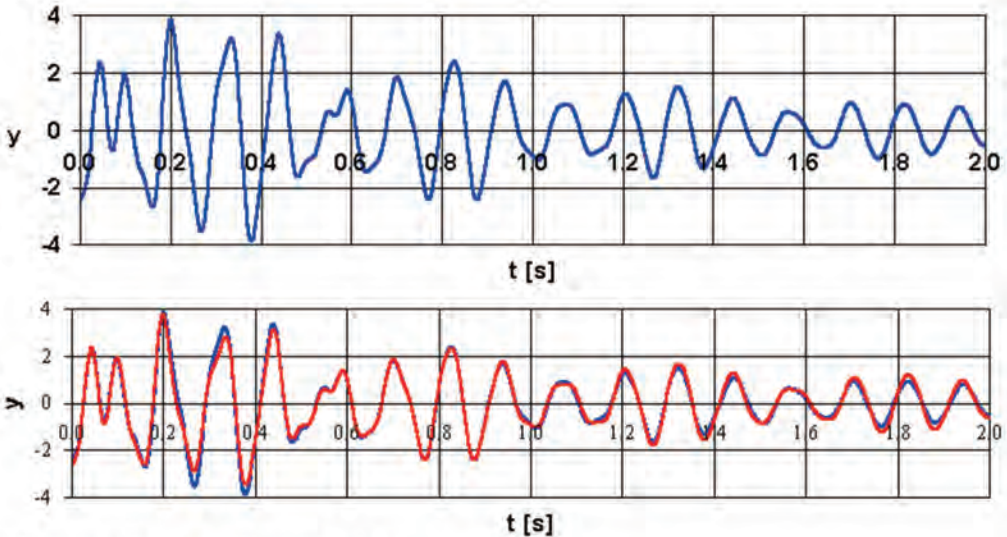
Rys.5.12.

U góry sygnał modelowy, próbkowanie 1024 próbki/s, rosnący (ujemny współczynnik tłumienia), kolor niebieski. Niżej krzywa czerwona narysowana na podstawie wyników analizy funkcji autokorelacji sygnału modelowego. Pod krzywą czerwoną jest funkcja autokorelacji (niebieska). Wyniki analizy są błędne: współczynnik tłumienia krzywej modelowej  $-0.02$ , obliczony  $+0.005991$ .

Rosnący sygnał modelowy w wyniku obliczenia jego funkcji korelacji, został zastąpiony sygnałem malejącym, tłumionym.



## METODA ANDAT: bez obliczania funkcji autokorelacji (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0,000E+00
01	8,000E+00	1,500E-02	-2,140E+00	3,000E+00
02	1,000E+01	2,000E-02	0,000E+00	2,000E+00
03	1,250E+01	2,000E-02	-1,000E+00	1,000E+00
04	2,000E+01	1,500E-02	2,000E+00	1,000E+00

## Results of calculations

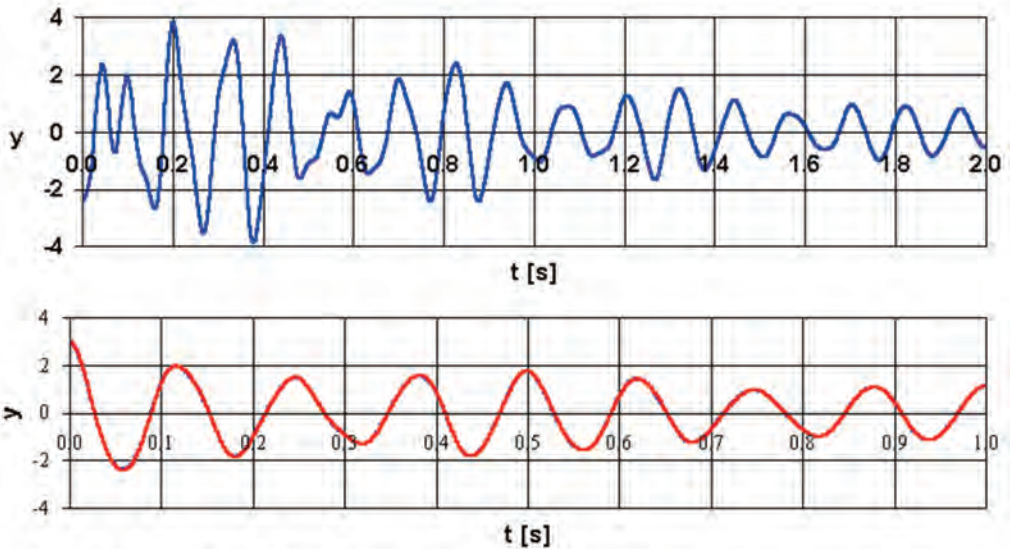
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	SUM OF SQ.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					3.511E+03		
01	8.000E+00	7.140E-03	-2.185E+00	2.066E+00	1.123E+03	6.338E-03	
02	1.000E+01	1.231E-02	6.465E-02	1.376E+00	4.337E+02	-2.284E-03	
03	1.250E+01	2.142E-02	-1.141E+00	1.063E+00	2.689E+02	-4.645E-03	
04	2.000E+01	1.631E-02	2.025E+00	1.087E+00	1.373E+02	-3.085E-03	
00					3.511E+03		-1.279E-04
01	8.000E+00	1.108E-02	-2.149E+00	2.519E+00	1.104E+03	1.279E-02	
02	1.000E+01	1.304E-02	3.488E-02	1.429E+00	3.489E+02	3.621E-03	
03	1.250E+01	2.755E-02	-1.064E+00	1.371E+00	1.794E+02	-5.447E-05	
04	2.000E+01	1.439E-02	1.987E+00	9.602E-01	4.972E+01	1.184E-03	
00					3.511E+03		1.056E-03
01	8.000E+00	1.175E-02	-2.150E+00	2.605E+00	1.108E+03	1.229E-02	
02	1.000E+01	1.181E-02	2.096E-02	1.340E+00	3.576E+02	4.040E-03	
03	1.250E+01	3.019E-02	-1.068E+00	1.523E+00	1.818E+02	-4.714E-06	
04	2.000E+01	1.364E-02	1.973E+00	9.108E-01	5.404E+01	1.121E-03	

