

Rozstaw rys według PN-EN 1992-1-1:2008 oraz PN-B 03264:2002

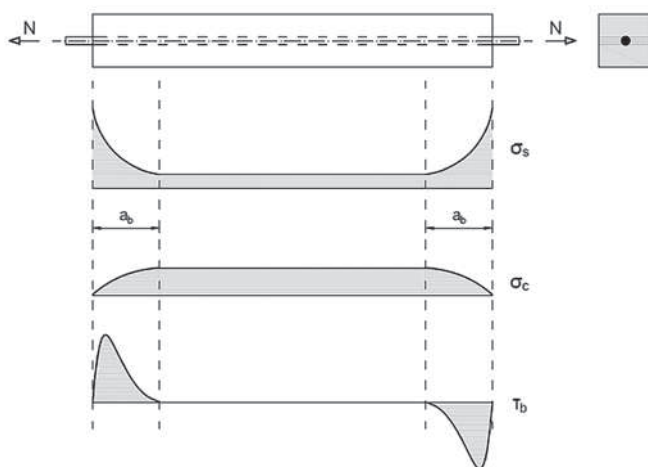
Dr inż. Marek Wesołowski, mgr inż. Maciej Tomasz Solarczyk, Katedra Konstrukcji Betonowych, Politechnika Gdańska

1. Wprowadzenie

Zagadnienie obliczania szerokości rys w konstrukcjach żelbetowych jest istotne ze względu na spełnienie wymogów normowych odnośnie ich dopuszczalnych szerokości w stanie granicznym użyteczności. W tej sytuacji szczególnie znaczenia nabiera właściwe oszacowanie rozstawu rys, które są podstawowym parametrem wyjściowym do dalszych obliczeń. Taki aspekt zagadnienia jest przedmiotem niniejszej publikacji, dla której inspiracją była w tej mierze między innymi praca [4].

2. Rozstaw rys w funkcji przyczepności zbrojenia do betonu

W klasycznym podejściu do problematyki stanu granicznego zarysowania elementów żelbetowych [5] rozważa się elementarny przykład osiowo rozciąganego pręta żelbetowego, w którym siła rozciągająca przyłożona jest obustronnie do zbrojenia, co pokazano na rysunku 1. Dla elementu niezarysowanego, w środkowej jego części występuje czysta faza I, wynikająca ze zgodności odkształceń stali i betonu, natomiast na obu końcach niezgodność odkształceń równoważona jest naprężeniami przyczepności na styku pręta stalowego i betonu. Można obrazowo uznać, że końce elementu stanowią przejściową strefę zaburzeń, poza którą dopiero następuje zgodna współpraca betonu i stali. Należy



Rys. 1. Schemat osiowo rozciąganego pręta żelbetowego

zauważyć, że naprężenia z pręta stalowego przekazują się na beton właśnie poprzez wspomniane wyżej naprężenia przyczepności, na obu końcowych odcinkach pręta o skończonej długości, zwanych odcinkami przyczepności.

Przy wzroście siły rozciągającej w najszlubszym (losowym) przekroju pręta następuje wyczerpanie zdolności nośnej betonu (można również uznać, że osiągnięte zostają graniczne odkształcenia rozciąganego betonu), czego skutkiem jest jego zarysowanie. Układ sił wewnętrznych ulega wówczas przegrupowaniu, doprowadzając do sytuacji, w której można rozpatrywany element rozważać jak dwa niezależne pręty, rozdzielone wspomnianą pierwszą rysą. Wielkość siły rozciągającej utożsamia się w tym ujęciu z siłą rysującą, a stan pręta opisuje się jako stan początkowego zarysowania (stan ten scharakteryzowany jest również tym, że odcinki przyczepności nie zachodzą na siebie, są oddalone). Dalszy (minimalny) wzrost siły rozciągającej, który praktycznie może być niezauważalny, prowadzi do powstawania kolejnych rys prostopadłych do osi elementu, w kolejnych losowo najszlubszych przekrojach poprzecznych. W tej sytuacji należy sobie odpowiedzieć na pytanie, czy ów proces powstawania kolejnych rys kiedyś się zakończy, a jeżeli tak, to co nim reguluje? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wystarczy rozważyć dwa przypadki graniczne.

