

# Przyczynek do analizy nieliniowo sprężystej dźwigarów zespolonych stalowo-betonowych

Dr hab. inż. Józef Wranik, Uniwersytet Zielonogórski

## 1. Wprowadzenie

Wraz z wprowadzeniem nowych generacji norm w budownictwie żelbetonowym dopuszczono nieliniowe metody analizy konstrukcji. Brak jednak konkretnych koncepcji i strategii dla wyznaczania zbrojenia metodami nieliniowymi [11]. Według [15, 16] analiza nieliniowa jest dopuszczalna przy zachowaniu warunków zespolenia oraz ewentualnego uwzględnienia teorii II rzędu. Z kolei [13, 14] informuje, że analiza nieliniowa jest dopuszczalna. Nie podaje się żadnych reguł praktycznych.

Według [1] metody analizy nieliniowej dla konstrukcji betonowych mogą być stosowane pod warunkiem, że jest zachowana równowaga, warunki zgodności oraz założone jest odpowiednie nieliniowe zachowanie się materiałów. To powinno się przyjąć jako oczywiste również dla konstrukcji zespolonych. W pracy [12] przedstawiono zarys analizy nieliniowej dla konstrukcji żelbetonowych i odpowiednie przykłady liczbowe.

Analiza nieliniowa dźwigarów betonowych i zespolonych zawiera zdeterminowane niepewności i rozrzuty parametrów wejściowych modelu obliczeniowego. Są to oddziaływania, własności materiałowe, specyfika produkcji oraz warunki posadowienia. Przy braku badań laboratoryjnych można więc mówić tylko o rozpatrywaniu zadania w kontekstach pojedynczych przykładów, jakościowym oraz miary inżynierskiej. Eurokody nie dają wsparcia w sprawie dokładności obliczeń [3, 9, 11].

Podstawowym utrudnieniem dla zagadnienia nieliniowego jest niemożliwość skorzystania z zasady superpozycji. Dlatego dla każdej kombinacji oddziaływań musi się przeprowadzić niezależną analizę nieliniową. Dodatkowym utrudnieniem jest niedziałająca zasada wzajemności przemieszczeń.

Wpływ fizycznej nieliniowości betonu ściskanego na zależność moment/krzywizna ( $M-\kappa$ ) przekroju zespolonego – mimo stosunkowo silnej nieliniowości betonu – jest niewielki. Analizę tego wpływu przeprowadzono dla załączonego tu przykładu; nie zamieszczono jej w opracowaniu. W obszarach z płytą betonową ściskaną przyjęto liniowo sprężyste zależności konstytutywne przekroju zespolonego. Norma [15] proponuje rozwiązanie statycznie niewyznaczalnych belek zespolonych w dwóch krokach. W pierwszym kroku oblicza się siły przekrojowe przy kombinacji charakterystycznej oddziaływań, przyjmując sztywności przekrojów niezarysowanych wg fazy I, czyli  $E_a I_a$ . W obszarach, w których siły te powodują rozciąganie płyty betonowej o wartościach przekraczających  $2f_{ctm}$ ,

przyjmuje się sztywność zginania  $E_a I_a$ , czyli dla czystej fazy II rozciągania pręta żelbetonowego bez uwzględnienia współpracy betonu. W drugim kroku uwzględnia się sztywności w określonych obszarach znajdujących się w fazie II. Przykłady można znaleźć w opracowaniach [7, 9].

W niniejszej pracy rozpatruje się wpływ fizycznej nieliniowości betonu w zakresie sprężystym na wartości sił przekrojowych w statycznie niewyznaczalnych dźwigarach zespolonych. Przyjmuje się przy tym liniowy zakres sprężystości stali konstrukcyjnej i zbrojeniowej. Wszystkie zależności i określenia odnoszą się do zginanych dźwigarów zespolonych z elementem stalowym o przekrojach klasy 1, 2 z pełnym zespoleniem.

## 2. Podstawy opracowania

Według [15] analiza nieliniowa może być stosowana w połączeniu z [17 p. 5.7] i [19 p. 5.4.3.].

W normie [16] zawarta jest informacja dotycząca słupów zespolonych, według której wartość obliczeniową nośności  $R_d$  określa się równaniem (1):

$$R_d = R(f_{yR}; f_{cR}; f_{sR}; P_{Rm})/\gamma_R \quad (1)$$

gdzie:  $f_{cR} = f_{ck}$  dla betonu do klasy C50/60 i  $f_{sR}$  dla stali zbrojeniowej są średnimi wartościami obliczeniowymi wytrzymałości materiału. Dla stali konstrukcyjnej można przyjąć  $f_{yR} = f_{yk}$ . Częściowy współczynnik bezpieczeństwa  $\gamma_R$  musi być przy tym wyznaczony z zależności (2):

$$\gamma_R = R_{pl,d}/R_{pl,m} \quad (2)$$

W sprawie analizy nieliniowej dźwigarów zespolonych nie podano żadnych wskazówek.

W opracowaniach [3, 10, 18], podano wartość obliczeniową nośności  $R_d$  dla konstrukcji betonowych, w postaci (3):

$$R_d = R(f_{yR}; f_{cR}; f_{pR})/\gamma_R \quad (3)$$

przyjmując średnie wartości własności materiałowych odpowiednio stali zbrojeniowej i betonu  $f_{yR} = 1,1 f_{yk}$ ;  $f_{cR} = 0,85 \alpha f_{ck}$  i globalny współczynnik bezpieczeństwa dla nośności systemu  $\gamma_R = 1,3$ . Współczynnik  $\gamma_R$  jest tak dobrany, aby odpowiadał wszystkim zastosowanym w konstrukcji materiałom i aby

zachodziła kompatybilność między wyznaczonymi w postępowaniu iteracyjnym siłami przekrojowymi a wymiarowaniem. W opracowaniu [1] proponuje się w metodzie globalnej nośności z globalnym współczynnikiem nośności przyjmować obliczeniową nośność w postaci (4):