Rys.5.13.

U góry sygnał modelowy złożony z czterech postaci drgań, próbkowanie 1000 próbek/s (kolor niebieski). Niżej krzywa aproksymująca naniesiona w kolorze czerwonym. Pod nią jest sygnał modelowy, narysowany dla wizualnego porównania (kolor niebieski).



## METODA PROPONOWANA (sygnał modelowy)



## Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0,000E+00
01	8,000E+00	1,500E-02	-2,140E+00	3,000E+00
02	1,000E+01	2,000E-02	0,000E+00	2,000E+00
03	1,250E+01	2,000E-02	-1,000E+00	1,000E+00
04	2,000E+01	1,500E-02	2,000E+00	1,000E+00

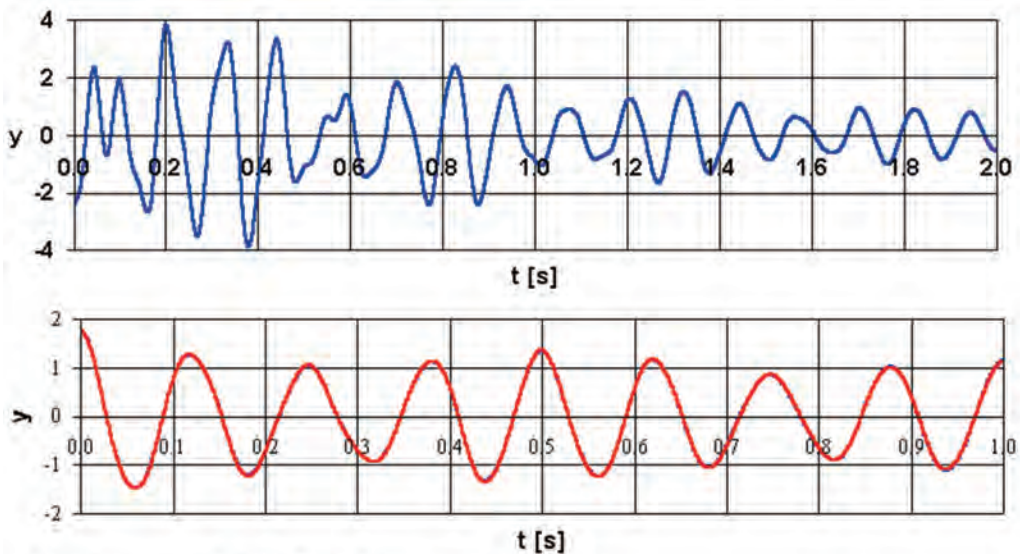
## Results of calculations

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	SUM OF SQ.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
					1.254E+03		
00					1.254E+03	7.082E-04	
01	8.000E+00	1.802E-02	1.630E+00	2.275E+00	6.362E+01	4.347E-04	
02	1.000E+01	1.254E-02	1.478E+00	4.586E-01	8.703E+00	-1.073E-04	
03	1.250E+01	2.761E-02	1.982E+00	2.061E-01	4.703E+00	8.798E-04	
04	2.000E+01	1.116E-02	1.341E+00	1.110E-01	2.506E+00	6.804E-04	
00					1.254E+03	1.389E-03	
01	8.000E+00	1.615E-02	1.614E+00	2.181E+00	6.541E+01	-6.331E-04	
02	1.000E+01	1.884E-02	1.403E+00	5.584E-01	7.450E+00	-1.968E-03	
03	1.250E+01	2.337E-02	2.021E+00	1.896E-01	2.643E+00	-9.088E-04	
04	2.000E+01	1.353E-02	1.340E+00	1.254E-01	3.301E-01	-1.155E-03	
00					1.254E+03	2.331E-04	
01	8.000E+00	1.518E-02	1.608E+00	2.128E+00	6.691E+01	4.135E-04	
02	1.000E+01	2.076E-02	1.386E+00	5.910E-01	7.416E+00	-1.197E-03	
03	1.250E+01	2.101E-02	2.022E+00	1.792E-01	2.455E+00	-1.596E-04	
04	2.000E+01	1.489E-02	1.331E+00	1.343E-01	7.239E-02	-4.425E-04	

Rys.5.14.

U góry sygnał modelowy złożony z czterech postaci drgań, jak na rys.5.13. Niżej naniesiona krzywa na podstawie analizy funkcji autokorelacji (kolor czerwony). Pod tą krzywą jest funkcja autokorelacji (kolor niebieski). Wynik analizy lepszy niż na rys.5.13, zwłaszcza w ocenie współczynników tłumienia.