• Przypadek 1

Dwie sąsiadujące rysy powstały w odległości równej w przybliżeniu podwojonemu odcinkowi przyczepności, jednakże minimalnie mniejszej. W tej sytuacji działające na styku stali i betonu wypadkowe naprężenia styczne z obu stron sąsiednich rys nie są w stanie doprowadzić do zarysowania betonu. Tak więc nowa rysa, pomiędzy istniejącymi, nie może już powstać.

• Przypadek 2

Dwie sąsiadujące rysy powstały w odległości równej w przybliżeniu podwojonemu odcinkowi przyczepności, jednakże minimalnie większej. W tej sytuacji działające na styku stali i betonu wypadkowe naprężenia styczne z obu stron sąsiednich rys doprowadzają do dodatkowego zarysowania betonu pomiędzy rysami istniejącymi.

W momencie wytworzenia się powyższych dwóch sytuacji granicznych (w praktyce będą to najczęściej sytuacje pośrednie, nie zmieniające jednak istoty rzeczy) można mówić

o końcowym stanie zarysowania, gdy nowe rysy już nie mogą powstać, scharakteryzowanym również faktem, że odcinki przyczepności zachodzą na siebie.

Wypływa stąd ważny wniosek praktyczny – maksymalny możliwy rozstaw rys jest równy podwojonemu odcinkowi przyczepności, natomiast minimalny możliwy rozstaw rys jest równy jednemu odcinkowi przyczepności. W rzeczywistości nie jesteśmy w stanie przewidzieć, jaki rozstaw konkretnie wystąpi, ponieważ jest to wielkość losowa, jednakże znamy przedział, w którym wszystkie rozstawy rys będą się mieściły. Z tego powodu najlogiczniejsze wydaje się przyjęcie (co znajduje swój wyraz między innymi w pracy [6]), że miarodajny jest średni rozstaw rys z obu skrajnych przypadków, który w tej sytuacji wynosi półtora odcinka przyczepności. Długość odcinka przyczepności limituje wypadkowa naprężeń przyczepności na styku prętów stalowych i betonu, co powoduje osiągnięcie przez otaczający beton jego wytrzymałości na rozciąganie. Prowadzi to do następującego równania równowagi w betonie otaczającym rozciągany pręt:

$$\int_0^{a_b} \tau_b(x) \times u_s \times dx = f_{ct} \times A_c \quad (1)$$

Wprowadzając pojęcie średnich naprężeń przyczepności na powierzchni zbrojenia (co na rozważanym etapie jest w zupełności wystarczające), otrzymuje się relację:

$$\tau_{bm} \times u_s \times a_b = f_{ct} \times A_c \quad (2)$$

z której można bezpośrednio wyznaczyć długość odcinka przyczepności w formie:

$$a_b = \frac{f_{ct} \times A_c}{\tau_{bm} \times u_s} \quad (3)$$

gdzie:

f_{ct} – wytrzymałość betonu na rozciąganie,

A_c – powierzchnia przekroju betonowego,

τ_{bm} – średnie naprężenia przyczepności na powierzchni zbrojenia,

u_s – obwód wkładki stalowych.

Mnożąc w równaniu (3) licznik i mianownik przez pole powierzchni rozciąganego zbrojenia A_s i po uporządkowaniu, dochodzi się do zależności:

$$a_b = \frac{f_{ct}}{\tau_{bm}} \times \frac{A_c}{A_s} \times \frac{A_s}{u_s} \quad (4)$$

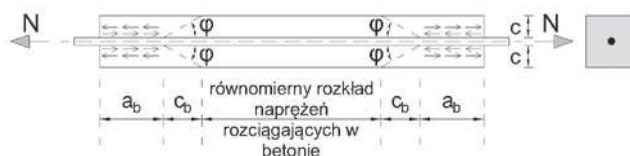
Ponieważ we wzorze (4) pierwszy z czynników można uznać za stałą materiałową η oraz zauważając, że drugi czynnik prawej strony równania jest odwrotnością stopnia zbrojenia podłużnego ρ_l , otrzymuje się ostatecznie

$$a_b = \eta \times \frac{1}{\rho_l} \times \frac{A_s}{u_s} \quad (5)$$

Jeżeli w przekroju rozciągany występuje zbrojenie w postaci prętów o jednakowej średnicy ϕ , to otrzymuje się w tej sytuacji:

$$a_b = 0,25 \times \eta \times \frac{\phi}{\rho_l} \quad (6)$$

Aby podane powyżej zależności (wyprowadzone dla przypadku rozciągania osiowego) adaptować do rozciągania mimośrodowego lub zginania, wprowadza się dla strefy rozciąganej betonu pojęcie pola efektywnego, do którego odnosi się stopień zbrojenia podłużnego.



