

## UŻYTKOWY MODEL MATEMATYCZNY QUADROOPTERA DO CELÓW STEROWANIA

Arkadiusz KUSALEWICZ<sup>1</sup>, Krzysztof ARMIŃSKI<sup>2</sup>, Tomasz ZUBOWICZ<sup>3</sup>

1. Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki  
e-mail: arkkusal@student.pg.gda.pl
2. Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki  
tel.: 58 347 23 57 e-mail: krzysztof.arminski@pg.gda.pl
3. Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki  
tel.: 58 347 23 57 e-mail: tomasz.zubowicz@pg.gda.pl

**Streszczenie:** Celem pracy jest budowa użytkowego modelu matematycznego quadcoptera (QC) z uwzględnieniem urządzeń wykonawczych (UW) oraz identyfikacja jego parametrów. Zadanie identyfikacji sprowadzono do rozwiązania trzech zadań optymalizacji. Wynikiem prac jest model QC uwzględniający wpływ zmian napięcia zasilania na działanie UW.

**Słowa kluczowe:** quadcopter, modelowanie matematyczne, regresja liniowa.

## 1. WPROWADZENIE

Bezzałogowe maszyny latające kontrolowane przez operatora są obecnie powszechnie używane. Wykorzystywane są one już nie tylko w różnych branżach przemysłowych, ale stanowią także coraz popularniejszą gałąź modelarstwa, w tym hobbystycznego.

Synteza systemu sterowania dla QC nie jest zadaniem trywialnym ze względu na nieliniowy charakter dynamiki tego obiektu i jej strukturalną niestabilność [1, 2]. Wobec powyższego, praca tylko i wyłącznie z modelem fizycznym QC może powodować potencjalne szkody materialne powstałe zarówno na skutek uszkodzenia urządzenia, jak i elementów znajdujących się w jego bezpośrednim otoczeniu. W związku z tym, wskazane jest opracowanie modelu pozwalającego na bezpieczne wykonanie wstępnej analizy opracowywanych rozwiązań. Ponadto, ze względu na rosnące zainteresowanie rozwiązaniami typu QC oczekuje się, że zaproponowany model nie tylko poprawi działanie budowanych konstrukcji, ale przede wszystkim znajdzie zastosowanie praktyczne.

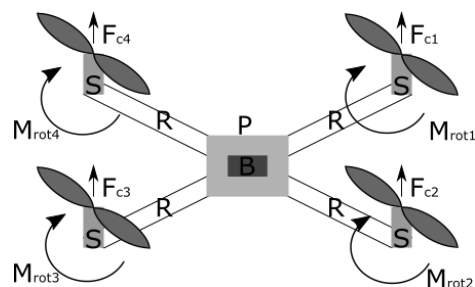
Opis podejścia do modelowania dynamiki QC oraz identyfikacji jego parametrów można znaleźć w wielu publikacjach, m.in. w [1, 2]. W niniejszym artykule przedstawiono metodologię pozwalającą nie tylko na budowę użytkowego modelu matematycznego QC, obejmującego jego strukturę i parametry, ale i uwzględniającą UW. Zatem głównymi osiągnięciami niniejszej pracy w odniesieniu do np. [2] jest zastosowanie alternatywnej abstrakcji obiektu i UW oraz uwzględnienie w modelu spadku napięcia zasilania. Pozwala to na budowę układów sterowania z kompensacją efektów spadku napięcia zasilania. Przenosi się to na redukcję niepewności związanej z działaniem UW, co w konsekwencji poprawia jakość sterowania. Warto