## METODA KLASYCZNA: MATLAB (sygnał modelowy)



Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0,000E+00
01	8,000E+00	1,500E-02	-2,140E+00	3,000E+00
02	1,000E+01	2,000E-02	0,000E+00	2,000E+00
03	1,250E+01	2,000E-02	-1,000E+00	1,000E+00
04	2,000E+01	1,500E-02	2,000E+00	1,000E+00

Results of calculations

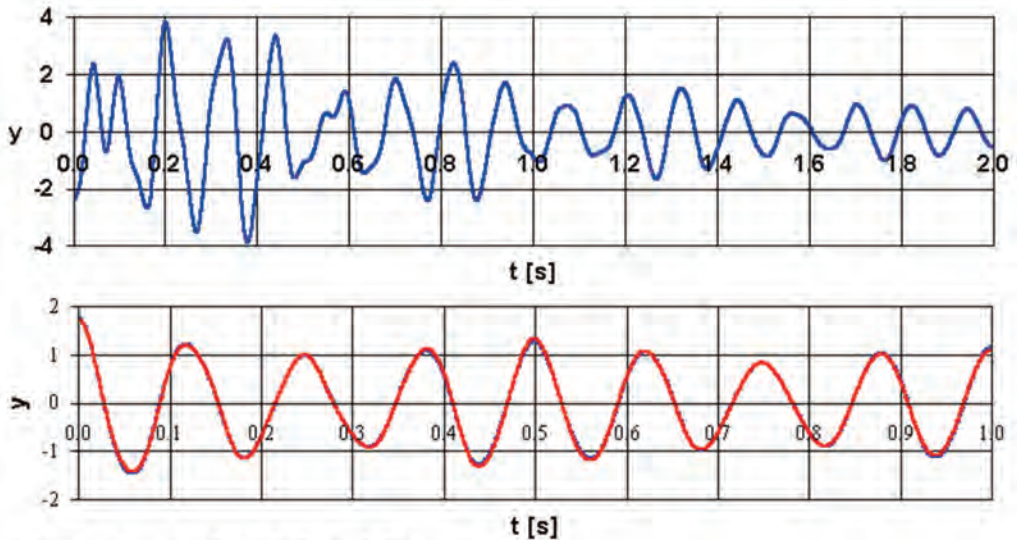
					SUM OF SQ.	
					6.776E+02	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					6.776E+02	2.271E-04
01	8.000E+00	7.980E-03	1.628E+00	1.378E+00	2.699E+01	2.203E-04
02	1.000E+01	4.783E-03	1.454E+00	2.497E-01	3.278E+00	6.344E-05
03	1.250E+01	1.737E-02	1.939E+00	1.005E-01	1.696E+00	5.558E-04
04	2.000E+01	7.812E-03	1.324E+00	6.030E-02	8.763E-01	4.620E-04
00					6.776E+02	6.891E-04
01	8.000E+00	6.363E-03	1.621E+00	1.326E+00	2.714E+01	-3.265E-04
02	1.000E+01	9.190E-03	1.387E+00	2.907E-01	2.721E+00	-7.778E-04
03	1.250E+01	1.385E-02	1.963E+00	9.169E-02	9.593E-01	-2.585E-04
04	2.000E+01	9.922E-03	1.310E+00	6.781E-02	1.086E-01	-3.845E-04
00					6.776E+02	3.046E-04
01	8.000E+00	5.682E-03	1.617E+00	1.302E+00	2.743E+01	2.448E-05
02	1.000E+01	1.038E-02	1.373E+00	3.022E-01	2.694E+00	-5.223E-04
03	1.250E+01	1.207E-02	1.961E+00	8.720E-02	8.972E-01	-9.855E-06
04	2.000E+01	1.096E-02	1.300E+00	7.176E-02	3.014E-02	-1.542E-04

Rys.5.15.

U góry sygnał modelowy złożony z czterech postaci drgań, jak na rys.5.13. Niżej naniesiona krzywa na podstawie analizy funkcji autokorelacji (kolor czerwony). Pod tą krzywą jest funkcja autokorelacji (kolor niebieski). Wynik analizy gorszy niż na rys.5.14, zwłaszcza w ocenie współczynników tłumienia postaci drgań o częstotliwości 8 i 10 Hz, zniżenie współczynników tłumienia.



## METODA KLASYCZNA: B&amp;K (sygnał modelowy)



Parameters of model's data

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.
00				0,000E+00
01	8,000E+00	1,500E-02	-2,140E+00	3,000E+00
02	1,000E+01	2,000E-02	0,000E+00	2,000E+00
03	1,250E+01	2,000E-02	-1,000E+00	1,000E+00
04	2,000E+01	1,500E-02	2,000E+00	1,000E+00