$$R_d = r(f_{m,r}) / \gamma_R \gamma_{Rd} \quad (4)$$

gdzie: funkcja  $r(f_{m,r})$  reprezentuje analizę nieliniową ze średnimi wartościami materiałowymi: dla stali zbrojeniowej średnia granica plastyczności  $f_{ym} = 1,1 f_{yk}$  dla betonu parametr wytrzymałości  $f_{ct} = 1,1 \alpha_c f_{ctk} \gamma_s / \gamma_c$  zredukowany w celu uwzględnienia większej losowej zmienności betonu. Częściowy współczynnik nośności powinien według tej pre-normy wynosić  $\gamma_R = 1,2$ . Jednak łącznie ze współczynnikami niepewności modelu np.  $\gamma_{Rd} = 1,06$ , otrzymuje się  $\gamma_R \gamma_{Rd} = 1,272$ .

Koncepcja iteracji nośności [11] wychodzi z założenia sprawdzenia nośności na poziomie systemu. Zgodnie z równaniami (5) musi być zachowany odstęp globalny  $\gamma_R$  oddziaływań  $S_d$  w stosunku do nośności systemu  $R_d$ , co oznacza, że nośność systemu musi być większa aniżeli wymagane globalne bezpieczeństwo.

Problemem jest tu przyjęcie ustalonego stałego globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $\gamma_R$ , ponieważ materiały mają różne częściowe współczynniki materiałowe. Można więc określić bezpieczeństwo przekroju następująco: z jednej strony możliwe do przeniesienia przez przekrój siły są wyznaczone na podstawie średnich wartości materiałowych  $f_{cr}$ ,  $f_{yk}$ ,  $f_{ar}$  z drugiej na podstawie obliczeniowych wartości materiałowych  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$ ,  $f_{ad}$ . Stosunek obu tych wartości daje globalny współczynnik bezpieczeństwa  $\gamma_R$ , oznaczający rezerwę, jaką przekrój jeszcze ma po osiągnięciu wartości sił przekrojowych. Czyli dla przyjętych wartości obliczeniowych parametrów materiałowych stosunek  $M_u(f_{cr}, f_{yk}) / M_d(f_{cd}, f_{yd})$  w zależności od stopnia zbrojenia ma być albo jest w przybliżeniu stały.

W niniejszej pracy ze względu na stal konstrukcyjną ze współczynnikiem materiałowym  $\gamma_m = 1,0$ , przyjęto  $\gamma_R = 1,3$ . W tej sytuacji otrzymuje się następujące średnie wartości materiałowe odpowiednio stali zbrojeniowej, betonu i stali konstrukcyjnej:

$$f_{sr} = 1,1 f_{sk}; f_{cr} = 0,85 \alpha_c f_{ctk}; f_{yk} = 1,3 f_{yk}$$

Oddziaływania, na podstawie których oblicza się siły przekrojowe, są oddziaływaniami obliczeniowymi dla stanu granicznego nośności. Równanie nośności systemu przyjmuje postać (5a):

$$R_d(S_d) \leq R(f_{sr}; f_{cr}; f_{yk}) / \gamma_R \quad (5a)$$

przy czym siły przekrojowe  $S_d$  spełniają nierówność (5b):

$$S_d(\sum G_k \gamma_G + Q_{k1} \gamma_{Q1} + \sum Q_{ki} \gamma_{Qi} \psi_{0i}) \leq R(f_{sr}; f_{cr}; f_{yk}) \quad (5b)$$

i obrazują równowagę statyczną w zakresie nieliniowo sprężystym między oddziaływaniami obliczeniowymi a średnimi wartościami materiałowymi, które tu są ok. 1,3 razy większe od wartości obliczeniowych dla wymiarowania. Obliczone siły przekrojowe po zakończeniu iteracji muszą spełniać równanie (5b).

Istotną niedogodnością są znaczne różnice granic plastyczności obu stali: konstrukcyjnej i zbrojeniowej. Stal konstrukcyjna wykazuje znacznie mniejszą granicę plastyczności niż stal zbrojeniowa – a jednocześnie odkształcenia stali zbrojeniowej są na ogół mniejsze niż odkształcenia w skrajnych włóknach ściskanej stali konstrukcyjnej. Nie jest zatem możliwe pełne wykorzystanie współpracy betonu i stali zbrojeniowej. Wyjątkiem byłaby tu stal konstrukcyjna S420.

Przyjęte w dalszym ciągu powyższe średnie wartości materiału będą podstawą do sformułowania związków nieliniowych dźwigarów zespolonych o przekrojach stalowych klas 1 i 2. Dla klas wyższych należy prawdopodobnie sformułować nowe średnie wartości materiałowe.

### 3. Fizycznie nieliniowe równania metody sił – belka statycznie niewyznaczalna

Fizycznie nieliniowe równania metody sił dla belki zginanej bez uwzględnienia wpływu sił poprzecznych na odkształcenia i przy uwzględnieniu wyłącznie oddziaływań bezpośrednich można, na potrzeby tego artykułu, przedstawić w ogólnej postaci całkowitej według (6):

$$\sum_i \int_x M_i(x) \kappa [M_{Ed}(x)] dx = 0; \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (6)$$

gdzie:

$$M_{Ed}(x) = M_0(x) + M_1(x) X_1 + \dots \quad (7)$$

$X_i$  – niewiadome nadliczbowe,  $M_i(x)$  – momenty zginające od  $X_i = 1$ ,  $M_0(x)$  – momenty zginające od oddziaływań. Problemem zasadniczym jest tu wyznaczenie krzywizny  $\kappa$ , która jest funkcją poszukiwanej nieznannej funkcji momentów zginających  $M(x)$  i nieliniowości fizycznej materiału.