dodać, iż tego typu rozwiązanie nie jest obecnie szeroko rozpowszechnione w modelarstwie.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Schemat ideowy fizycznego modelu QC, który stanowi przedmiot rozważań, przedstawiono na Rysunku 1. Wykorzystując podstawowe zasady mechaniki opis konstrukcji QC można sprowadzić do platformy P połączonej czterema nieważkimi ramionami R z silnikami (model fizyczny – typ 2212T 1000KV [3]) S generującymi siły ciągu  $F_{(i)}$  oraz momenty rotacji  $M_{(i)}$ . Do wału S zamocowane są śmigła (model fizyczny – typ APC 1045 [4]). Ponadto, na P składają się elementy takie jak: korpus, akumulator zasilający B (model fizyczny – typ Li-Po 3S 2200mAh [5]) oraz autorski kontroler lotu wyposażony m.in. w procesor (model fizyczny – typ ARM MK20DX256 [6]) i żyroskop (model fizyczny – typ MPU6050 [7]). Cztery układy zasilania S (model fizyczny – typ HK 30A [8]) stanowią integralną część konstrukcji R, a dane konstrukcyjne istotne dla potrzeb syntezy modelu zamieszczono w Tabelcy 1. Należy dodać,

że:  $F_{c i} \stackrel{\text{def}}{=} F_{c i}(\cdot)$ ,  $M_{r o t i} \stackrel{\text{def}}{=} M_{r o t i}(\cdot)$ ,  $\forall i \in \overline{1,4}$ .



Rys. 1. Schemat ideowy QC

Tabelca 1. Masy i długości dla potrzeb modelowania

| nr | element   | ilość | parametry              |
|----|-----------|-------|------------------------|
| 1  | platforma | 1     | $m_M = 0,465\text{kg}$ |
| 2  | ramię     | 4     | $l = 0,12\text{m}$     |
| 3  | silnik    | 4     | $m_S = 0,066\text{kg}$ |

Wykorzystując prawa dynamiki Newtona oraz przyjmując, że wartości  $F_{c(i)}$  i  $M_{rot(i)}$  są zależne od sygnałów sterujących  $u_{(i)}$  (przesyłanego poprzez modulację położenia impulsu) i napięcia zasilania  $e$  można przystąpić do formowania modelu matematycznego. Dla ruchu postępowego i obrotowego prawdziwe jest [1]:

$$\ddot{z} = -g + m^{-1}(\cos \phi \cos \theta) \sum_{i=1}^4 F_{c i}, \quad (1)$$

$$\ddot{x} = m^{-1}(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \sum_{i=1}^4 F_{c i}, \quad (2)$$

$$\ddot{y} = m^{-1}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi) \sum_{i=1}^4 F_{c i}, \quad (3)$$

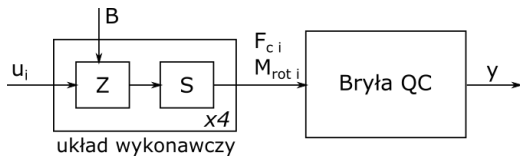
$$\ddot{\phi} = I_x^{-1}[\dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z) - I_r \dot{\Omega} + l(-F_{c2} + F_{c4})], \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = I_y^{-1}[\dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) - I_r \dot{\Omega} + l(F_{c1} - F_{c3})], \quad (5)$$

$$\ddot{\psi} = I_z^{-1}[\dot{\phi}\dot{\theta}(I_x - I_y) + l \sum_{i=1}^4 (-1)^i M_{rot i}], \quad (6)$$

gdzie:  $x$ ,  $y$  i  $z$  określają położenie QC;  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  momenty bezwładności w odpowiednich osiach;  $\phi$ ,  $\theta$  i  $\psi$  reprezentują położenie kątowe wokół osi przechylenia, pochylenia i odchylenia;  $I_r$  to moment bezwładności napędu;  $m$  całkowita masa QC;  $g$  przyspieszenie ziemskie.

Bazując na podstawach teorii systemów można dokonać następującej abstrakcji elementów QC jako obiektu sterowania – patrz Rysunek 2. Uzasadnieniem wyboru takiej dekompozycji systemu jest ograniczona dostępna informacja z sensorów zamontowanych na pokładzie QC.