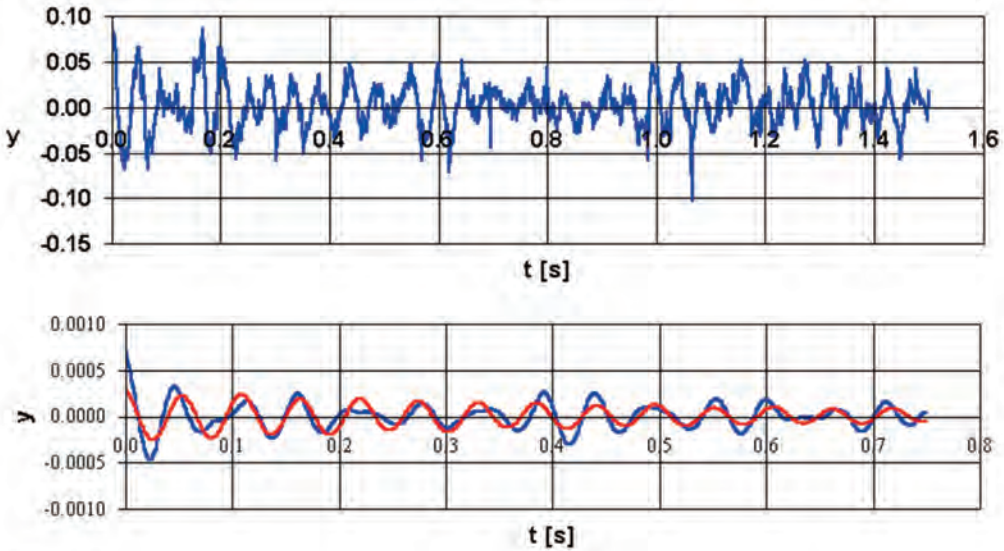
Results of calculations

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	SUM OF SQ.	R. OF S. OF SQ.	MEAN VAL.
					6.324E+02		
00					6.324E+02	3.139E-04	
01	8.000E+00	6.933E-03	1.598E+00	1.297E+00	2.748E+01	-3.642E-05	
02	1.005E+01	5.712E-03	1.404E+00	2.599E-01	2.996E+00	-1.190E-03	
03	1.250E+01	2.664E-02	1.711E+00	1.167E-01	1.505E+00	-1.066E-03	
04	2.010E+01	1.378E-02	1.187E+00	7.334E-02	8.025E-01	-1.342E-03	
00					6.324E+02	-1.028E-03	
01	8.000E+00	6.062E-03	1.590E+00	1.262E+00	2.769E+01	1.261E-03	
02	1.005E+01	9.306E-03	1.350E+00	2.903E-01	2.766E+00	-6.749E-05	
03	1.242E+01	2.210E-02	1.884E+00	1.058E-01	1.132E+00	2.137E-04	
04	2.010E+01	1.393E-02	1.171E+00	7.435E-02	4.098E-01	-7.245E-05	
00					6.324E+02	-1.100E-03	
01	8.000E+00	5.505E-03	1.587E+00	1.245E+00	2.787E+01	1.329E-03	
02	1.005E+01	1.169E-02	1.341E+00	3.122E-01	2.734E+00	-1.053E-04	
03	1.242E+01	2.104E-02	1.918E+00	1.042E-01	1.051E+00	2.211E-04	
04	2.010E+01	1.466E-02	1.176E+00	7.681E-02	3.292E-01	-7.132E-05	

Rys.5.16.

U góry sygnał modelowy złożony z czterech postaci drgań, jak na rys.5.13. Niżej naniesiona krzywa na podstawie analizy funkcji autokorelacji (kolor czerwony). Pod tą krzywą jest funkcja autokorelacji (kolor niebieski). Wynik analizy gorszy niż na rys.5.14, zwłaszcza w ocenie współczynników tłumienia postaci drgań o częstotliwości 8 i 10 Hz, zaniżenie współczynników tłumienia.

## METODA PROPONOWANA (sygnał rzeczywisty)



kol2hlz

Results of calculations

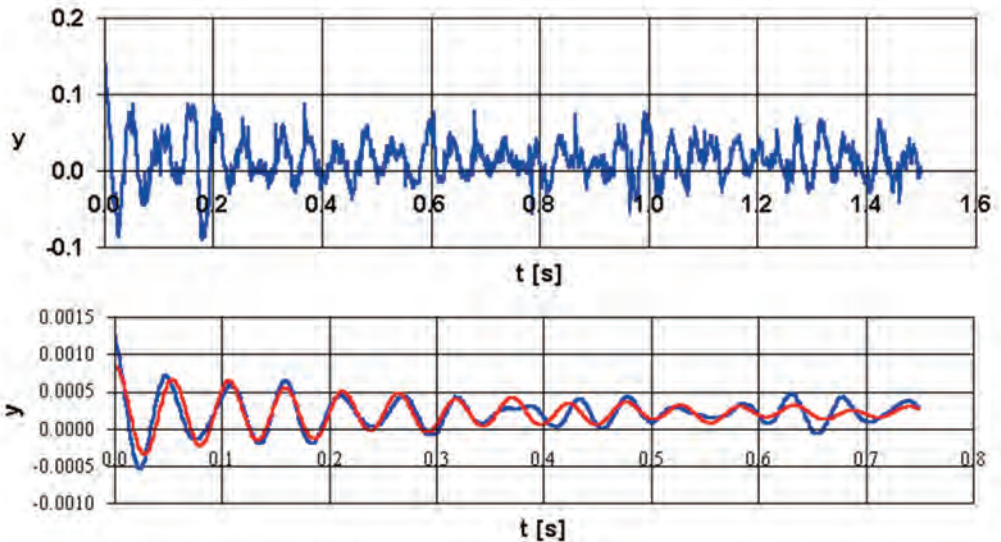
SUM OF SQ.  
1.502E-05

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					1.500E-05	5.700E-06
01	8.081E+00	3.495E-02	2.207E+00	2.803E-05	1.489E-05	2.422E-07
04	1.806E+01	1.570E-02	1.797E+00	2.654E-04	5.991E-06	1.065E-06
00					1.500E-05	6.765E-06
01	8.089E+00	2.052E-02	1.914E+00	2.137E-05	1.491E-05	-1.069E-06
04	1.806E+01	1.572E-02	1.797E+00	2.659E-04	5.982E-06	-2.465E-07

Rys.5.17.