Rys. 2. Schemat rozchodzenia się naprężeń rozciągających w betonie wskutek działania naprężeń przyczepności na obwodzie zbrojenia

Do powyższych rozważań należy jeszcze wprowadzić jedną istotną modyfikację, opartą na świadomości, że naprężenia rozciągające w betonie powstają wskutek działania naprężeń stycznych, skoncentrowanych na powierzchni prętów stalowych (rys. 2). Wykorzystując znane pojęcie kąta rozchodzenia się naprężeń w betonie ϕ , można uznać, że pełne wyrównanie naprężeń następuje w odległości:

$$c_b = c \times \cot \phi \quad (7)$$

gdzie wielkość c jest otuliną zbrojenia podłużnego. Wielkość ta zwana jest również w polskiej literaturze technicznej odcinkiem odprężenia, co przykładowo opisują prace [3, 2]. Przyjmując dla betonu zbrojonego $\phi = 45^\circ$, otrzymuje się zatem:

$$c_b = c \quad (8)$$

W tej sytuacji należy skorygować wcześniejsze wyrażenia opisujące możliwe rozstawy rys, otrzymując ostatecznie, przy wykorzystaniu podstawowej relacji (6), następujące wielkości:

- maksymalny rozstaw rys

$$\begin{aligned} s_{r,max} &= 2 \times (c_b + a_b) = 2 \times c + 2 \times a_b = \\ &= 2 \times c + 2 \times 0,25 \times \eta \times \frac{\phi}{\rho_l} \end{aligned} \quad (9)$$

- minimalny rozstaw rys

$$s_{r,min} = c_b + a_b = c + a_b = c + 0,25 \times \eta \times \frac{\phi}{\rho_l} \quad (10)$$

- średni (miarodajny) rozstaw rys

$$\begin{aligned} s_{rm} &= 1,5 \times (c_b + a_b) = 1,5 \times c + 1,5 \times a_b = \\ &= 1,5 \times c + 1,5 \times 0,25 \times \eta \times \frac{\phi}{\rho_l} \end{aligned} \quad (11)$$

3. Rozstaw rys w ujęciu normowym

Dokonując analizy porównawczej wzorów normowych dotyczących stanu granicznego zarysowania zarówno w ujęciu europejskim [8], jak i polskim [7], należy na wstępie wziąć pod uwagę to, że w procedurach obliczeniowych obu tych norm zawarto współczynnik korygujący, uwzględniający fakt relatywnie dużego rozrzutu wyników otrzymywanych z badań eksperymentalnych, co dla betonu rozciąganego jest niejako naturalne. Przyjmując za podstawę metodologiczną, że uzyskane rezultaty obliczane wzorami normowymi powinny w świetle statystycznym odpowiadać kwantylom 95% (co wynika z ogólnych zasad kształtowania niezawodności konstrukcji budowlanych przyjętych w normalizacji europejskiej i polskiej), z obserwowanych rozrzutów wyników badań eksperymentalnych, w których współczynnik zmienności przekraczał nawet 40% [1, 2]), uzyskano współczynnik korygujący w postaci mnożnika o wartości 1,70 (przy założeniu, że populacja obserwowanych szerokości rys odpowiada rozkładowi normalnemu).

Trzeba dodatkowo jeszcze zauważyć, że o ile w normie polskiej (w ślad za pierwszymi wersjami normy europejskiej) wspomniany współczynnik zwiększający zastosowano jako mnożnik do obliczeń miarodajnej szerokości rys, czyli w formie jawnej, o tyle w finalnej wersji normy europejskiej, z niewiadomych w zasadzie powodów, został on uwzględniony w formie niejawnej, w postaci odpowiednio zwiększonych współczynników liczbowych przy obliczaniu rozstawu rys. W dalszych rozważaniach niniejszego artykułu pominięto wpływ tego współczynnika, przedstawiając porównawczo wzory obu norm niejako w formie „czystej”, bez powyższego balastu probabilistycznego. Przy takich założeniach, dla przykładowych elementów żelbetowych rozciąganych osiowo, zbrojonych prętami o dobrej przyczepności (żebrowanymi), wzory normowe można sprowadzić do następujących postaci (przy oznaczeniach jak wcześniej):

- według [8] – maksymalny rozstaw rys

$$s_{r,max} = 2 \times c + 0,8 \times 0,25 \times \frac{\phi}{\rho_{p,eff}} \quad (12)$$

- według [7] – średni rozstaw rys

$$s_{r,m} = 50 \text{ mm} + 0,8 \times 0,25 \times \frac{\phi}{\rho_r} \quad (13)$$

przy czym parametry $\rho_{p,eff}$ oraz ρ_r mają taki sam sens, jak wielkość ρ_1 opisana wcześniej we wzorze (6).