Przy przyjętej w pracy biliniowej postaci zależności  $M$ - $\kappa$  beziteracyjne rozwiązanie matematyczne tego zadania jest możliwe dla ustalonego zbrojenia i przy z góry ustalonym miejscu występowania momentu rysującego, które w końcowym rozwiązaniu będzie się nieco różniło od przyjętego. W przypadku projektowania zbrojenia konieczna jest iteracja, ze względu na dostosowanie zbrojenia do każdego kroku iteracyjnego. Rozwiązanie spełnia warunki: równowagi, brzegowe i nierozdzielności.

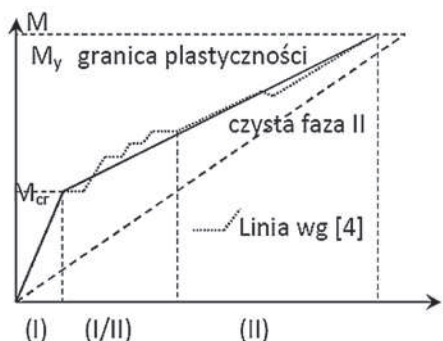
### 4. Wyznaczenie współczynników podatności metody sił

#### 4.1. Zależności moment zginający-krzywizna dla obszarów z płytą żelbetową w strefie rozciąganej

Uproszczoną krzywizną  $\kappa$  w postaci biliniowej pokazano na rysunkach 1 i 4.

##### 4.1.1. Zależność naprężenie-odkształcenie rozciąganego pręta żelbetowego

Uproszczony, powszechnie stosowany w literaturze, np. [5], biliniowy wykres funkcji  $\sigma_s(\epsilon_s)$  rozciąganego pręta żelbetowego przedstawiono na rysunku 2. Wyróżnia się tu 3 zakresy:



(I)-faza I płyta niezarysowana sprężysta  
(I/II) faza rozwoju rys do ok. 1,3 M<sub>cr</sub>  
(II) faza zakończonego obrazu zarysowań

**Rys. 1.** Podstawa przyjęcia biliniowego związku M-κ [4]

- faza I ( $0 < \sigma_s < \sigma_{sr}$ ):  $\epsilon_{sm} = \epsilon_{sI}$  – zakres liniowy
- faza kształtującego się zarysowania ( $\sigma_{sr} < \sigma_s < 1,3\sigma_{sr}$ ):

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{sII} - \frac{\beta_t(\sigma_s - \sigma_{sr}) + (1,3\sigma_{sr} - \sigma_s)}{0,3\sigma_{sr}} \Delta\epsilon_{sr} \quad (8)$$

- faza II zakończonego zarysowania ( $1,3\sigma_{sr} < \sigma_s < f_y$ ):

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} - \beta_t \Delta\epsilon_{sr}; \Delta\epsilon_{sr} = \epsilon_{sr,II} - \epsilon_{sr,I} \quad (9)$$

gdzie:  $\epsilon_{sm}$  = średnie odkształcenie z uwzględnieniem usztywniającego wpływu betonu między rysami (TST) tension-stiffening;  $\epsilon_{sI}$ ,  $\epsilon_{sII}$  = odkształcenie odpowiednio w fazie I, fazie II;  $\epsilon_{sr,I} = \sigma_{sr}/E_s$  – odkształcenie stali w fazie I tuż po osiągnięciu w betonie naprężeń  $f_{ctm}$ ;  $\epsilon_{sr,II} = \sigma_{sr}/E_s$  – odkształcenie stali w czystej fazie II;  $\beta_t$  = współczynnik uwzględniający długotrwałość obciążenia: 0,4 dla krótkotrwałych obciążeń, 0,25 dla długotrwałych obciążeń;  $\sigma_s$  = naprężenie w stali w przekroju przez rysy.

#### 4.1.2. Związki konstytutywne przekroju zespolonego w fazie I

$$\kappa_{I,II} = \frac{f_{ct,m}}{E_{cm}z_I} \quad (10a)$$

$$M_{I,II} = \kappa_{I,II} E_{cm} I_{c,II}; M(x) = \kappa_I(x) E_{cm} I_{c,II} \quad (10b)$$

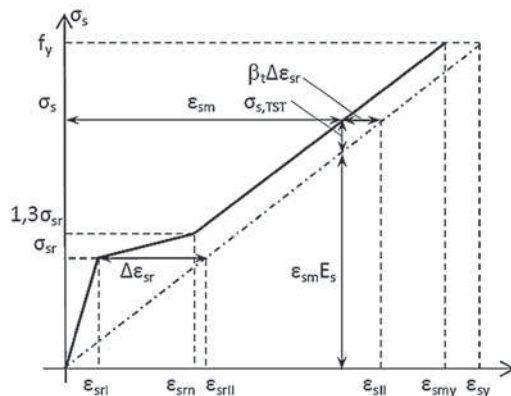
$$\epsilon_{sr,I,j} = \kappa_{I,II} (z_I - z_{s,j}); j = 1,2 \quad (10c)$$

gdzie:  $M_{I,II}$  jest wartością momentu powodującego pierwszą rysę,  $z_I$  wyznacza położenie osi obojętnej przekroju sprowadzonego w fazie I,  $I_{c,II}$  jest momentem bezwładności przekroju zespolonego sprowadzonego do betonu w fazie I,  $\kappa_{I,II}$  jest krzywizną dźwigara odpowiadającą momentowi  $M_{I,II}$ .