U góry, rzeczywisty sygnał drgań lewego statecznika poziomego samolotu 1 – 23 w czasie kołowania po trawie (kolor niebieski). Niżej jego funkcja korelacji własnej (kolor niebieski) i wynik analizy tej krzywej (kolor czerwony), naniesiony na podstawie obliczonych parametrów w drugim przybliżeniu. W tym odcinku sygnału drgań istotna jest tylko postać drgań o częstotliwości 18.06 Hz i tłumieniu 0.01572.

## METODA PROPONOWANA (sygnał rzeczywisty)



kol2hpz I-23 N=1500 fpr=1000

Results of calculations

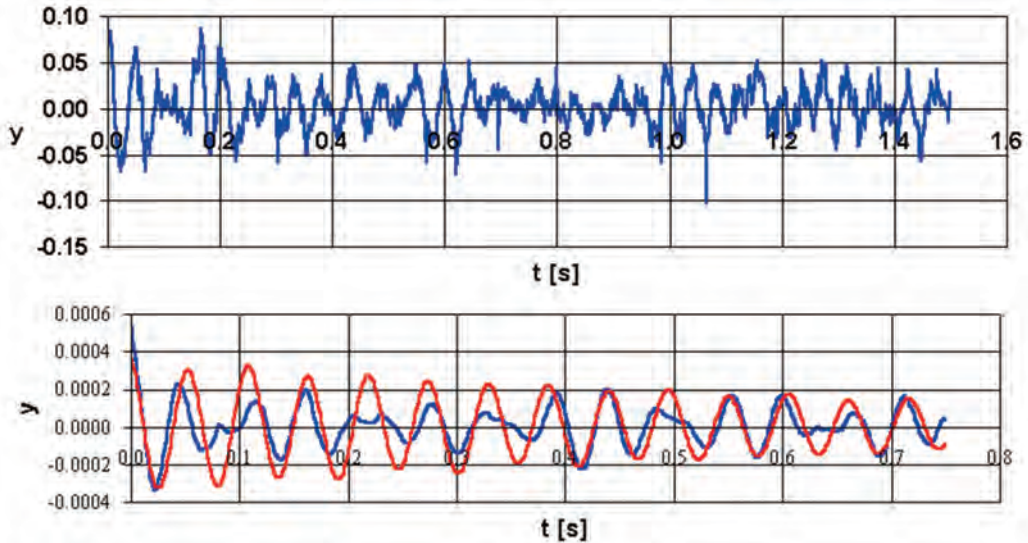
							SUM OF SQ.	
							6.988E-05	
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF	S.OF SQ.	MEAN VAL.	
00						3.571E-05	2.135E-04	
01	7.944E+00	7.074E-03	2.243E+00	4.419E-05	3.513E-05	3.708E-07		
02	1.163E+01	1.687E-02	2.490E+00	3.472E-05	3.487E-05	1.049E-06		
04	1.896E+01	2.618E-02	1.378E+00	5.683E-04	8.886E-06	-1.249E-06		
00						3.571E-05	2.122E-04	
01	7.952E+00	2.628E-03	2.038E+00	3.365E-05	3.518E-05	1.457E-06		
02	1.161E+01	5.142E-02	2.129E+00	2.193E-05	3.500E-05	1.663E-06		
04	1.896E+01	2.640E-02	1.375E+00	5.741E-04	8.786E-06	-6.660E-07		

Rys.5.18.

U góry, rzeczywisty sygnał drgań prawego statecznika poziomego samolotu I – 23 w czasie kołowania na trawie (kolor niebieski). Niżej jego funkcja korelacji własnej (kolor niebieski) i wynik analizy tej krzywej (kolor czerwony), naniesiony na podstawie obliczonych parametrów w drugim przybliżeniu. W tym odcinku sygnału drgań istotna jest tylko postać drgań o częstotliwości 18.96 Hz ze współczynnikiem tłumienia 0.0264.