4. Analiza porównawcza

Jak widać z porównania wzorów (9)–(11) ze wzorami (12)–(13), normowe relacje są niekonsekwentne, gdyż z jednej strony pierwsze składniki ich sum sugerują branie pod uwagę podwójnego odcinka przyczepności, natomiast drugie składniki są adekwatne dla jednego odcinka przyczepności (jak

przyjmowała zresztą w przeszłości większość różnych norm krajowych), przy czym [7] zakłada dodatkowo stałą wielkość otuliny zbrojenia, wynoszącą 25 mm. Także nazewnictwo w obu normach jest niekonsekwentne: w swym opisie [8] sugeruje, że mamy do czynienia z maksymalnym rozstawem rys, natomiast według [7] – ze średnim, co ani w jednym, ani w drugim przypadku nie odpowiada rzeczywistości.

W zaistniałej sytuacji warto więc dokonać porównania zależności w [7, 8] na tle równań (9)–(11), opisujących istotę zjawiska od strony przyczepnościowej.

Analizując strukturę wzorów na rozstaw rys: (9)–(11) oraz (12)–(13), można przedstawić wyniki w funkcji trzech zmiennych: otulenia zbrojenia podłużnego (c), średnicy zbrojenia (ϕ) oraz stopnia zbrojenia podłużnego (ρ_1).

Poniżej przedstawiono analizę porównawczą obliczeń rozstawu rys według wzorów (9)–(11) oraz (12)–(13). Założono przypadek czystego rozciągania oraz zastosowania prętów o wysokiej przyczepności (żebrowanych).

Wyniki obliczeń przedstawiono w funkcji wyżej wymienionych zmiennych.

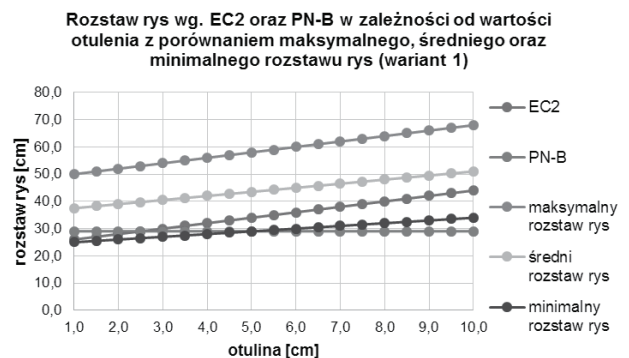
Rozważono skrajnie różne przypadki obliczeniowe.

- **Wariant 1** (niewielka otulina, mała średnica pręta zbrojenia podłużnego oraz niski stopień zbrojenia):

otulina: $c = 20 \text{ mm}$,

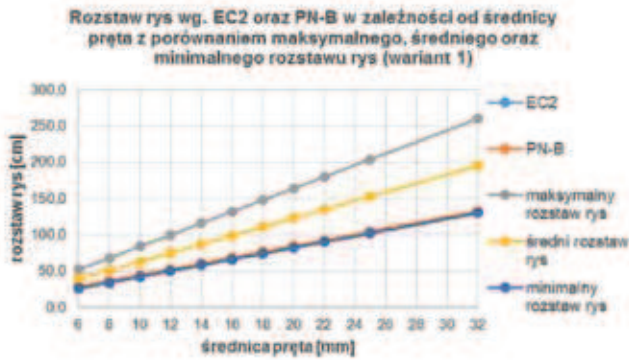
średnica pręta zbrojenia podłużnego: $\phi = 6 \text{ mm}$,

stopień zbrojenia podłużnego: $\rho_1 = 0,005$ (0,5%).



