MINUT 2022 (4), s. 70–80
ISSN 2719-3063

MARTYNA MACIASZCZYK

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Liczby zespolone — postać algebraiczna w wersji lekkostrawnej

Streszczenie. Praktycznie na każdym kierunku studiów na uczelniach technicznych pojawiają się liczby zespolone — tajemnicze wyrażenie z jednostką urojoną. W tym artykule postaram się uchylić rąbka tajemnicy, jak rozwiązywać niektóre zadania z liczbami zespolonymi przedstawionymi w postaci algebraicznej.

Słowa kluczowe: liczby zespolone, postać algebraiczna liczb zespolonych, płaszczyzna Gaussa.

1. Wstęp

Zacznijmy od przypomnienia wiadomości. Przez $\mathbb{C}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb zespolonych. A czym tak właściwie są liczby zespolone?

Liczbą zespoloną w postaci algebraicznej nazywamy wyrażenie $z = x + yi$, gdzie x i y to liczby rzeczywiste, a i to *jednostka urojona* (czyli liczba zespolona spełniająca warunek $i^2 = -1$).

Dla liczb zespolonych mamy następujące pojęcia. Jeżeli $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, to:

- $\mathtt{Re}(z) = x$ oznacza *część rzeczywistą* liczby zespolonej,
- $\mathtt{Im}(z) = y$ oznacza *część urojoną* liczby zespolonej (TYLKO współczynnik przy i),
- $\overline{z} = x - yi$ oznacza *sprzężenie* liczby zespolonej (zmieniamy część urojoną na liczbę przeciwną),
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ oznacza *moduł* liczby zespolonej (liczba rzeczywista nieujemna).

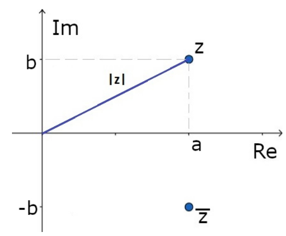
Rozpatrzmy kilka przykładów:

- jeżeli $z_1 = 1 - 2i$, to $\mathtt{Re}(z_1) = 1,\ \mathtt{Im}(z_1) = -2,\ \overline{z_1} = 1 + 2i,\ |z_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$,
- jeżeli $z_2 = 4$, to $\mathtt{Re}(z_2) = 4,\ \mathtt{Im}(z_2) = 0,\ \overline{z_2} = 4,\ |z_2| = 4$,
- jeżeli $z_3 = -3i$, to $\mathtt{Re}(z_3) = 0,\ \mathtt{Im}(z_3) = -3,\ \overline{z_3} = 3i,\ |z_3| = 3$.

Autor korespondencyjny: M. Maciaszczyk (Martyna.Maciaszczyk@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 06.05.2022.

Liczby zespolone możemy również interpretować jako punkty na płaszczyźnie Gaussa. Płaszczyzna Gaussa jest to coś jak płaszczyzna kartezjańska: na osi poziomej (odciętej) zaznaczamy część rzeczywistą liczby zespolonej (x), a na osi pionowej (rzędnej) część urojoną (y). W związku z tym oś pozioma nazywana jest osią rzeczywistą i oznaczana jest `Re`, a oś pionowa osią urojoną `Im`.

Liczba zespolona $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, przedstawiona na płaszczyźnie Gaussa jest punktem o współrzędnych (a, b). Zauważmy również, że moduł liczby zespolonej z jest to jej odległość od liczby zespolonej 0, a sprzężenie $\overline{z} = a - bi$ to punkt symetryczny (względem prostej `Re`).



2. Podstawowe działania arytmetyczne

Zacznijmy łagodnie, od podstawowych działań. Niech $z_1 = a+bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, $z_2 = x+yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Jak wykonywać działania? Najwygodniej będzie pokazać to na konkretnych przykładach. Zapamiętajmy, że wynikiem działań na liczbach zespolonych są liczby zespolone (przedstawimy je też w postaci algebraicznej).

- **Dodawanie**: oblicz $z_1 + z_2$ jeżeli $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - 8i$.