## METODA KLASYCZNA: MATLAB (sygnał rzeczywisty)



kol2hlz

Results of calculations

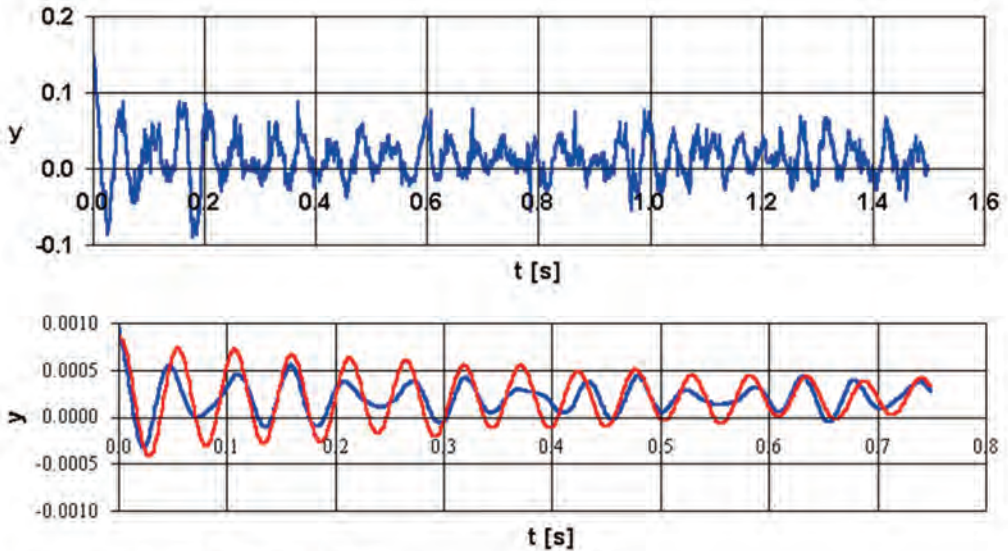
SUM OF SQ.  
8.974E-06

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R. OF S. OF SQ.	MEAN VAL.
00					8.952E-06	5.411E-06
01	8.197E+00	3.992E-02	1.899E+00	3.455E-05	8.814E-06	5.459E-08
04	1.810E+01	1.139E-02	1.823E+00	1.721E-04	4.124E-06	8.887E-07
00					8.952E-06	6.300E-06
01	8.197E+00	2.629E-02	1.786E+00	2.795E-05	8.825E-06	-1.004E-06
04	1.810E+01	1.142E-02	1.822E+00	1.723E-04	4.128E-06	-1.725E-07

Rys.5.19.

U góry, rzeczywisty sygnał drgań lewego statecznika poziomego samolotu 1 – 23 w czasie kołowania po trawie (kolor niebieski). Niżej jego funkcja korelacji własnej (kolor niebieski) i wynik analizy tej krzywej (kolor czerwony), naniesiony na podstawie obliczonych parametrów w drugim przybliżeniu. W tym odcinku sygnału drgań istotna jest tylko postać drgań o częstotliwości 18.10 Hz i tłumieniu 0.0142.

## METODA KLASYCZNA: MATLAB (sygnał rzeczywisty)



kol2hpx I-23 N=1500 fpr=1000

Results of calculations

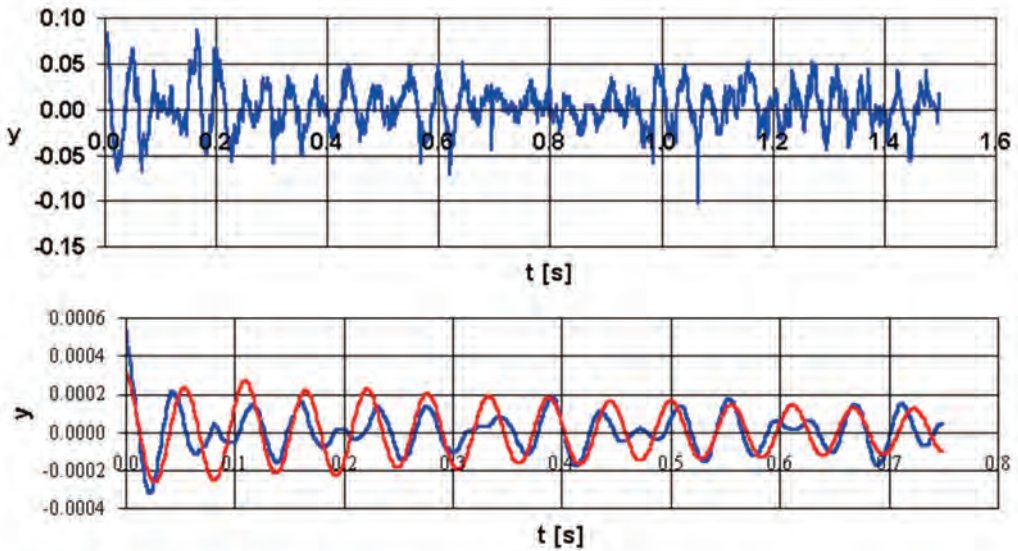
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAI
					SUM OF SQ. 5.274E-05	
00					2.104E-05	2.056E-04
01	7.937E+00	2.474E-04	2.305E+00	3.134E-05	2.068E-05	2.149E-07
02	1.170E+01	1.760E-02	2.520E+00	3.143E-05	2.049E-05	7.709E-07
04	1.896E+01	1.360E-02	1.318E+00	3.013E-04	7.136E-06	-1.177E-06
00					2.104E-05	2.044E-04
01	8.000E+00	-3.658E-03	2.167E+00	2.505E-05	2.069E-05	1.124E-06
02	1.170E+01	5.916E-02	2.314E+00	3.457E-05	2.046E-05	1.520E-06
04	1.896E+01	1.359E-02	1.317E+00	3.021E-04	7.070E-06	-4.368E-07

Rys.5.20.

U góry, rzeczywisty sygnał drgań prawego statecznika poziomego samolotu I – 23 w czasie kołowania po trawie (kolor niebieski). Niżej jego funkcja korelacji własnej (kolor niebieski) i wynik analizy tej krzywej (kolor czerwony), nanesiony na podstawie obliczonych parametrów w drugim przybliżeniu. W tym odcinku sygnału drgań istotna jest tylko postać drgań o częstotliwości 18.96 Hz ze współczynnikiem tłumienia 0.01359.