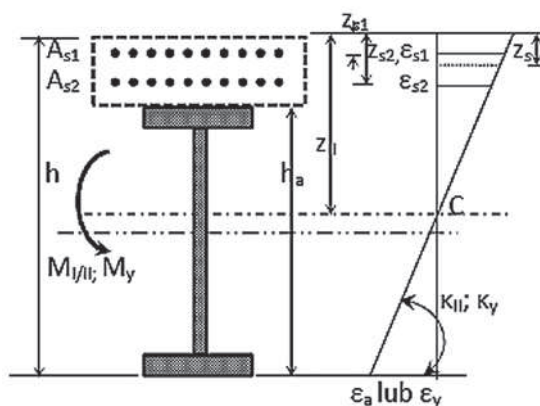
#### 4.1.3. Związki konstytutywne w przekroju zespolonym w czystej fazie II tuż po przekroczeniu wartości momentu rysującego $M_{I,II}$ według rysunku 2 i 3

$$\kappa_{II} = \frac{M_{cr}}{E_a I_{a,II}} \quad (11a)$$

$$\epsilon_{s,II,j} = \kappa_{II} (z_{II} - z_{s,j}); j = 1,2 \quad (11b)$$



**Rys. 2.** Zależność  $\sigma$ - $\epsilon$  żelbetowego pręta rozciąganego



**Rys. 3.** Przekrój zespolony dla granicy plastyczności stali konstrukcyjnej lub zbrojeniowej ze średnimi wartościami materiałowymi dla czystej fazy II, czyli bez uwzględnienia TST

$$\epsilon_{a,II} = \kappa_{II} (h - z_{II}) \quad (11c)$$

$z_{II}$  – położenie osi obojętnej przekroju sprowadzonego w czystej fazie II,  $I_{a,II}$  – moment bezwładności przekroju zespolonego dla czystej fazy II sprowadzonego do stali konstrukcyjnej,  $\epsilon_{a,II}$  – odkształcenie stali konstrukcyjnej,  $\epsilon_{sr,II,j}$  – odkształcenia stali zbrojeniowej w strefie rozciąganej.

#### 4.1.4. Związki konstytutywne przekroju zespolonego w czystej fazie II odpowiadające granicy plastyczności stali konstrukcyjnej lub stali zbrojeniowej według rysunku 3

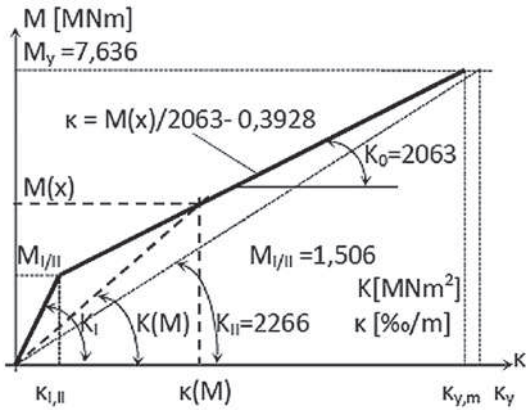
Krzywizna dla granicy plastyczności stali konstrukcyjnej:

$$\kappa_y = f_{yR}/E_a (h - z_{II}) = 1,3f_{yR}/E_a (h - z_{II}) \quad (12a)$$

Krzywizna dla granicy plastyczności stali zbrojeniowej:

$$\kappa_{s,j} = f_{sR}/E_s (z_{II} - z_{s,j}) = 1,1f_{sR}/E_s (z_{II} - z_{s,j}) \quad (12b)$$

Moment  $M_y$  (rys. 4) odpowiadający granicy plastyczności dla czystej fazy II po osiągnięciu średniej granicy plastyczności stali można wyznaczyć wg wzoru (13):



**Rys. 4.** Biliniowa zależność moment-krzywizna dla przekroju zginanego belki zespolonej; dane dla przykładu

$$M_y = \{ \kappa_y E_a I_{a,i,II} ; \kappa_s E_s I_{a,i,II} \} \min \quad (13)$$

4.1.5. Wyznaczenie zależności  $M(x) - \kappa$  dla fazy II  
 Odształcenie górnej warstwy stali zbrojeniowej dla  $\kappa = \kappa_y$  lub  $\kappa_s$ :

$$\varepsilon_{s,j} = \kappa (z_{II} - z_{s,j}); \quad \varepsilon_s = \kappa (z_{II} - z_s) \quad (14)$$

Odształcenie średnie z uwzględnieniem współpracy betonu między rysami odpowiadające  $\sigma_s$ :

$$\varepsilon_{sm,j} = \varepsilon_{sII,j} - \beta_t \Delta \varepsilon_s \quad (15)$$

Krzywizna średnia z uwzględnieniem współpracy betonu między rysami wynosi:

$$\kappa_{y,m} = (\varepsilon_{sm} + \varepsilon_y) / (h - z_s) \quad (16)$$

Punkty określone przez parę  $\{M_y; \kappa_{ym}\}$  i parę  $\{M_{II}; \kappa_{II}\}$  wyznaczają biliniową uproszczoną postać krzywej zależności  $M-\kappa$  (rys. 4).

$$\kappa = M(x) / (K_0) - \kappa_0 \quad (17)$$

$$K_0 = (M_y - M_{I/II}) / (\kappa_{ym} - \kappa_{I/II})$$

$$\kappa_0 = (M_{I/II} \cdot \kappa_{ym} - M_y \cdot \kappa_{I/II}) / (M_y - M_{I/II})$$

## 5. Przykład: dwuprzęsłowy dźwigar zespolony stalowo-betonowy

5.1. Schemat statyczny dźwigara, przekrój i materiały  
 Przekrój dźwigara (rys. 6): płyta żelbetowa  $h_f = 0,30$  m;  $b_{eff} = 3,0$  m;  $A_c = 0,9$  m<sup>2</sup>;  
 Beton: C35/45;  $f_{cm} = 43$  MPa;  $E_{cm} = 34$  GPa;  
 $f_{cR} = 0,85 \times 0,85 \times 35 = 25,29$  MPa;

$f_{cd} = 0,85 \times 35 / 1,5 = 19,83$  MPa;  
 $\varepsilon_{c1} = 2,25\%$ ;  $f_{ctm} = 3,2$  MPa;  
 Profil stalowy HE1000 B;  $A_a = 400$  cm<sup>2</sup>;  $I_a = 644700$  cm<sup>4</sup>;  
 Stal konstrukcyjna: S355J2G3,  $t_s = 40$  mm;



**Rys. 5.** Schemat statyczny dźwigara

$f_{yk} = 355$  MPa;  $f_{yd} = 355$  MPa;  $f_{yR} = 1,3 f_{yk} = 462$  MPa;  $\varepsilon_{y,a} = 2,2\%$ ;  
 Stal zbrojeniowa klasa B:  $f_{sk} = 500$  MPa;  $f_{sd} = 435$  MPa;  
 $f_{sR} = 1,1 \times 500 = 550$  MPa;  $\varepsilon_{y,s} = 2,75\%$ .