  Dodawanie liczb zespolonych w postaci algebraicznej jest bardzo proste — sumujemy części rzeczywiste z rzeczywistymi, a urojone z urojonymi:

  $z_1 + z_2 \overset{(1)}{=} (2 + 3i) + (4 - 8i) = 2 + 3i + 4 - 8i \overset{(2)}{=} (2 + 4) + (3i - 8i) = 6 + (3 - 8)i = 6 - 5i.$

  (1) Zastosujemy dodatkowe nawiasy dla zwiększania widoczności.

  (2) Grupujemy.

  Podajmy wzór ogólny dla dodawania (oraz część rzeczywistą i urojoną wyniku):

  $z_1 + z_2 = (a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i,$

  $\mathtt{Re}(z_1 + z_2) = \mathtt{Re}(z_1) + \mathtt{Re}(z_2) = a + x,$

  $\mathtt{Im}(z_1 + z_2) = \mathtt{Im}(z_1) + \mathtt{Im}(z_2) = b + y.$

- **Odejmowanie**: oblicz $z_3 - z_1$ jeżeli $z_1 = 2 + 3i$, $z_3 = i^5 - 6i^2$.

  Odejmowanie odbywa się na tej samej zasadzie co dodawanie — działamy na pogrupowanych częściach rzeczywistych i urojonych liczb zespolonych:

  $z_3 - z_1 \overset{(1)}{=} i^5 - 6i^2 - (2 + 3i) \overset{(2)}{=} i - 1 - 2 - 3i = -3 - 3i \overset{(3)}{=} -3(1 + i).$

  (1) Tutaj wymagany jest nawias albo od razu zmiana znaku.

  (2) Korzystając z własności $i^2 = -1$, obniżamy stopień potęgi: $i^5 = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = i$.

  (3) Jeżeli potrzebujemy postaci algebraicznej, zostawiamy jak jest, czyli $-3 - 3i$. Jeżeli będziemy używać tę liczbę zespoloną w innych obliczeniach, może bardziej nam się opłacać zapisać ją w innej postaci.

Dla odejmowania otrzymujemy wzór ogólny w postaci:

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (x + yi) = (a - x) + (b - y)i,$

$$\mathtt{Re}(z_1 - z_2) = \mathtt{Re}(z_1) - \mathtt{Re}(z_2) = a - x,$$

$$\mathtt{Im}(z_1 - z_2) = \mathtt{Im}(z_1) - \mathtt{Im}(z_2) = b - y.$$

- **Mnożenie**: oblicz $z_1 \cdot z_3$, jeżeli $z_1 = 2 + 3i$, $z_3 = i^5 - 6i^2$.

Mnożenie wykonujemy schematem jak dla wyrażeń w liczbach rzeczywistych — mnożymy każdy element przez każdy, pamiętając o tym, że $i^2 = -1$:

$z_1 \cdot z_3 = (2 + 3i) \cdot (i^5 - 6i^2) = (2 + 3i) \cdot (i - 1) = 2i - 2 + 3i^2 - 3i = -2 - 3 - i = -5 - i.$

Wzór ogólny dla mnożenia:

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i,$

$$\mathtt{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathtt{Re}(z_1) \cdot \mathtt{Re}(z_2) - \mathtt{Im}(z_1) \cdot \mathtt{Im}(z_2) = ax - by,$$

$$\mathtt{Im}(z_1 \cdot z_2) = \mathtt{Re}(z_1) \cdot \mathtt{Im}(z_2) + \mathtt{Im}(z_1) \cdot \mathtt{Re}(z_2) = ay + bx.$$

- **Dzielenie**: oblicz $\frac{z_1}{z_2}$ jeżeli $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - 8i$.

Dotarliśmy do dzielenia liczb zespolonych — działania, gdzie musimy zmienić nawyki wyniesione z działań na liczbach rzeczywistych. W tym miejscu przyda nam się pewna własność liczb zespolonych — mianowicie fakt, że liczba zespolona pomnożona przez jej sprzężenie daje liczbę rzeczywistą: $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + xyi - xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Aby podzielić dwie liczby zespolone, najpierw zapisujemy iloraz w postaci ułamka, a następnie mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{4-8i} \overset{(1)}{=} \frac{2+3i}{4(1-2i)} = \frac{2+3i}{4(1-2i)} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{4(1-2i)(1+2i)} \overset{(2)}{=} \frac{2+4i+3i+6i^2}{4\big(1^2-(2i)^2\big)} =$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{-4+7i}{4(1+4)} = \frac{7i-4}{20}.$$

(1) Wiemy, iż $\overline{4 - 8i} = 4 + 8i$, ale dla uproszczenia obliczeń zauważmy, że $4 - 8i = 4(1 - 2i)$. Zatem wystarczy nam sprzężenie liczby $1 - 2i$.