## METODA KLASYCZNA: B &amp; K (sygnał rzeczywisty)



kol2hlz

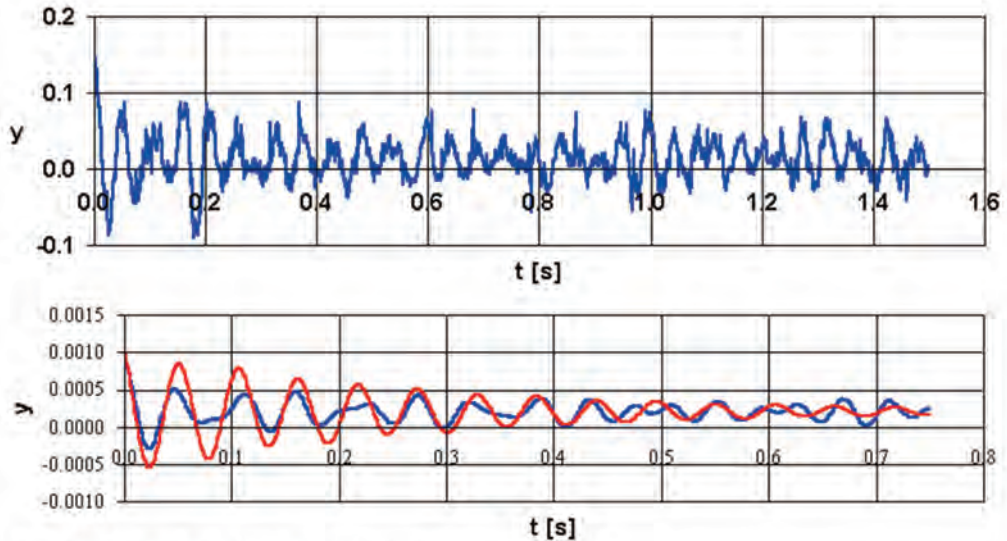
## Results of calculations

MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
						SUM OF SQ.
						8.017E-06
00					7.992E-06	5.678E-06
01	8.000E+00	7.963E-02	2.085E+00	4.174E-05	7.864E-06	4.190E-07
04	1.794E+01	1.038E-02	1.751E+00	1.369E-04	4.615E-06	4.797E-07
00					7.993E-06	6.158E-06
01	8.000E+00	7.797E-02	1.892E+00	3.779E-05	7.874E-06	-2.743E-07
04	1.794E+01	1.045E-02	1.750E+00	1.374E-04	4.613E-06	-2.137E-07

Rys.5.21.

U góry, rzeczywisty sygnał drgań lewego statecznika poziomego samolotu 1 – 23 w czasie kołowania po trawie (kolor niebieski). Niżej jego funkcja korelacji własnej (kolor niebieski) i wynik analizy tej krzywej (kolor czerwony), naniesiony na podstawie obliczonych parametrów w drugim przybliżeniu. W tym odcinku sygnału drgań istotna jest tylko postać drgań o częstotliwości 17.94 Hz i tłumieniu 0.01045.

## METODA KLASYCZNA: B &amp; K (sygnał rzeczywisty)



kol2hpx I-23 N=1500 fpr=1000

## Results of calculations

						SUM OF SQ.
						4.752E-05
MODE	FREQ.	DAMP.	PHASE	AMPL.	R.OF S.OF SQ.	MEAN VAL.
00					1.553E-05	2.065E-04
01	7.874E+00	3.714E-02	2.139E+00	3.239E-05	1.536E-05	4.425E-07
04	1.802E+01	3.319E-02	2.030E+00	4.110E-04	5.362E-06	2.319E-06
00					1.553E-05	2.088E-04
01	7.937E+00	6.809E-02	1.720E+00	5.394E-05	1.538E-05	-2.210E-06
04	1.802E+01	3.328E-02	2.034E+00	4.130E-04	5.283E-06	-3.038E-07

Rys.5.22.

U góry, rzeczywisty sygnał drgań prawego statecznika poziomego samolotu I – 23 w czasie kołowania po trawie (kolor niebieski). Niżej jego funkcja korelacji własnej (kolor niebieski) i wynik analizy tej krzywej (kolor czerwony), naniesiony na podstawie obliczonych parametrów w drugim przybliżeniu. W tym odcinku sygnału drgań istotna jest tylko postać drgań o częstotliwości 18.02 Hz ze współczynnikiem tłumienia 0.03328.

## 6. PRZYSPIESZENIE OBLICZEŃ ZA POMOCĄ TRANSFORMATY FOURIERA

Przyspieszanie obliczeń za pomocą transformaty Fouriera nie jest potrzebne do jednostkowych obliczeń. Natomiast jest konieczne, jeżeli w ciągu jednej sekundy musimy obliczyć współczynniki tłumienia kilku postaci drgań z kilkudziesięciu czujników aby sprostać wymaganiom stawianym w czasie prób flutterowych w locie.

Sposób postępowania i dowód jego poprawności jest opisany w pracy [4]. Korzystając z tych podstaw należało tylko zmienić dane wejściowe tak, by wynik obliczeń był zgodny ze wzorem (3.1) a nie ze wzorem (2.7).

