

Radosław KŁOSIŃSKI

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej,
ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra

Synchronizacja okien czasowych przy wyznaczaniu widma za pomocą MDFT

Dr hab. inż. Radosław KŁOSIŃSKI

Zielonogórzanin od urodzenia. Jest inżynierem w zakresie automatyki i metrologii elektrycznej a doktorem habilitowanym w zakresie elektrotechniki. Pracuje w Instytucie Metrologii Elektrycznej na Wydziale Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego. Jego zainteresowania naukowe koncentrują się na układach okresowych oraz na zastosowaniach cyfrowego przetwarzania sygnałów w elektrotechnice.



e-mail: r.klosins ki@ime.zu.zgora.pl

Streszczenie

Przedstawiono wyniki symulacji pokazujące skutki stosowania okien przy wyznaczaniu widma, za pomocą MDFT, sygnałów próbkowanych niesynchronicznie. Symulacje przeprowadzono dla okna prostokątnego, okna Hanninga i zsynchronizowanego okna Hanninga. Najlepsze wyniki uzyskano dla zsynchronizowanego okna Hanninga, które pozwala w pełni wykorzystać zalety MDFT wynikające z synchronizacji funkcji bazowych szeregu Fouriera z harmonicznymi sygnału.

Słowa kluczowe: dyskretne przekształcenie Fouriera, przeciek widma, okna czasowe.

Synchronization of time windows in determination of spectrum by means of the MDFT

Abstract

The paper presents simulation results showing effects of application of windows when determining the spectrum by means of MDFT of signals sampled asynchronously. Simulations were performed for a rectangular window, Hanning window, and a synchronized Hanning window. The best results were obtained for the synchronized Hanning window, which allows to take full advantage of MDFT arising from synchronization of basis functions of the Fourier series with harmonics of the signal.

Keywords: discrete Fourier Transform, spectrum leakage, time windows.

1. Wprowadzenie

Dyskretne przekształcenie Fouriera (ang. Discrete Fourier Transform, DFT) jest powszechnie stosowaną metodą wyznaczania widma sygnałów reprezentowanych za pomocą próbek. W przypadku gdy do analizy brana jest niecałkowita liczba okresów sygnału, na przykład w wyniku niesynchronicznego próbkowania, pojawia się przeciek widma i związane z nim znaczne błędy. Skutki przecieku widma można ograniczyć stosując okna czasowe, jednak uzyskiwane wyniki nadal mają ograniczoną dokładność. Błędy spowodowane są faktem, że przedział uśredniania nie obejmuje całkowitej liczby okresów sygnału. Drugim źródłem błędów jest wyznaczanie próbek widma dla częstotliwości innych niż częstotliwości harmonicznymi sygnału. Dla lepszej lokalizacji harmonicznymi sygnału w uzyskanym widmie stosuje się różne interpolacje obwiedni widma (np. IFFT – Interpolated Fast Fourier Transformation [1]). Zwiększa się rozdzielczość wyznaczanego widma przez dopisywanie zerowych próbek lub stosując algorytm chirp-Z. Jest też inny sposób na uniknięcie przecieku widma polegający na repróbkowaniu sygnału w celu uzyskania równomiernego (synchronicznego) rozkładu próbek [2]. Wadą tego rozwiązania jest potrzeba przyjęcia określonej funkcji interpolującej fragmenty sygnału nie zawsze zgodnej z jego faktycznym przebiegiem.

W MDFT (modyfikowane dyskretne przekształcenie Fouriera) zwiększa się dokładność analizy dzięki synchronizacji funkcji bazowych szeregu Fouriera z harmonicznymi sygnału [3, 4]. Wyznaczane są próbki widma dla faktycznych częstotliwości składowych harmonicznymi sygnału więc w tym przypadku metody związane z lokalizacją harmonicznymi są zbędne. Uzyskiwane wyniki obciążone są jednak błędami wynikającymi z nierównomiernego rozkładu próbek we fragmencie sygnału brany do analizy. Błędy te można zmniejszyć stosując okna sygnałowe.

Przedmiotem niniejszego opracowania są wyniki badań wpływu stosowania okien czasowych na błąd wyznaczania, za pomocą MDFT, widma sygnałów okresowych próbkowanych niesynchronicznie. Ocena skuteczności okien odbywa się na zasadzie przybliżonej analizy błędów oraz porównania wyników symulacji. Celem tych badań było określenie jaki wpływ na dokładność MDFT mają okna czasowe i w jaki sposób należy je stosować. Część tych wyników była prezentowana na konferencji SP'2014 [7]. Rozważany jest również wpływ dokładności wyznaczenia częstotliwości sygnału na błąd wyznaczenia składowych harmonicznymi.

2. Modyfikowane dyskretne przekształcenie Fouriera, MDFT

Aby uniknąć przecieku widma do analizy DFT należy brać zestaw próbek obejmujący całkowitą liczbę okresów sygnału, tzn.:

$$NT_p = mT, \quad (1)$$

gdzie N to całkowita liczba próbek, T_p to okres próbkowania a m jest całkowitą liczbą okresów sygnału T .