(2) W mianowniku mamy wzór skróconego mnożenia $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ gdzie $a = 1$, $b = 2i$.

(3) Korzystamy z własności $i^2 = -1$.

Teraz pokażemy ogólny wzór na dzielnie (dodatkowo część rzeczywista i urojona wyniku):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{x+yi} = \frac{ax+by}{x^2+y^2} + \frac{bx-ay}{x^2+y^2} i,$$

$$\mathtt{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\mathtt{Re}(z_1) \cdot \mathtt{Re}(z_2) + \mathtt{Im}(z_1) \cdot \mathtt{Im}(z_2)}{\big(\mathtt{Re}(z_2)\big)^2 + \big(\mathtt{Im}(z_2)\big)^2} = \frac{ax+by}{x^2+y^2},$$

$$\mathtt{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\mathtt{Im}(z_1) \cdot \mathtt{Re}(z_2) - \mathtt{Re}(z_1) \cdot \mathtt{Im}(z_2)}{\big(\mathtt{Re}(z_2)\big)^2 + \big(\mathtt{Im}(z_2)\big)^2} = \frac{bx-ay}{x^2+y^2}.$$

Co zrobić w przypadku, gdy mamy więcej niż dwie liczby zespolone? To samo tylko kilkukrotnie, pamiętając o kolejności wykonywania działań.

Zapiszmy w postaci algebraicznej liczbę $\frac{2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} - 2z_1(z_2 + z_3)$, gdzie $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = i - 2$, $z_3 = 3 + 4i$.

Zacznijmy od początku, najprościej będzie najpierw policzyć oba ułamki i wykonać działanie w nawiasie (cały czas pamiętamy, że $i^2 = -1$):

$$\frac{2}{z_1} = \frac{2}{1+3i} = \frac{2}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{2-6i}{1+9} = \frac{2-6i}{10} = \frac{1-3i}{5},$$

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{3+4i}{i-2} = \frac{3+4i}{i-2} \cdot \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-6-3i-8i-4i^2}{4+1} = \frac{-2-11i}{5},$$

$$2z_1(z_2+z_3) = 2(1+3i)(i-2+3+4i) = 2(1+3i)(1+5i) = 2(1+5i+3i+15i^2) = 2(-14+8i) = -28+16i.$$

Teraz możemy wrócić do całego działania:

$$\frac{2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} - 2z_1(z_2+z_3) = \frac{1-3i}{5} + \frac{-2-11i}{5} - (-28+16i) = \frac{-1-14i}{5} + 28 - 16i = \frac{139}{5} - \frac{94}{5}i.$$

3. Zadania ciekawsze

Podstawy za nami — przypomnieliśmy sobie, jak się dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby zespolone w postaci algebraicznej. Teraz czas zastanowić się, jak rozwiązać niektóre typy zadań z liczbami zespolonymi. Okazuje się, że nie jest to takie trudne, jak się wydaje... Zazwyczaj...

Przykład 1. Podaj część rzeczywistą, urojoną, moduł i sprzężenie liczby zespolonej

$$\frac{3}{8} + \frac{3i + \mathtt{Im}(2+3i) + 5\mathtt{Re}\left(\frac{1}{2-i}\right) i}{|\sqrt{2} - \sqrt{2}i| \cdot \overline{i-1}} + \frac{21}{8}i.$$

Ten przykład na pierwszy rzut oka to koszmar, ale czy na pewno? Zróbmy go krok po kroku, obliczając poszczególne elementy.

- $\mathtt{Im}(2+3i)$.

  Ten fragment jest bardzo łatwy. Jak widać $2 + 3i$ jest liczbą zespoloną w postaci algebraicznej, zatem jej częścią urojoną jest współczynnik przy i:

  $\mathtt{Im}(2+3i) = 3.$

- $\mathtt{Re}\left(\frac{1}{2-i}\right)$.