Niżej przytaczamy rozwiązanie tego zadania zamieszczone w artykule [13].

Mamy obliczyć funkcję korelacji własnej dla realizacji procesu stochastycznego  $y(n)$ ,

gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots, N$   $N = 2^i$ , gdzie  $i$  jest liczbą naturalną

$$R_{yy}(k) = \frac{1}{N/2} \sum_{n=1}^{N/2} y(n) \cdot y(n+k) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

Definiujemy sygnał półwkowy:

$$yp(n) = y(n) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

$$yp(n) = 0 \quad \text{dla } n = N/2 + 1, \dots, N$$

Obliczamy dyskretne transformaty Fouriera:

$$Y(j) = FFT[y(n)]$$

$$YP(j) = FFT[yp(n)]$$

Obliczamy iloczyn transformaty  $Y(j)$  i transformaty sprzężonej  $YP^*(j)$ :

$$Y_{YYP}(j) = Y(j) YP^*(j) \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

Obliczamy transformatę odwrotną:

$$R_{yy}(k) = \frac{1}{N/2} FFT^{-1} [Y_{YYP}(j)] \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N/2 - 1$$

W praktyce można uśredniać powyższy iloczyn transformat otrzymanych z kolejnych odcinków sygnału drgań, przed dokonaniem transformacji odwrotnej.

## 7. WNIOSKI

1. Dotychczasowe estymaty, o udowodnionych poprawnych własnościach dla sygnałów nieskończonych, nie nadają się do analizy sygnałów rzeczywistych o skończonej długości.
2. W pracy udowodniono teoretycznie i udokumentowano praktycznie poprawne własności nowej, proponowanej metody obliczania funkcji korelacji własnej na podstawie skończonych odcinków drgań.

3. Proponowana metoda zachowuje wartości własne modalnych postaci drgań sygnału badanego. Zachowuje wartości współczynników tłumienia i wartości częstotliwości własnych badanego obiektu.
4. Istotą proponowanej metody jest przemnażanie odcinka drgań o stałej długości, przez przesuwające się w funkcji czasu odcinki sygnału o tej samej, stałej długości.
5. Opracowano metodę obliczania proponowanej estymaty funkcji korelacji własnej za pomocą szybkiej transformaty Fouriera, w celu przyspieszenia obliczeń. Przyspieszenie obliczeń w czasie badań w locie odporności samolotu na drgania flutterowe jest bardzo ważne ze względu na konieczność analizy na bieżąco.
6. Przedstawiona metoda obliczania funkcji autokorelacji nadaje się do analizy drgań rosnących, drgań swobodnie zanikających i do analizy normalnych drgań w czasie eksploatacji samolotu – do analizy bieżących własności dynamicznych samolotu.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Mańczak K.: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa 1971.
- [2] MATLAB. The Language of Technical Computing. Version 5.3.0.10183 (R11). January 21, 1999. Copyright 1984–1999. The MathWorks, Inc.
- [3] Brüel&Kjaer: Dual Channel Signal Analyzer Type 2034. Familiarization guide, 1983.
- [4] Brigham E. O.: The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall Inc., USA 1974.
- [5] Przepisy MIL-A-8870C(AS). Military Specification - Airplane Strength and Rigidity - Vibration, Flutter and Divergence, USA 1993.
- [6] Przepisy FAR-23. Federal Aviation Regulations Part 23. Advisory Circular AC 23.629-1. Department of Transportation Federal Aviation Administration, Washington 1979.
- [7] Uhl T., Lisowski W., Kurowski P.: In-Operation Modal Analysis and its Applications. Katedra Robotyki i Dynamiki Maszyn. Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie. Kraków 2001.
- [8] Hermans L., Van der Auweraer H.: On the Use of Auto- and Cross-correlation Functions to Extract Modal Parameters from Output-only Data. In Proceedings of the 6th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamic. Work in progress paper, University of Southampton, UK, 1997.
- [9] Lenort F.: Obliczanie współczynnika tłumienia przy pomocy przekształcenia Fouriera. Prace Instytutu Lotnictwa Nr 118, Warszawa 1989.
- [10] Lenort F.: Application of Fourier Transformation to Flutter Tests. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, No 4/94, Warszawa 1994.
- [11] Lenort F.: Impulse Response Modal Analysis. Machine Dynamics Problems, Vol. 24, No. 3, Warszawa 2000.
- [12] Lenort F.: Metoda analizy czasowo-częstotliwościowej z przykładami zastosowań w technice lotniczej. Wydawnictwo IGSMiE PAN, Kraków 2004.
- [13] Lenort F., Niepokólczycki A.: Application of the Correlation Function for Determination of Damping During In-Flight Flutter Tests. Transactions of the INSTITUTE of AVIATION 183, Warsaw 2005.
- [14] Lenort F.: Wyniki wzbudzenia drgań płatowca SZD-45 Ogar w locie za pomocą pirotechnicznego wzbudnika rezonansowego. Oprac. wewn. I.Lot, Nr bibl. RL-433, Warszawa 1981.
- [15] Lenort F.: Wyniki wzbudzenia drgań płatowca SZD-45 Ogar na ziemi za pomocą pirotechnicznego wzbudnika rezonansowego. Oprac. wewn. I.Lot, Nr bibl. RL-469, Warszawa 1982.