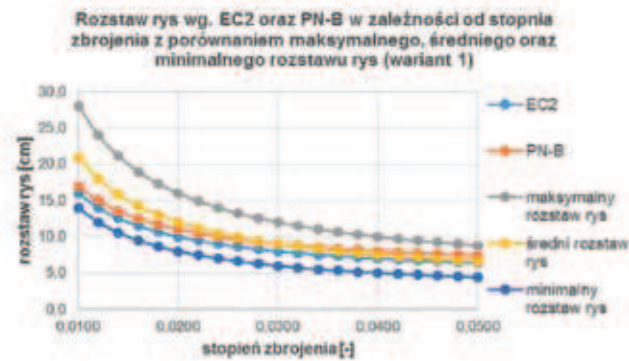
Rys. 3. Rozstaw rys w funkcji wartości otulenia dla wariantu 1

Rozstaw rys w funkcji wartości otulenia (w zakresie od 1 do 10 cm) porównano na rysunku 3, przyjęto jako wartości stałe: $\phi = 6 \text{ mm}$ oraz $\rho_1 = 0,005$, wykorzystując do obliczeń zależności podane wzorami (9)–(11) oraz (12)–(13). W dalszej części artykułu przyjęto oznaczenia: EC2 dla wzoru (12), PN-B dla wzoru (13), maksymalny rozstaw rys dla wzoru (9), średni rozstaw rys dla wzoru (10) oraz minimalny rozstaw rys dla obliczeń według wzoru (11).



Rys. 4. Rozstaw rys w funkcji średnicy pręta dla wariantu 1

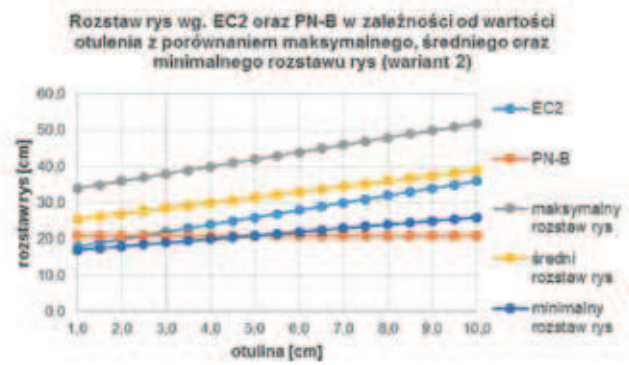
Rozstaw rys w funkcji średnicy pręta (w zakresie od 6 do 32 mm) porównano na rysunku 4, przyjęto jako wartości stałe: $c = 20$ mm oraz $\rho_l = 0,005$, wykorzystując do obliczeń zależności podane wzorami (9)–(11) oraz (12)–(13). Rozstaw rys dla obliczeń jak dla minimalnego rozstawu rys (11), według [8] (12) oraz według [7] (13) powoduje osiągnięcie bardzo zbliżonych wartości (stąd linie pokrywają się).



Rys. 5. Rozstaw rys w funkcji stopnia zbrojenia dla wariantu 1

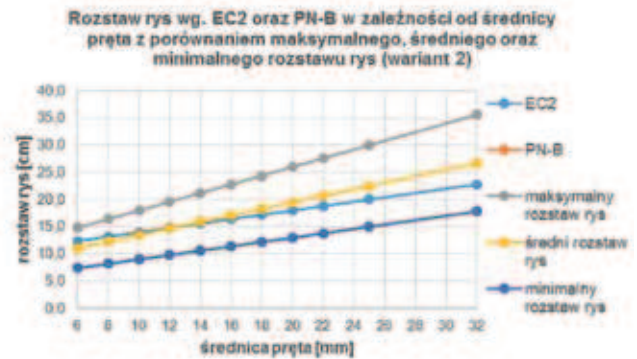
Rozstaw rys w funkcji stopnia zbrojenia (w zakresie od 0,01 do 0,05) porównano na rysunku 5, przyjęto jako wartości stałe: $c = 20$ mm oraz $\phi = 6$ mm, wykorzystując do obliczeń zależności podane wzorami (9)–(11) oraz (12)–(13).

- **Wariant 2** (znaczną otuliną, dużą średnicą pręta zbrojenia podłużnego oraz wysoki stopień zbrojenia):
otulina: $c = 50$ mm,
średnica pręta zbrojenia podłużnego: $\phi = 40$ mm,
stopień zbrojenia podłużnego: $\rho_l = 0,05$ (5%).