  Tutaj sytuacja jest troszkę bardziej skomplikowana. Najpierw musimy przekształcić $\frac{1}{2-i}$ do postaci algebraicznej (wykorzystując sprzężenie i wzór skróconego mnożenia):

  $$\frac{1}{2-i} = \frac{1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{1 \cdot (2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{2+i}{2^2 - i^2} = \frac{2+i}{4-(-1)} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

  Otrzymaliśmy postać algebraiczną, zatem możemy odczytać część rzeczywistą otrzymanej liczby zespolonej:

  $$\mathtt{Re}\left(\frac{1}{2-i}\right) = \mathtt{Re}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = \frac{2}{5}.$$

- $|\sqrt{2}-\sqrt{2}i|$.

  Do policzenia mamy moduł liczby zespolonej — pamiętamy, że jest to $|z| = \sqrt{\big(\mathtt{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathtt{Im}(z)\big)^2}$. Na szczęście mamy podaną postać algebraiczną, zatem:

  $$|\sqrt{2}-\sqrt{2}i| = \sqrt{\big(\sqrt{2}\big)^2 + \big(-\sqrt{2}\big)^2} = \sqrt{2+2} = 2.$$

- $\overline{i-1}$.

  Warto zwrócić uwagę, że kolejność części rzeczywistej i urojonej jest inna. Zatem:

  $$\overline{i-1} = \overline{-1+i} = -1-i = -(1+i).$$

Obliczyliśmy poszczególne fragmenty wyrażenia. Oznaczmy liczbę przez z i obliczmy ją wstawiając wyniki do wyrażenia, przy okazji upraszczając (wyłączając przed nawias):

$$z = \frac{3}{8} + \frac{3i + \mathtt{Im}(2+3i) + 5\mathtt{Re}\left(\frac{1}{2-i}\right)i}{|\sqrt{2}-\sqrt{2}i|\cdot\overline{i-1}} + \frac{21}{8}i = \frac{3}{8} + \frac{21i}{8} + \frac{3i+3+5\cdot\frac{2}{5}\cdot i}{2\cdot[-(1+i)]} = \frac{3+21i}{8} - \frac{3+8i}{2\cdot(1+i)}.$$

Dla ułatwienia osobno obliczmy drugi ułamek:

$$\frac{3+8i}{2\cdot(1+i)} = \frac{(3+8i)\cdot(1-i)}{2\cdot(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{3-3i+8i-8i^2}{4(1-i^2)} = \frac{11+5i}{8}.$$

Wróćmy do głównych obliczeń i przedstawmy z w postaci algebraicznej:

$$z = \frac{3+21i}{8}i - \frac{3+8i}{2\cdot(1+i)} = \frac{3+21i}{8} - \frac{11+5i}{8} = \frac{3+21i-11-5i}{8} = \frac{-8+16i}{8} = -1+2i.$$

Skoro otrzymaliśmy $z=-1+2i$, to:

- $\mathtt{Re}(z) = \mathtt{Re}(-1+2i) = -1$,
- $\mathtt{Im}(z) = \mathtt{Im}(-1+2i) = 2$,
- $|z| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$,
- $\overline{z} = \overline{-1+2i} = -1-2i$.

Przykład 2. Znajdź wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniających warunek $\dfrac{y^2}{1+i}+\dfrac{xi}{2-i} = 3-i$.

Zacznijmy rozwiązywanie od pozbycia się liczb zespolonych z mianowników. Jak zauważyliśmy, przy dzieleniu jest to mnożenie przez ułamek, który w liczniku i mianowniku ma sprzężenie liczby z mianownika:

$$\frac{y^2}{1+i} = \frac{y^2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{y^2(1-i)}{1-i^2} = \frac{y^2(1-i)}{2},$$

$$\frac{xi}{2-i} = \frac{xi\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{2xi+xi^2}{2^2-i^2} = \frac{x(2i-1)}{5}.$$