Rys 2. Schemat blokowy QC jako obiektu sterowania.

W pracy przyjmuje się następujące założenia:

**Założenie 1** Pomijamy współrzędne  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

Ponieważ QC sterowany będzie drogą radiową przez operatora, z Założenia 1 wynika, że będzie on odpowiedzialny za kontrolę trajektorii lotu. Natomiast system regulacji będzie działał wspomagająco, kompensując wpływ zakłóceń na prędkości kątowe.

**Założenie 2** Model każdego z urządzeń wykonawczych jest statyczny i obejmuje układ zasilający, silnik oraz śmigło.

Uzasadnieniem przyjęcia Założenia 2 jest fakt, iż dynamika urządzenia wykonawczego jest dużo większa od dynamiki obiektu, zatem może zostać pominięta.

**Założenie 3** Wszystkie UW opisane są takim samym modelem w sensie struktury i parametrów.

Wynika to z zastosowania takich samych elementów konstrukcyjnych, więc  $\forall_{i \in \{1,4\}} (F_{c i}, M_{rot i}) = (F_c, M_{rot})$ .

**Założenie 4** Zakłada się, że niesymetria w budowie QC jest pomijalna.

Z Założenia 4 wynika, że momenty bezwładności względem osi  $x$ ,  $y$  są takie same, stąd  $(I_x, I_y) = (I_{xy}, I_{xy})$ .

W konsekwencji (1) - (6) upraszcza się do:

$$\ddot{\phi} = I_{xy}^{-1}[\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{xy} - I_z) + l(-F_{c2} + F_{c4})], \quad (7)$$

$$\ddot{\theta} = I_{xy}^{-1}[\dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_{xy}) + l(F_{c1} - F_{c3})], \quad (8)$$

$$\ddot{\psi} = I_z^{-1}l \sum_{i=1}^4 (-1)^i M_{rot i}. \quad (9)$$

Tak więc, w celu uzyskania modelu użytkowego konieczne jest określenie parametrów  $p = [I_{xy}, I_z, l]^T$ , oraz funkcji  $F_c$ ,  $M_{rot}$ . Należy zwrócić uwagę, że  $p$  jest obarczone niepewnością wynikającą z niedokładności konstrukcji i przyjętych uproszczeń. W przypadku  $F_c$ ,  $M_{rot}$  niepewność może przyjmować również postać struktury. Określenie dokładnej struktury może być bardzo złożone ze względu na skomplikowany opis matematyczny np. krzywizny śmigła. W konsekwencji:

$$(p^{**}, F_c^{**}, M_{rot}^{**}) = \arg \min_{p, F_c, M_{rot}} J(p, F_c, M_{rot}), \quad (10)$$

gdzie  $J(p, F_c, M_{rot})$  określa dokładność modelu.

Zadanie (10) jest nietrywialne same w sobie. Niemniej, kładąc:  $J(p, F_c, M_{rot}) \stackrel{\text{def}}{=} J_p(p) + J_c(F_c) + J_{rot}(M_{rot})$  można je dla rozpatrywanego w pracy przypadku QC zdekomponować na następujące zadania składowe:

- **Zadanie 1:** Identyfikacja parametrów konstrukcji,
- **Zadanie 2:** Identyfikacja ciągu,
- **Zadanie 3:** Identyfikacja momentu rotacji.

Proponowana dekompozycja jest możliwa, gdyż z definicji  $J$  wynika, że  $J_p$ ,  $J_c$  i  $J_{rot}$  są funkcjami niezależnych względem siebie zmiennych. A zatem, minimum  $J$  może być poszukiwane jako minimum kolejnych funkcji składowych.

**Zadanie 1** Identyfikacja parametrów konstrukcji:

$$p^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_p J_p(p). \quad (11)$$

Funkcja dopasowania  $J_p(p) = (p_m - p)^T (p_m - p)$  została przyjęta jako odległość pomiędzy parametrami uzyskanymi bezpośrednio z pomiarów i na podstawie analizy geometrii obiektu  $p_m$ , a ich szukanymi wartościami, co pozwala na bezpośrednie zastosowanie uzyskanych wyników (Sekcja 4).