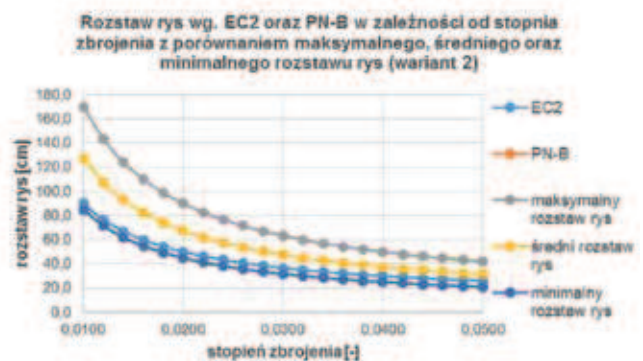
Rys. 6. Rozstaw rys w funkcji wartości otuliny dla wariantu 2

Rozstaw rys w funkcji wartości otuliny (w zakresie od 1 do 10 cm) porównano na rysunku 6, przyjęto jako wartości stałe: $\phi = 40$ mm oraz $\rho_l = 0,05$, wykorzystując do obliczeń zależności podane wzorami (9)–(11) oraz (12)–(13).



Rys. 7. Rozstaw rys w funkcji średnicy pręta dla wariantu 2

Rozstaw rys w funkcji średnicy pręta (w zakresie od 6 do 32 mm) porównano na rysunku 7, przyjęto jako wartości stałe: $c = 50$ mm oraz $\rho_l = 0,05$, wykorzystując do obliczeń zależności podane wzorami (9)–(11) oraz (12)–(13). Rozstaw rys do obliczeń dla minimalnego rozstawu rys (11) oraz według [7] (13) powoduje osiągnięcie identycznych wartości (stąd linie pokrywają się).



Rys. 8. Rozstaw rys w funkcji stopnia zbrojenia dla wariantu 2

Rozstaw rys w funkcji stopnia zbrojenia (w zakresie od 0,01 do 0,05) porównano na rysunku 8, przyjęto jako wartości stałe: $c = 50$ mm oraz $\phi = 40$ mm, wykorzystując do obliczeń zależności podane wzorami (9)–(11) oraz (12)–(13). Rozstaw rys dla obliczeń jak dla minimalnego rozstawu rys (11) oraz według [7] (13) powoduje osiągnięcie identycznych wartości (stąd linie pokrywają się).

5. Podsumowanie

Obliczenia w funkcji wartości otuliny oraz średnicy pręta prowadzą do uzyskania wykresów liniowych (rys. 3, 4, 6, 7), podczas gdy dla funkcji stopnia zbrojenia – wykresu krzywoliniowego (rys. 5 i 8).

Na rysunku 3 oraz 6 zaobserwować można, że dla obliczeń w funkcji wartości otuliny rozstaw rys według [7] jest stały i odpowiada najbliższemu minimalnemu rozstawowi rys. Rozstaw rys według [8] niezależnie od wariantu obliczeń dla niewielkiej otuliny odpowiada rozstawowi minimalnemu, przy czym zwiększając stopniowo wartość otulenia – normowy rozstaw rys dąży do osiągnięcia średniego rozstawu rys.

Z rysunku 4 wynika, że dla niewielkiej otuliny ($c = 20$ mm) oraz niewielkiego stopnia zbrojenia ($\zeta = 0,005$) rozstaw rys według [7 i 8] odpowiada z niewielkim błędem rozstawowi minimalnemu, podczas gdy z rysunku 7 wynika, że dla większej otuliny ($c = 50$ mm) oraz znacznego stopnia zbrojenia ($\rho_1 = 0,05$) rozstaw rys według [7] pokrywa się nadal z rozstawem minimalnym, lecz rozstaw rys według [8] w przybliżeniu odpowiada rozstawowi średniemu.

Z rysunku 5 wynika, że dla niewielkiego stopnia zbrojenia (0,01) wartości rozstawu rys według [7 i 8] znajdują się bliżej rozstawu minimalnego, podczas gdy dla znacznego stopnia zbrojenia (0,05) bliżej rozstawu średniego. Dla obliczeń zgodnie z wariantem 2 (rys. 8) – w całym zakresie rozważanych stopni zbrojenia (0,01–0,05) rozstaw minimalny rys pokrywał się z obliczeniami według [7], natomiast dla [8] – przebieg był podobny jak dla obliczeń w wariantcie 1. Lewa część wzorów (9)–(11) oraz (12)–(13) pochodząca od otulenia zbrojenia ma mniejszy wpływ na rozstaw rys niż ich prawa część. Ogólnie można stwierdzić, że im większa średnica zbrojenia i im mniejszy stopień zbrojenia podłużnego, tym wpływ otulenia na wartość rozstawu rys jest niewielki, w skrajnych przypadkach dochodzący do 10%.