Wróćmy do naszego równania i dokonajmy przekształceń:

$$\frac{y^2}{1+i} + \frac{xi}{2-i} = 3-i,$$

$$\frac{y^2(1-i)}{2} + \frac{x(2i-1)}{5} = 3-i,$$

$$\frac{5\cdot y^2(1-i)}{10} + \frac{2\cdot x(2i-1)}{10} = 3-i,$$

$$5y^2(1-i) + 2x(2i-1) = 10(3-i),$$

$5y^2 - 5y^2i + 4xi - 2x = 30 - 10i,$

$(5y^2 - 2x) + (4x - 5y^2)i = 30 - 10i.$

Teraz po obu stronach równania mamy liczby zespolone w postaci algebraicznej. Wiemy, że dwie liczby zespolone są równe, jeżeli mają takie same części rzeczywiste i takie same części urojone. Zatem porównując części rzeczywiste i urojone po obu stronach równania, dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} 5y^2 - 2x = 30 \\ 4x - 5y^2 = -10. \end{cases}$$

Musimy go rozwiązać w liczbach rzeczywistych. Zastosujmy metodę przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} -2x + 5y^2 = 30 \\ 4x - 5y^2 = -10. \end{cases}$$

Dodajemy oba równania, otrzymując:

$2x = 20,$

$x = 10.$

Zatem:

$$\begin{cases} x = 10 \\ -2x + 5y^2 = 30, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y^2 = 10, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = \sqrt{10} \ \vee \ y = -\sqrt{10}. \end{cases}$$

Otrzymujemy odpowiedź: $(x, y) \in \{(10, \sqrt{10}), (10, -\sqrt{10})\}.$

Przykład 3. Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $|z|^2 - z^2 + (\overline{z})^2 = 9.$

Zacznijmy od przedstawienia szukanej liczby zespolonej w postaci algebraicznej $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$ Teraz podstawiamy tę postać do danego równania i zaczynamy przekształcanie:

$|z|^2 - z^2 + (\overline{z})^2 = 9,$

$\Big|x + iy\Big|^2 - \Big(x + iy\Big)^2 + \Big(\overline{x + iy}\Big)^2 = 9.$

Znów, dla przejrzystości obliczeń, część z nich wykonamy oddzielnie (zawsze upraszczając i w potędze większej niż 1, stosując własność $i^2 = -1$):

- $\Big|x + iy\Big|^2 = \Big(\sqrt{x^2 + y^2}\Big)^2 = x^2 + y^2,$
- $(x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$
- $\Big(\overline{x + iy}\Big)^2 = \Big(x - iy\Big)^2 = x^2 - 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$

Teraz możemy wrócić do naszego równania i rozpocząć upraszczanie:

$|x + iy|^2 - (x + iy)^2 + \Big(\overline{x + iy}\Big)^2 = 9,$

$x^2 + y^2 - (x^2 - y^2 + 2xyi) + x^2 - y^2 - 2xyi = 9,$

$x^2 + y^2 - 4xyi = 9.$

Zauważmy, że po obu stornach równania mamy liczby zespolone. Dla przejrzystości zmieńmy lekko zapis $(x^2+y^2)-4xy\cdot i=9+0\cdot i$.

Wiemy, że dwie liczby zespolone są równe, gdy mają te same części rzeczywiste i te same części urojone, więc otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ -4xy=0. \end{cases}$$

Rozwiążmy go pamiętając, że $x, y\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ xy=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x=0\vee y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=9 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2=9 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3\vee y=-3 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3\vee x=-3 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}.$$

Szukaliśmy liczb zespolonych postaci $z=x+iy, \quad x,y\in\mathbb{R}$. Otrzymaliśmy:

$z=0+3i \quad\vee\quad z=0-3i \quad\vee\quad z=3+0i \quad\vee\quad z=-3+0i.$

Równanie ma cztery rozwiązania: $3i$, $-3i$, 3, -3.

Odpowiedź: $z\in\{3,-3,3i,-3i\}$.

Przykład 4. Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $z\cdot\mathtt{Re}(z)+\mathtt{Im}(2+\overline{z})=z\cdot\overline{z}$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie zacznijmy od przedstawienia szukanej liczby zespolonej w postaci algebraicznej $z=x+yi, \quad x,y\in\mathbb{R}$. Teraz podstawiamy tę postać do danego równania i zaczynamy przekształcanie:

$z\cdot\mathtt{Re}(z)+\mathtt{Im}(2+\overline{z})=z\cdot\overline{z}$,

$(x+yi)\cdot\mathtt{Re}(x+yi)+\mathtt{Im}(2+\overline{(x+yi)})=(x+yi)\cdot\overline{(x+yi)}$,

$(x+yi)\cdot x+\mathtt{Im}(2+x-yi)=(x+yi)\cdot(x-yi)$.