### 5.2. Oddziaływania

Oddziaływania stałe charakterystyczne:

$$g_k = 25 \text{ kN/m};$$

Oddziaływania zmienne charakterystyczne:

$$p_k = 8,0 \times 3,0 = 24 \text{ kN/m}$$

Oddziaływania obliczeniowe:

$$Q_d = 25 \times 1,35 + 24 \times 1,5 = 69,75 \text{ kN/m}.$$

### 5.3. Krok początkowy w iteracji; materiał liniowy

Krok początkowy przy stałej sztywności belki:

$$\delta_0 X_0 + \delta_{p0} = 0 \text{ daje } X_0 = -7,847 \text{ MNm}.$$

Obliczeniowy moment przęsłowy:

$$M_{Ed} = 0,0703 \times 69,75 \times 30^2 = 4414 \text{ kNm}.$$

Obliczeniowy moment podporowy:

$$M_{Ed} = 69,75 \times 30^2 / 8 = -7847 \text{ kNm}.$$

Obliczeniowa siła poprzeczna przy podporze środkowej:

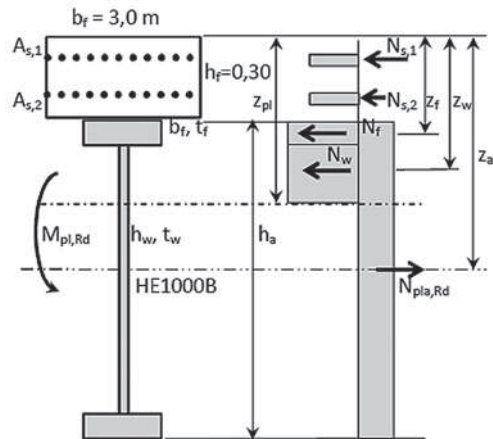
$$V_{Ed} = 1308 \text{ kN}.$$

Minimalne pole przekroju zbrojenia płyty: przypadek – rozciąganie centryczne od ciepła hydratacji; otulina  $c = 4,5$  cm; rozwarstwo rysy  $w_k = 0,2$  mm; według [14]:  $A_s = 2 \times 9 \times 1,05 \times 3,0 = 56,7$  cm<sup>2</sup>; zbrojenie to jest poprowadzone na całej długości belki w dwu warstwach po połowie.

Wykonano dwa kroki w iteracji. Wyniki drugiego kroku przedstawione są w nawiasach kwadratowych obok wyniku pierwszego kroku.

#### 5.3.1. Nośność graniczna przekroju nad podporą – zbrojenie

Rozwiązanie dotyczy przypadku niestopniowanego ułożenia zbrojenia w obszarze podpory pośredniej:



**Rys. 6.** Nośność graniczna dźwigara zespolonego

$z_a = 0,8$  m;  $z_{s1} = 0,05$  m;  $z_{s2} = 0,25$  m;  $h_f = 0,30$  m;  $h_a = 1,0$  m;

Dla przekroju klasy 1 i 2 i osi plastycznej w środku profilu stalowego równanie położenia osi wg równania (18):

$$f_{yd} t_w z_{pl}^2 - 2 f_{yd} t_w z_{s,1} z_{pl} - N_{pl,a,Rd} (z_a - z_{s,1}) + - f_{yd} t_w (h_f + t_f) [(h_f + t_f) - f_{yd} t_w (h_f + t_f) [h_f + t_f - 2 z_{s,1}] + N_f [(h_f + 0,5 t_f - z_{s,1})] + N_{s,2} (z_{s,2} - z_{s,1}) + M_{Ed} = 0 \quad (18)$$

Po podstawieniu danych otrzymuje się:

$$z_{pl}^2 - 0,1 z_{pl} + \frac{M_{Ed} - 8,88323}{6,745} = 0 \quad (19)$$

Dla  $M_{Ed} = 7,847$  MNm,  $z_{pl} = 0,44513$ , [0,6485]. Siła rozciągająca w zbrojeniu pierwszej warstwy wg (20):

$$N_{s,1} = 2 f_{yd} t_w (h_f + t_f) + N_{pl,a,Rd} - N_f - 2 f_{yd} t_w z_{pl} - N_{s,2}; \quad (20)$$

$N_{s1} = 3,82684$  MN [1,0832]  $A_{s1} = 3,82684/435 = 88$  cm<sup>2</sup> [24,9 <  $A_{smin} = 28,35$ ; zbrojenie końcowe górą i dołem  $\Phi$  16/7 cm (28,57)].