Jak udowodniono obliczeniowo – nazewnictwo normowe: dla [8] (maksymalny rozstaw rys) oraz dla [7] (średni rozstaw rys) nie jest słuszne w każdym z rozważanych wariantów obliczeniowych. Można zauważyć, że oba normowe wzory dają zbliżone do siebie wartości rozstawu rys, które w większości rozważanych przypadków odpowiadały rozstawowi minimalnemu. Warto zatem w tym miejscu zwrócić uwagę, że zalecenia normowe nie dają wartości „po bezpiecznej stronie” – zaniżają, a nie zawyżają wartości rozstawu rys, a co za tym idzie – zaniżają wartości szerokości rozwarcia rys. Projektanci konstrukcji przystępując do obliczeń, powinni zdawać sobie sprawę z powyższych uwarunkowań.

Norma [7] wprost narzuca wartość otulenia wynoszącą 25 mm. W zakresie najczęściej występujących elementów konstrukcyjnych przyjęcie to może zostać uznane za wystarczająco dokładne, natomiast analizując specyficzne przypadki obliczeniowe, w których otulina jest większa lub mniejsza – projektant nie ma możliwości skorygowania normowego wzoru o ten czynnik (zwłaszcza że przyjęta wartość otuliny nie została skomentowana w normie [7]).

Warto zwrócić uwagę na współczynnik korygujący, który w [8] został przyjęty w sposób niejawnny o wartości równej 1,70. Norma [7] definiuje jego wartość we współczynniku β , który nazwany został: „współczynnikiem wyrażającym stosunek obliczeniowej szerokości rysy do szerokości średniej”. Stosowany jest on bezpośrednio we wzorze na obliczeniową szerokość rys prostokątnych do osi elementu w_k . Jego wartości w przypadku zarysowania wywołanego przez obciążenie wynosi 1,7 (zatem identycznie jak w [8]), natomiast w przypadku zarysowania wywołanego przez opór stawiany odkształceniom wymuszonym przyjmuje się zakres: 1,3–1,7 w zależności od najmniejszego wymiaru elementu (pierwszą wartość, gdy wymiar nie przekracza 300 mm, drugą wartość, gdy wymiar przekracza 800 mm; dla przekrojów o wymiarach pośrednich wartość współczynnika β można interpolować liniowo). Ponieważ dla przypadku zarysowania wywołanego przez opór stawiany odkształceniom wymuszonym wartość 1,7 uzyskiwana jest dla relatywnie dużego najmniejszego wymiaru elementu (800 mm), zatem ze względu na ten probabilistyczny parametr – końcowe różnice w szerokościach rys pomiędzy [8] a [7] mogą być znaczne.

Należy podkreślić również, że [8] rozstaw rys definiuje za pomocą dwóch wzorów (w przeciwieństwie do [7]) w zależności od rozstawu zbrojenia mającego przyczepność większego lub mniejszego niż $5 \times (c + \phi/2)$: gdy rozstaw jest nie większy niż $5 \times (c + \phi/2)$, rozstaw rys należy obliczać za pomocą wzoru (12), natomiast gdy rozstaw zbrojenia przekracza $5 \times (c + \phi/2)$ za pomocą:

$$s_{r,max} = 1,3 \times (h - x) \quad (14)$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Godycki-Ćwirko T., Morfologia rys w konstrukcjach z betonu, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok, 1992
- [2] Knauff M. i inni, Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Komentarz naukowy do PN-B-03264:2002, Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa, 2005
- [3] Knauff M. i inni, Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2006
- [4] Knauff M., Dlaczego nie należy stosować normy PN-B-03264:2002 do obliczeń zarysowania konstrukcji z betonu, Inżynieria i Budownictwo 4/2016, str. 181–184
- [5] Leonhardt F., Vorlesungen über Massivbau, Erster Teil, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973
- [6] Noakowski P., Schäfer H., Steifigkeitsorientierte Statik im Stahlbetonbau. Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 2003
- [7] PN-B 03264:2002, Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i wymiarowanie
- [8] PN-EN 1992-1-1:2008, Eurokod, 2 Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1, Reguły ogólne i reguły dla budynków