Zauważmy, że dla wyrażenia $(x+yi)\cdot(x-yi)$ możemy zastosować wzór skróconego mnożenia $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, dla $a=x$, $b=yi$. Dzięki temu od razu otrzymujemy (ponieważ $i^2=-1$) uproszczone wyrażenie:

$x^2+xyi-y=x^2+y^2$,

$y^2+y-xyi=0$.

Porównujemy części rzeczywiste i urojone obu stron równości. W wyniku tego otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} y^2+y=0 \\ -xy=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(y+1) = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \vee y = -1 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = -1 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Pamiętamy, że szukaliśmy liczb zespolonych $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Otrzymaliśmy:

$z = t + 0i, \ t \in \mathbb{R}, \qquad \vee \qquad z = 0 - i.$

Ostatecznie:

$z \in \{t : t \in \mathbb{R}\} \cup \{-i\}.$

Przykład 5. Na płaszczyźnie Gaussa zaznacz zbiór liczb zespolonych
$\{z \in \mathbb{C} : \ \mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) > \mathtt{Re}(2 - z) \wedge 1 \leq |z - 1 - i| \leq 4\}.$

By rozwiązać tego typu zadanie, najpierw powinniśmy przeanalizować poszczególne jego fragmenty. W tym przypadku najpierw rozważymy $\mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) > \mathtt{Re}(2 - z)$, a następnie $1 \leq |z - 1 - i| \leq 4\}$.

- $\mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) > \mathtt{Re}(2 - z)$.

  Przedstawmy z w postaci algebraicznej: $z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Podobnie jak w poprzednich przykładach rozbijemy obliczenia na kilka etapów.

  - $z \cdot \overline{z} + 2i + z \overset{(1)}{=} (x + yi) \cdot \overline{(x + yi)} + 2i + (x + yi) = (x + yi) \cdot (x - yi) + x + (2 + y)i \overset{(2)}{=}$
    $= x^2 + y^2 + x + (2 + y)i = (x^2 + y^2 + y) + (2 + y)i.$

    (1) Wstawiamy z w postaci algebraicznej i, dla zwiększania widoczności, zastosujemy dodatkowe nawiasy.

    (2) Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia dla $(x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$. Cały czas pamiętamy, że $i^2 = -1$.
  - $\mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) = \mathtt{Im}\big[(x^2 + y^2 + y) + (2 + y)i\big] = 2 + y.$
  - $2 - z = 2 - (x + yi) = (2 - x) - yi.$
  - $\mathtt{Re}(2 - z) = \mathtt{Re}\big[(2 - x) - yi\big] = 2 - x.$

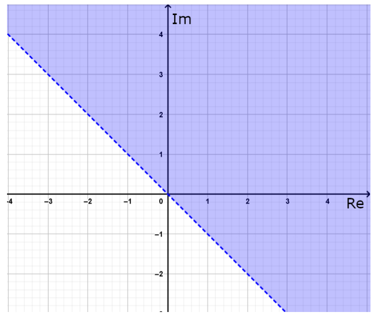
  Możemy teraz rozwiązać nierówność:

  $\mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) > \mathtt{Re}(2 - z)$

  $2 + y > 2 - x$

  $y > -x.$

  Ostatecznie pierwszy warunek do zaznaczenia na płaszczyźnie Gaussa ma postać $y > -x$. Pamiętamy, że $z = x + yi, \ x, y \in \mathbb{R}$, zatem x zaznaczamy na osi rzeczywistej Re, a y na osi urojonej Im.



Rysunek 1. Zbiór punktów na płaszczyźnie Gaussa przedstawiających liczby zespolone spełniające nierówność $\mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) > \mathtt{Re}(2 - z)$.

- $1 \leq |z - 1 - i| \leq 4$.

  Aby zaznaczać na płaszczyźnie Gaussa ten zbiór, ponownie skorzystamy z postaci algebraicznej liczby zespolonej $z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$.