### 5.4. Krok 1

#### 5.4.1. Zależność $M-\kappa$ w fazie I

Przekrój niezarysowany. Położenie środka ciężkości przekroju podporowego od górnej krawędzi:

$$z_I = \frac{0,5 h_f + n_a \rho_a (0,5 h_a + h_f) + n_s \sum_i \rho_{s,i} z_{s,i}}{(1 + n_a \rho_a + n_s \sum_i \rho_{s,i})}$$

$$\rho_a = A_a / A_c = 0,0444; \quad \rho_{s,1} = \frac{A_{s,1}}{A_c} = 0,009778$$

$$\rho_{s,2} = A_{s,2} / A_c = 0,00315; \quad n_a = E_a / E_{cm} = 6,176$$

$$n_s = E_s / E_{cm} = 5,882; \quad z_I = 0,27912$$

Moment bezwładności przekroju sprowadzonego do betonu:

$$I_{ic} = I_{c,c} + \sum_i n_s I_{s,c} + n_a I_{a,c} = 0,13134 \text{ m}^4$$

$$I_{c,c} = I_c + A_c (z_I - 0,5 h_f)^2$$

$$n_a I_{a,c} = n_a \left[ I_a + A_a \left( \frac{1}{2} h_a + h_f - z_I \right)^2 \right]$$

$$\sum_i n_s I_{s,c} = n_s \left[ A_{s,1} (z_I - z_{s,1})^2 + A_{s,2} (z_I - z_{s,2})^2 \right]$$

Moment rysujący:

$$M_{III} = I_{ic} f_{ctm} / z_I = 0,13134 \times 3,2 / 0,27912 = 1,506 \text{ MNm}, [1,432]$$

Krzywizna:

$$\kappa_{III} = f_{ctm} / z F_{cm} = 3,2 / 0,27912 \times 3,4 \times 10^3 = 0,3372\text{‰}, [0,3253]$$

Równanie krzywizny dla fazy I:

$$\kappa_I(x) = M_{Ed}(x) / E_{cm} I_{ci} = M_{Ed}(x) / 4465 [M_{Ed}(x) / 4403]$$

Odkształcenie zbrojenia górnego tuż przed zarysowaniem wg (10c):  $\varepsilon_{sr,I} = 3,2 (0,27912 - 0,05) / 3,4 \times 10^3 \times 0,27912 = 0,07726\text{‰}, [0,06874]$

5.4.2. Zależności przekroju zespolonego w czystej fazie II tuż po przekroczeniu wartości momentu rysującego  $M_I, II$ , według rysunku 2

Położenie osi obojętnej:

$$z_{II} = \frac{z_a + n_{sa} \sum_j \rho_{sa,j} z_{s,j}}{1 + n_{sa} \sum_j \rho_{sa,j}} = 0,6479 \text{ m} [0,7222]$$

gdzie:

$$\rho_{sa,1} = \frac{A_{s,1}}{A_a} = 0,22; \quad \rho_{sa,2} = \frac{A_{s,2}}{A_a} = 0,0709$$

$$n_{sa} = \frac{E_s}{E_a} = 0,952;$$

Moment bezwładności przekroju w czystej fazie II sprowadzony do stali konstrukcyjnej:

$$I_{a,i,II} = \sum_j n_{sa} A_{s,j} (z_{II} - z_{s,j})^2 + I_a + A_a \left( \frac{1}{2} h_a + h_f - z_{II} \right)^2 = 0,01079 \text{ m}^4, [8,5241 \times 10^{-3}]$$

$$E_a I_{a,i,II} = 2266 \text{ MNm}^2, [1790]$$

Krzywizna tuż po przekroczeniu momentu rysującego:

$$\kappa_{II} = M_{III} / E_a I_{a,i,II} = 1,506 / 2266 = 6,646 \times 10^{-4} 1/m, [8 \times 10^{-4}]$$

Odkształcenie zbrojenia tuż po zarysowaniu:

$$\varepsilon_{sr,II} = \kappa_{II} (z_{II} - z_{s,1}) = 0,39736\text{‰}, [0,5154]$$

5.4.3. Zależności przekroju zespolonego w czystej fazie II dla granicy plastyczności profilu stalowego

Krzywizna  $\kappa_y$  wg (12a):

$$\kappa_y = 1,3 \times 355 / 2,1 \times 10^5 (1,3 - 0,6479) = 3,37\text{‰}/m, [3,803].$$

Moment  $M_y$  po osiągnięciu średniej granicy plastyczności stali konstrukcyjnej wg (13)

$$M_y = 3,37 \times 10^{-3} 2,1 \times 10^5 \times 0,01079 = 7636 \text{ kNm}, [6807]$$

Krzywizna  $\kappa_s$  wg (12b):

$$\kappa_s = 1,1 \times 500 / 2,1 \times 10^5 (0,6479 - 0,05) = 4,38\text{‰}/m$$

Moment  $M_y$  po osiągnięciu średniej granicy plastyczności stali zbrojeniowej wg (13):

$$M_y = 4,38 \times 10^{-3} 2,0 \times 10^5 \times 0,01079 = 9452 \text{ kN}$$

Miarodajny jest moment  $M_y = 7636$  kNm.

Odkształcenie zbrojenia  $A_{s1}$  po osiągnięciu przez stal konstrukcyjną granicy plastyczności wg (11b):

$$\varepsilon_{sy} = 3,37 (0,6479 - 0,05) = 2,015\text{‰} < 1,1 \times 500 / 2 \times 10^5$$

#### 5.4.4. Wyznaczenie średniego odkształcenia $\varepsilon_{sm}$

Odkształcenie średnie  $\varepsilon_{sm}$  z uwzględnieniem współpracy betonu między rysami:

$$\Delta \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr,II} - \varepsilon_{sr,I} = 0,39736 - 0,07726 = 0,3201, [0,447]\text{‰}$$

$$\varepsilon_{smy} = 2,015 - 0,25 \times 0,3201 = 1,935\text{‰}, [2,338]$$

Krzywizna średnia z uwzględnieniem współpracy betonu między rysami wg (16) wynosi:

$$\kappa_{y,m} = (1,935 + 2,2)/(1,3 - 0,05) = 3,308\%/m, [3,713]$$

Zależność  $M-\kappa$  w fazie II wg (17):

$$K_0 = (7,636 - 1,506)/(3,308 - 0,3372) = 2063 \text{ MNm}^2, [1587]$$

$$\kappa_0 = (1,506 \times 3,308 - 7,636 \times 0,3372)/(7,636 - 1,506) = 1/2546, [1/1733]$$

$$\kappa = M_{Ed}(x)/2063 - 1/2546 [M_{Ed}(x)/1587 - 1/1733]$$

#### 5.4.5. Przekrój przęsłowy

$z_a = 0,8 \text{ m}$ ;  $z_{s1} = 0,05 \text{ m}$ ;  $z_{s2} = 0,25 \text{ m}$ ;  $h_f = 0,30 \text{ m}$ ;  $h_a = 1,0 \text{ m}$ ;  
Zbrojenie: minimalne pole zbrojenia  $A_s = 56,7 \text{ cm}^2$  poprowadzone w dwu warstwach po połowie.