**Zadanie 2 i 3** Identyfikacja ciągu i momentu rotacji:

$$F_c^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{F_c} J_c(F_c), \quad (12)$$

$$M_{rot}^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{M_{rot}} J_{rot}(M_{rot}), \quad (13)$$

gdzie  $J_c(F_c) = \sum_{\substack{j_u \in \{1, n_{uf}\} \\ j_e \in \{1, n_{ef}\}}} (F_c(u_{j_u}, e_{j_e}) - F_{cm_{j_e, j_u}})^2$ ;  $u_{j_u}$ ,  $e_{j_e}$ ,  $F_{cm_{j_e, j_u}}$  to odpowiednio sterowanie, napięcie zasilania i siła ciągu uzyskana dla  $j_u$ -tego scenariusza sterowania i  $j_e$ -tego scenariusza zasilania;  $n_{uf}$  i  $n_{ef}$  to liczba scenariuszy do identyfikacji siły ciągu sygnałów sterujących i napięć zasilania. Analogicznie przyjmując drugą funkcję celu

w postaci  $J_{rot}(M_{rot}) = \sum_{\substack{k_u \in \overline{1, n_{uM}} \\ k_e \in \overline{1, n_{eM}}} (M_{rot c}(u_{k_u}, e_{k_e}) - M_{rom k_e, k_u})^2$ ,  
gdzie  $u_{k_u}$ ,  $e_{k_e}$  i  $M_{rom k_e, k_u}$  to odpowiednio sterowanie, napięcie zasilania i siła ciągu uzyskana dla  $k_u$ -tego scenariusza sterowania i  $k_e$ -tego scenariusza zasilania;  $n_{uM}$ ,  $n_{eM}$  odpowiednio to liczba scenariuszy do identyfikacji momentu rotacyjnego sygnałów sterujących i napięć zasilania. Scenariusze  $j_u, j_e(k_u, k_e)$  wynikają z dyskretnej postaci dziedziny zmiennych  $u$  i  $e$ .

Niestety Zadania 2 i 3 są sformułowane w przestrzeni funkcyjnej i z tego powodu są mało użyteczne, dlatego zaproponowano przyjęcie dodatkowych założeń dotyczących struktury poszukiwanych funkcji.

**Założenie 5** Funkcje  $F_c$  i  $M_{rot}$  są postaci:

$$F_c = b(e_{j_e})(u-c)^2, M_{rot} = d(e_{k_e})(u-c)^2, \quad (14)$$

gdzie wartość  $c$  odpowiada zerowej prędkości i wynika z wykorzystywanej metody komunikacji. Idąc za przykładem [1, 2] założono, że przybliżenie kwadratowe jest wystarczająco dokładne dla relacji prędkość kątowna – siła ciągu/moment rotacji. Powyższe założenie wynika z przyjęcia liniowej charakterystyki regulacyjnej zasilacza.

Wykorzystując Założenie 6 do (12) i (13) można uzyskać szereg zadań optymalizacji dla różnych wartości  $e_{j_e} \in \Omega_e$ , gdzie  $\Omega_e$  oznacza zbiór scenariuszy napięcia zasilania:

$$\forall j_e : b^*(e_{j_e}) = \arg \min_b J_c(b, j_e), \quad (15)$$

$$\forall k_e : d^*(e_{k_e}) = \arg \min_d J_{rot}(b, k_e), \quad (16)$$

$$J_c(b, j_e) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_u=1, n_{j_u}} (b(u_{j_u} - c)^2 - F_{cm j_e, j_u})^2, \quad (17)$$

$$J_{rot}(b, k_e) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1, n_k} (d(u_{k_u} - c)^2 - M_{rom k_e, k_u})^2. \quad (18)$$

Fakt zależności rozwiązania zadań optymalizacji od  $e$  jest pożądany i może być wykorzystany m.in. przez układ sterowania do kompensacji zmian napięcia zasilania.