  Najpierw obliczymy sam moduł:

  $|z - 1 - i| = |(x + yi) - 1 - i| = |(x - 1) + (y - 1)i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

  Postawiając do nierówności, otrzymujemy:

  $1 \leq |z - 1 - i| \leq 4$

  $1 \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leq 4$.

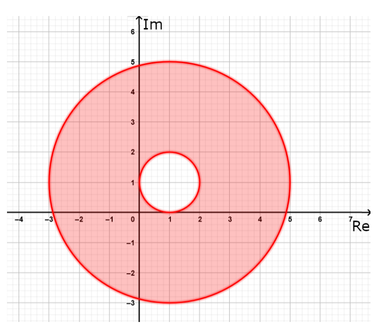
  Ponieważ wszystkie wyrażenia są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi, możemy przekształcić nierówność do postaci:

  $1^2 \leq (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4^2$.

  Zatem otrzymaliśmy nierówności wykorzystujące równanie okręgu: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie punkt (a, b) jest środkiem, a r promieniem okręgu.

  Przy okazji zauważmy, że otrzymaliśmy wzór na okrąg w liczbach zespolonych: $|z - z_0| = r$, gdzie liczba zespolona z_0 jest środkiem, a r promieniem okręgu zaznaczonego na płaszczyźnie Gaussa.

  Ostatecznie nasz zbiór to:

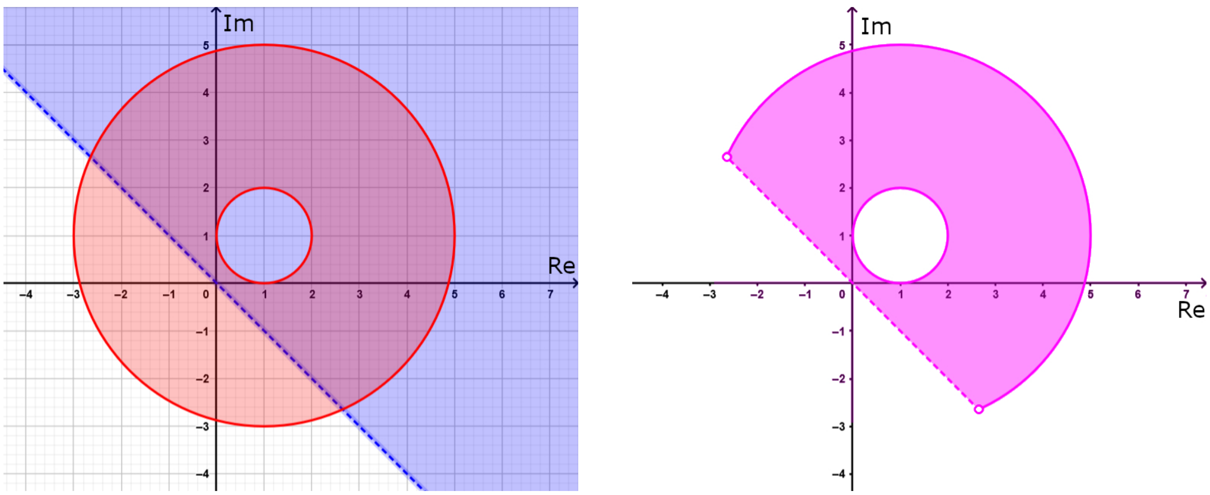


Rysunek 2. Zbiór punktów na płaszczyźnie Gaussa przedstawiających liczby zespolone spełniające nierówność $1 \leq |z - 1 - i| \leq 4$.

Ostatnim etapem jest zaznaczenie całego zbioru na płaszczyźnie Gaussa:

$\{z \in \mathbb{C}: \; \mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) > \mathtt{Re}(2 - z) \wedge 1 \leq |z - 1 - i| \leq 4\}$.

Naszym zbiorem jest:



Rysunek 3. Zbiór $\{z \in \mathbb{C}: \; \mathtt{Im}(z \cdot \overline{z} + 2i + z) > \mathtt{Re}(2 - z) \wedge 1 \leq |z - 1 - i| \leq 4\}$.