Oś obojętna leży w płycie betonowej;  $z_{pl} = 0,205 \text{ m}$ :

$$M_{pl,Rd} = 9,96 \text{ MNm} > M_{Ed} = 4,414 \text{ MNm};$$

Sprawdzony do betonu moment bezwładności wynosi

$$I_{ci} = 0,1295 \text{ m}^4;$$

$$\text{Sztwywność } E_{cm} I_{ci} = 34000 \times 0,1295 = 4403 \text{ MNm}^2;$$

Równanie krzywizny dla  $x \in \{0; 24,30\}$ :

$$\kappa_i = M_{Ed}(x)/E_{cm} I_{ci} = M_{Ed}(x)/4403 [M_{Ed}(x)/4401]$$

Równanie krzywizny dla  $x \in \{24,3; 30\}$ :

$$\kappa_{II,m} = M_{Ed}(x)/2338 - 1/3192$$

#### 5.5. Równania metody sił w kolejnym kroku „j”

Równanie metody sił dla kolejnych iteracji „j” można dla przyrostów momentu podporowego  $\Delta X_j$  przy uwzględnieniu nowych sztywności zapisać w postaci (21):

$$\delta_j \Delta X_j + \Delta \delta_{pj} = 0; \quad (21)$$

$\delta_j [1/\text{MNm}]$  – przemieszczenie w miejscu i kierunku działania siły  $\Delta X_j$  od  $\Delta X_j = 1$  odpowiadające zmodyfikowanej sztywności belki.

$\Delta \delta_{pj}$  – przyrost przemieszczenia w miejscu i kierunku działania siły  $\Delta X_j$  odpowiadające zmodyfikowanej sztywności belki dla funkcji  $M_{p,(j-1)}(x)$  z poprzedzającego kroku iteracyjnego. Ze względu na pomijalnie małe różnice w krzywiznach przęsła i części podporowej w fazie I przyjęto jednakową krzywiznę w toku iteracji „i” dla obu obszarów. Ze względu na symetrię układu rozpatruje się jedno przęsło.

##### 5.5.1. Krok pierwszy

$$\delta_1 = \int_0^{L_2} M_1(x) \kappa_I(M_1(x)) dx + \int_{L_2}^L M_1(x) \kappa_{II}(M_{p,0}(x)) dx \quad (22)$$

Pierwsza całka dotycząca zakresu liniowego po przekształceniach przybiera postać:

$$\frac{1}{30^2} \int_0^{24,3} \frac{x^2}{4403} dx = 1,207 \frac{\%}{\text{MNm}}, [1,377]$$

Druga całka po przekształceniach, przy przyjęciu sztywności siecznej:

$$\kappa_{II} = |M_{p,0}(x)| / [|M_{p,0}(x)| / 2063 - 1/2546] \quad (23)$$

gdzie:  $M_{p,0}(x)$  według rysunku 7.

$$\int_{L_2}^L \frac{x^2}{L^2} \frac{|M_{p,0}(x)|}{|M_{p,0}(x)|} - \frac{1}{2546} dx =$$

$$\frac{1}{L^2} \int_{L_2}^L \frac{x^2}{2063} - \frac{x^2}{2546 |M_{p,0}(x)|} dx =$$

$$\frac{1}{30^2} \int_{24,3}^{30} \left( \frac{x^2}{2063} - \frac{x}{88,792(x - 22,5)} \right) dx$$

$$= 1,7981 \frac{\%}{\text{MNm}}, [1,796]$$

Wzajemny kąt obrotu nad podporą pośrednią od momentów jednostkowych wskutek zmiany sztywności belki wynosi:

$$\delta_1 = 1,207 + 1,7981 = 3,005\% [1/\text{MNm}], [3,174]$$

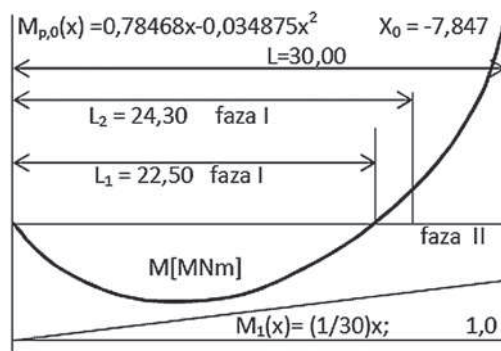
Przyrost wzajemnego kąta obrotu nad podporą pośrednią od obciążeń na skutek zmiany sztywności belki:

$$\Delta \delta_{p1} = \int_0^{L_2} M_1(x) \kappa_I(M_{p,(j-1)}) dx + \int_{L_2}^L M_1(x) \kappa_{II}(M_{p,(j-1)}) dx \quad (24)$$

Pierwsza całka dotycząca zakresu liniowego po przekształceniach przybiera postać:

$$\frac{0,034875}{30^2 \times 4403} \int_0^{24,3} (x^3 - 22,5x^2) dx = -5,4\% [-6,857]$$

Druga całka po przekształceniach przy przyjęciu sztywności siecznej przybiera postać:



Rys. 7. Podział belki na strefy według faz pracy betonu rozciąganego

$$\int_{L_2}^L M_1(x) \kappa_{II}(M_{p,(j-1)}) dx$$

$$\frac{1}{30} \int_{24,3}^{30} \left[ \frac{0,034875}{2063} (-x^3 + 22,5 x^2) + \frac{1}{2546} x \right] dx =$$

9,496‰, [7,97406]