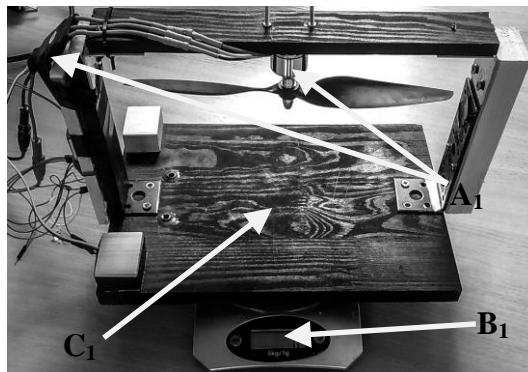
Metody rozwiązania zadań (15) i (16) zostaną przedstawione w Sekcji 4.

Ostatnim etapem jest zaproponowanie zależności analitycznych pozwalających na aproksymację wyników optymalizacji (15) i (16), czyli przejście z dyskretnej dziedziny  $b(e)$  i  $d(e)$  na ciągłą (Sekcja 4).

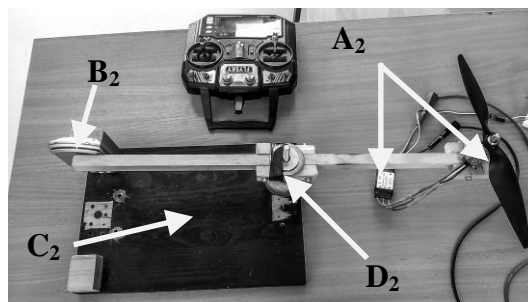
Należy zaznaczyć, że rozwiązania (15) i (16) nie są tożsame z rozwiązaniami zadań (12) i (13).

### 3. PRZYGOTOWANIE EKSPERYMENTU

Stanowisko pomiarowe wyposażone zostało w dwa gniazda robocze (Rys. 3–4). Pierwsze służące do pomiaru siły ciągu (Rys. 3) składa się z: A<sub>1</sub> - badanego silnika z układem zasilania (UZ); B<sub>1</sub> - urządzenia do pomiaru nacisku (waga typu: KX4268); C<sub>1</sub> - konstrukcji mocującej. Drugie służące do pomiaru momentu rotacji (Rys. 4) składa się z: A<sub>2</sub> - badanego silnika z UZ; B<sub>2</sub> - urządzenia do pomiaru nacisku (waga typu: diamond A04); C<sub>2</sub> - konstrukcji mocującej; D<sub>2</sub> - osi obrotu.



Rys. 3. Stanowisko do pomiaru siły ciągu



Rys. 4. Stanowisko do pomiaru momentu rotacyjnego

W obu przypadkach konstrukcja mechaniczna stanowiska sprowadza pomiar wielkości mierzonej do określenia nacisku.

### 4. WYNIKI EKSPERYMENTU

Wyniki przeprowadzonych pomiarów siły ciągu i momentu rotacji zamieszczono w Tablicach 2 i 3.