4. Zadania do samodzielnej pracy

Zadanie 1. Podaj część rzeczywistą, urojoną, moduł i sprzężenie liczby zespolonej z:

a) $z = i^4 - i^5 + 8i^3 - 5i^7 - 7i^2$,

b) $z = \dfrac{|4+3i|}{2i-1}$,

c) $z = \mathtt{Im}(28+6i) \cdot (3-4i)$,

d) $z = \dfrac{2-8i}{4i-2} - \dfrac{1+12i}{\mathtt{Im}(5i-9)}$,

e) $z = \dfrac{|4i^8 + 3i^3|}{2i+1}$,

f) $z = \dfrac{2 + \frac{5+3i}{i}}{4 + \frac{7i+5}{-i+2}} + \dfrac{2 \cdot [8i + \mathtt{Re}(7i-10)]}{|8-5i|^2}$.

Odpowiedź 1.

a) $\mathtt{Re}z = 8, \; \mathtt{Im}z = -4, \; |z| = 4\sqrt{5}, \; \overline{z} = 8 + 4i$,

b) $\mathtt{Re}z = -1, \; \mathtt{Im}z = -2, \; |z| = \sqrt{5}, \; \overline{z} = -1 + 2i$,

c) $\mathtt{Re}z = 18, \; \mathtt{Im}z = -24, \; |z| = 30, \; \overline{z} = 18 + 24i$,

d) $\mathtt{Re}z = -2, \; \mathtt{Im}z = -2, \; |z| = 2\sqrt{2}, \; \overline{z} = -2 + 2i$,

e) $\mathtt{Re}z = 5, \; \mathtt{Im}z = -5, \; |z| = 5\sqrt{2}, \; \overline{z} = 5 + 5i$,

f) $\mathtt{Re}z = 0, \; \mathtt{Im}z = -1, \; |z| = 1, \; \overline{z} = i$.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych spełniających równanie:

a) $\dfrac{x}{3-i} + 5y = 8$,

b) $|4-3i| \cdot (x + iy) = \dfrac{5}{2-i}$,

c) $(4+3i)y - \dfrac{3x}{i-1} = \dfrac{1}{i}$.

Odpowiedź 2.

a) $(x, y) = (0, \frac{8}{5})$,

b) $(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$,

c) $(x, y) = (-\frac{8}{3}, 1)$.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie:

a) $|z| + z^2 = 1$, **b)** $z - \overline{z} = 8i$, **c)** $\mathtt{Im}(z) + 3z = \mathtt{Re}(z) \cdot \mathtt{Im}(2 + \overline{z})$.

Odpowiedź 3.

a) $z \in \left\{ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}$, **b)** $z \in \{t + 4i : t \in \mathbb{R}\}$, **c)** $z \in \{0\}$.

Zadanie 4. Na płaszczyźnie Gaussa zaznacz zbiory liczb zespolonych

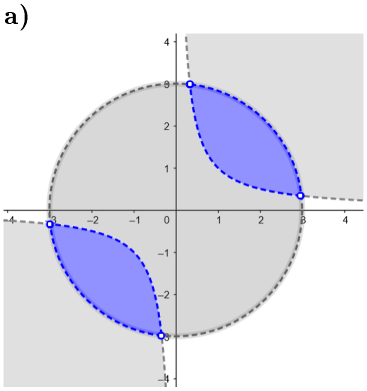
a) $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathtt{Re}z \cdot \mathtt{Im}z > 1 \wedge |z| < 3\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathtt{Re}(2z + 8i \cdot \overline{z}) > 2 \wedge |z - 3 + i| \geq 1\}$,

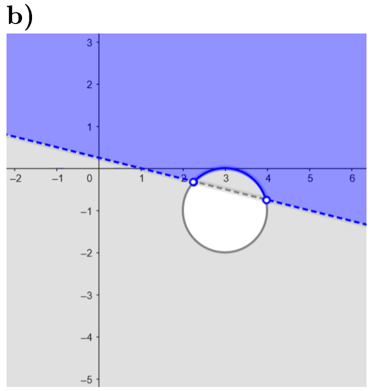
c) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 3| \geq 2 \wedge |z - \frac{3}{2} + i| < 1 \wedge \mathtt{Re}(z - 1) > \mathtt{Im}(2 - \overline{z})\}$.

Odpowiedź 4. Dla ułatwienia przedstawione są wszystkie zbiory, odpowiedzią jest część wspólna.

a)



b)



c)