Przyrost wzajemnego kąta obrotu nad podporą pośrednią od obciążeń na skutek zmiany sztywności belki:

$$\Delta\delta_{pI} = -5,4 + 9,496 = 4,096‰ [1/\text{MNm}]; [1,117]$$

Przyrost momentu zginającego nad podporą wynosi:

$$\Delta X_I = 4,096/3,0051 = +1,363 \text{ MNm}, [0,352]$$

Moment podporowy po pierwszym kroku wynosi:

$$X_I = -7,847 + 1,363 = -6,484 \text{ MNm}, [-6,132]$$

Przypadek czystej fazy II:

– podatność belki w miejscu i kierunku działania siły  $\Delta X_I = 1$  bez uwzględnienia usztywniającego działania betonu między rysami:

$$\delta_{1,II} = \frac{1}{30^2} \int_0^{24,3} \frac{x^2}{4403} dx + \frac{1}{30^2} \int_{24,3}^{30} \frac{x^2}{2266} dx =$$

$$1,2042‰ + 2,0677‰ = 3,27195‰$$

Przyrost wzajemnego kąta obrotu nad podporą pośrednią od obciążeń bez uwzględnienia usztywniającego działania betonu między rysami:

$$\delta_{p1,II} = \frac{0,034875}{30 \times 4403} \int_0^{24,3} (x^3 - 22,5 x^2) dx +$$

$$+ \frac{0,034875}{30 \times 2266} \int_{24,3}^{30} (x^3 - 22,5 x^2) dx$$

$$= -5,399‰ + 10,49‰ = 5,091‰$$

$$\Delta X_{I,II} = 5,091 / 3,272 = +1,556 \text{ MNm}$$

Musi być spełniona nierówność:

$$\Delta X_I = +1,363 \text{ MNm} < \Delta X_{I,II} = +1,556 \text{ MNm}$$

## 6. Podsumowanie

Przeprowadzona analiza nieliniowa na przykładzie dwuprzęsłowego dźwigara zespolonego złożonego z dźwigara stalowego HE1000B i górnej płyty betonowej 3,0×0,30 m wskazuje na bardzo szybką zbieżność ciągu iteracyjnego. Poza początkowym rozwiązaniem liniowo sprężystym przedstawiono dwa kroki iteracji. Przyrosty momentów w odniesieniu do początkowego momentu podporowego obliczonego według teorii liniowej wyniosły kolejno 17,4% i 4,5%. Ponieważ zbrojenie osiągnęło wartość poniżej minimalnego pola zbrojenia, dalsze obliczenia okazują się zbędne. Dla konstrukcji istniejących możliwe jest rozwiązanie bezpośrednio, jednak przy przyjęciu, że podział belki zdeterminowany przez momenty rysujące będzie z góry określony, czyli w przybliżeniu przyjęty. Dla konstrukcji nowo projektowanych, ze względu na dodatkowy nieznan argument  $A_s$  (zbrojenie), rozwiązanie beziteracyjne praktycznie nie jest możliwe.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] Ajdukiewicz A., Pre-norma Konstrukcji Betonowych, fib Model Code 2010, Stowarzyszenie Producentów Cementu, Kraków, 2014
- [2] DIN-Fachbericht 102. Betonbrücken, Beuth Verlag, Berlin, 2003
- [3] Fingerloos F., Finckh W. und andere, Verbesserung der Praxistauglichkeit der Baunormen durch pränormative Arbeit. Betonbau, Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart, 2015
- [4] Furtak K., Mosty zespolone, PWN Warszawa-Kraków, 1999
- [5] Goris A., Heger J., Stahlbetonbau aktuell. Bauwerk, Berlin, 2010
- [6] Hanswille G., Stranghöner N., Leitfaden zum DIN Fachberichte 104 Verbundbrücken, Ernst & Sohn, Berlin, 2003
- [7] Karlikowski J., Madaj A., Wołowicki W., Mosty zespolone stalowo-betonowe, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2016
- [8] Meyer G., Meyer R., Rissbreitenbeschränkung nach DIN 1045. Diagramme zur direkten Bemessung, Bau+Technik, Düsseldorf, 2007
- [9] Roik K., Bergmann R., Hansel J., Verbundkonstruktionen. Bemessung auf der Grundlage des Eurocode 4 Teil 1. Beton-Kalender 1993, Ernst & Sohn, Berlin, 1993
- [10] Unterweger H., Globale Systemberechnung von Stahl und Verbundbrücken Modellbildung und Leistungsfähigkeit verbesserter einfacher Stabmodelle, Technische Universität, Graz, 2007
- [11] Wittek U., Meiswinkel R. und andere, Beitrag zu nichtlinearen Dimensionierungskonzepten von Flächentragwerken aus Stahlbeton, Universität Kaiserslautern, Kaiserslautern, 2000
- [12] Wranik J., Obliczanie konstrukcji żelbetowych w oparciu o model materiału nieliniowo sprężystego, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra, 2003
- [13] DIN EN 1994-2
- [14] DIN EN 1994-2-NA
- [15] DIN EN 1994-1-1
- [16] DIN EN 1994-1-1-NA
- [17] DIN EN 1992-1-1
- [18] DIN EN 1992-1-1/NA: 2011-01
- [19] DIN EN 1992-1-1/NA: 2013-04

Referat był prezentowany na konferencji naukowej  
Konstrukcje Zespolone 2017 w Zielonej Górze

PASYWNY-BUDYNEK PL  
branżowy portal internetowy

(42) 653- 57- 03

www.facebook.com/PasywnyBudynekpl

OGRZEWNICTWO PL KLIMATYZACJA PL  
branżowy portal internetowy branżowy portal internetowy

PORADY FACHOWCÓW  
AKTUALNOŚCI Z BRANŻY  
INFORMACJE O PRODUKTACH  
PROMOCJE  
KATALOG FIRM

Sprawdź nas!