Tablica 2. Wyniki pomiaru siły ciągu

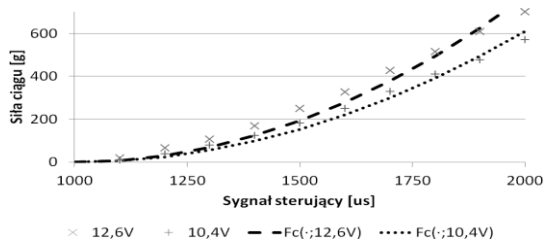
| Sygnał [us] | Ciąg [g] dla 5 scenariuszy zasilania |     |       |     |       |
|-------------|--------------------------------------|-----|-------|-----|-------|
|             | 12,6V                                | 12V | 11,5V | 11V | 10,4V |
| 1100        | 19                                   | 13  | 13    | 11  | 8     |
| 1200        | 66                                   | 56  | 53    | 49  | 39    |
| 1300        | 107                                  | 96  | 92    | 85  | 79    |
| 1400        | 169                                  | 153 | 146   | 135 | 124   |
| 1500        | 250                                  | 221 | 212   | 197 | 181   |
| 1600        | 327                                  | 301 | 286   | 267 | 250   |
| 1700        | 427                                  | 395 | 379   | 347 | 330   |
| 1800        | 515                                  | 490 | 464   | 436 | 410   |
| 1900        | 610                                  | 578 | 550   | 520 | 476   |
| 2000        | 700                                  | 685 | 640   | 610 | 570   |

Tablica 3. Wyniki pomiaru momentu rotacji

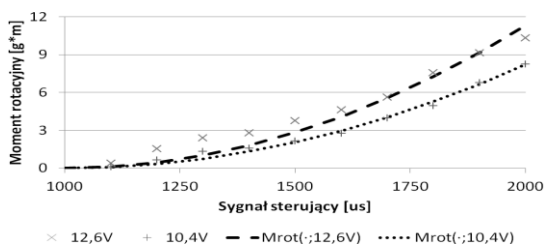
| Sygnał [us] | Moment [g · m] dla 5 scenariuszy zasilania |      |       |      |       |
|-------------|--|------|-------|------|-------|
|             | 12,6V                                      | 12V  | 11,5V | 11V  | 10,4V |
| 1100        | 3,2  | 3,0  | 2,7   | 2,2  | 0,8   |
| 1200        | 12,9                                       | 11,3 | 8,2   | 6,3  | 5,5   |
| 1300        | 20,1                                       | 16,4 | 14,3  | 13,1 | 11,1  |
| 1400        | 23,3                                       | 22,2 | 17,0  | 15,2 | 13,3  |
| 1500        | 31,4                                       | 27,6 | 26,6  | 24,4 | 18,0  |
| 1600        | 38,6                                       | 36,8 | 28,0  | 25,5 | 23,0  |
| 1700        | 47,0                                       | 42,5 | 39,0  | 36,2 | 33,1  |
| 1800        | 63,0                                       | 59,6 | 55,0  | 46,6 | 41,2  |
| 1900        | 76,2                                       | 68,7 | 63,7  | 60,1 | 56,6  |
| 2000        | 86,0                                       | 83,0 | 76,0  | 71,2 | 68,9  |

Wykonując pomiary parametrów  $p_m$  otrzymano rozwiązanie Zadania 1 postaci  $p^* = [0,008; 0,016; 0,12]^T$ .

Zadania (15) i (16) mają taką samą postać, a zatem mogą zostać potraktowane w analogiczny sposób. Obserwując, że niepewność pomiaru czasu trwania impulsów z procesora  $u_i$ ,  $\forall i = \overline{1,4}$  jest znikoma w porównaniu do niepewności pomiaru nacisku można dokonać linearyzacji w przestrzeni celu poprzez wprowadzenie nowej zmiennej w miejscu  $(u_i - c)^2$ , co sprowadza oba zadania do problemu regresji liniowej. Rozwiązania tych zadań dla dwóch wybranych przypadków scenariuszy zasilania zilustrowano na Rys. 5 i 6.



Rys. 5. Siła ciągu w funkcji sygnału sterującego



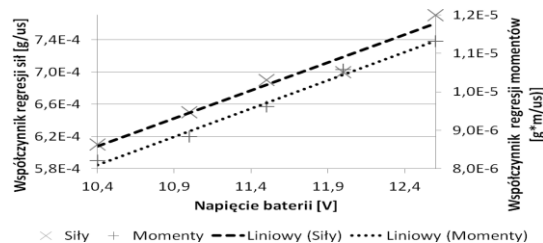
Rys. 6. Moment rotacyjny w funkcji sygnału sterującego

Ostatecznie bazując na konsekwentnym rozwiązaniu zadań (15) i (16) dla kolejnych scenariuszy z  $\Omega_e$ , wyznaczono przybliżone zależności  $b(e)$  i  $d(e)$  (Rys. 7). W obu przypadkach bazując na poczynionych obserwacjach uzyskanych wyników zastosowano aproksymację liniową.

## 5. PODSUMOWANIE

Do głównych założeń amatorskich projektów QC można zaliczyć niskie zużycie energii przez pokładowe układy elektroniczne oraz minimalizację masy zainstalowanych tam urządzeń, co w praktyce uzyskuje się

kosztem dostępności informacji pomiarowej. A zatem, wpływa to na pogorszenie sterowności obiektu. W artykule, dla tak sformułowanego problemu przedstawiono propozycję rozwiązania zadania, wykorzystującego uproszczony model matematyczny QC, uwzględniający identyfikację jego parametrów oraz spadek napięcia zasilania UW. Zaprezentowano wstępne wyniki badań laboratoryjnych, które potwierdziły poprawność przyjętych założeń i będą podstawą do przeprowadzenia syntezy układu sterowania.



Rys. 7. Zależności  $b(e)$  i  $d(e)$

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. Zulu A., John, S.: A Review of Control Algorithms for Autonomous Quadrotors. Open Journal of Applied Sciences 2014, Nr 4, s. 547-556. <http://dx.doi.org/10.4236/ojapps.2014.414053>
2. Chovancová A., Fico T., Chovanec L., Hubinský P.: Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey), Modelling of Mechanical and Mechatronic Systems MMaMS 2014 Procedia Engineering Nr 96 2014 172 – 181 doi: 10.1016/j.proeng.2014.12.139
3. Adres <http://static.rcgroups.com/forums/attachments/1/7/1/7/8/a1745220-38-Grayson-Welgard%202212.13.jpg> (dostęp 25.10.2015)
4. Adres [http://www.apcprop.com/product\\_p/lpb10045mr-b4.htm](http://www.apcprop.com/product_p/lpb10045mr-b4.htm) (dostęp 25.10.2015)
5. Adres <https://botland.com.pl/akumulatory-li-pol-dualsky/2789-pakiet-lipol-dualsky-2200mah-25c-3s-111v-eco-s.html> (dostęp 25.10.2015)
6. Karta katalogowa adres <https://www.pjrc.com/teensy/K20P64M72SF1RM.pdf> (dostęp 25.10.2015)
7. Karta katalogowa adres [https://www.cdiweb.com/datasheets/invensense/MPU-6050\\_DataSheet\\_V3%204.pdf](https://www.cdiweb.com/datasheets/invensense/MPU-6050_DataSheet_V3%204.pdf) (dostęp 25.10.2015)
8. Adres <http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/uploads/811103388X7478X20.pdf> (dostęp 25.10.2015)

## MATHEMATICAL MODEL OF QUADROPTER FOR CONTROL DESIGN PURPOSES

The goal of the paper is to deliver the utility model of quadcopter (QC) dynamics. The focus is on including the information of powersource voltage drop in actuator system model and its parameter identification. The identification problem is initially set up as an optimisation task in function space due to the impact of the actuators. Under the stated assumptions regarding the actuator system model the identification problem is consequently decomposed into three independent optimisation tasks defined in the model parameter space. The designed laboratory experiments deliver input-output data sets used to solve the proposed optimisation tasks. Solving the optimisation tasks results in an utility model for control design purposes that encompasses the nonlinearity of the actuator system and the effects of the powersource voltage drop. The latter is obtained by interpolation of the discrete results into the continuous voltage domain by line fitting under the stated assumption. The obtained model features are considered key factors for the control system design to follow in the future work.

**Keywords:** quadcopter, mathematical modelling, parameter identification.