Gdy spełniony jest warunek (1), obliczane za pomocą DFT, próbki widma odpowiadają wartościom harmonicznymi z pomijalnym małym błędem wynikającym ze skończonej precyzji reprezentacji liczb w komputerze. Warunek (1) nie zawsze może być spełniony, wtedy na całkowitą liczbę okresów sygnału przypada niecałkowita liczba okresów próbkowania N' , tzn.:

$$N'T_p = mT. \quad (2)$$

W takim przypadku pulsacja podstawowa sygnału może być wyrażona wzorem:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2m\pi}{N'T_p}, \quad (3)$$

U podstaw MDFT leży dopasowanie częstotliwości funkcji bazowych szeregu Fouriera do częstotliwości harmonicznymi sygnału. Uzyskuje się to wprowadzając do wzoru analizy DFT niecałkowitą liczbę okresów próbkowania N' w miejsce całkowitej liczby próbek N . Równanie analizy MDFT ma postać:

$$X(k) = \frac{2}{N'} \sum_{n=0}^{N'-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N'}kn}, \quad (4)$$

gdzie $X(k)$ jest amplitudą zespoloną k -tej harmonicznymi (k -tą próbką widma).

Wprowadzenie wartości N' do wzoru analizy poprawia dokładność wyznaczanego widma, ponieważ wyznaczone są próbki widma dla faktycznych częstotliwości składowych harmonicznymi.

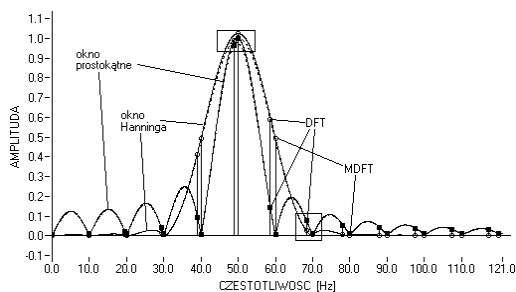
Pierwsze rozważania dotyczące tzw. quasi synchronicznego wyznaczania widma w podobny sposób jak w MDFT można znaleźć w [5, 6] i w zawartej tam literaturze. Opis właściwości,

analizę błędów i przykłady estymacji, za pomocą MDFT, widma rzeczywistych sygnałów próbkowanych niesynchronicznie przedstawiono już wcześniej w [3, 4].

3. Wpływ stosowania okien sygnałowych na błąd wyznaczania widma sygnałów okresowych próbkowanych niesynchronicznie

Branie do analizy widmowej fragmentu (zestawu próbek) sygnału rzeczywistego jest równoznaczne z zastosowaniem okna prostokątnego. Nałożenie okna na sygnał poddawany analizie częstotliwościowej powoduje, że uzyskiwane widmo jest sumą, przeskalowanych, proporcjonalnie do amplitud składowych harmonicznych sygnału, obrazów widma tego okna poprzesuwanymi do częstotliwości tych składowych harmonicznych. Tak więc na wartość określonej próbki widma ma wpływ wiele składników, szczególnie, że widmo sygnałów dyskretnych jest okresowe. Sens stosowania tzw. okien sygnałowych polega na zmniejszeniu wzajemnego wpływu harmonicznych sygnału uzyskiwanym dzięki niższym tzw. listkom bocznym obwiedni widma okna. Najlepiej byłoby gdyby w miejscach występowania innych harmonicznych przypadły miejsca zerowe obwiedni widma okna, tak jak dzieje się w przypadku synchronicznego próbkowania.

W celu oceny wpływu określonego okna sygnałowego na dokładność wyznaczania widma potrzebna jest analiza obwiedni widma tego okna w dwóch miejscach. Ważny jest błąd wartości maksymalnej listka głównego, bo jest to błąd wyznaczenia wartości składowej harmonicznej przy założeniu braku wpływu innych harmonicznych. Znaczenie mają także wartości widma uzyskiwane w miejscach występowania innych harmonicznych bo to one decydują o wzajemnym wpływie różnych harmonicznych. Fragmenty obwiedni widma stanowiące przedmiot analizy zaznaczono na rys. 1.



Rys. 1. Obwiednie widma okna prostokątnego i okna Hanninga z zaznaczonymi fragmentami podlegającymi analizie

Fig. 1. Envelopes of the spectrum of a rectangular window and a Hanning window with the selected fragments that are subject to analysis

Do analizy wpływu stosowania okien na dokładność wyznaczania widma za pomocą MDFT wybrano następujące okna:

Okno prostokątne (traktowane czasami jako „brak okna”) oznacza wybór określonego zestawu N próbek, wartości próbek sygnału nie są modyfikowane. Formuła określająca próbki okna:

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{dla } n \notin \{0, 1, \dots, N-1\} \end{cases} \quad (5)$$

Przybliżona wartość bezwzględnego błędu wyznaczenia, za pomocą MDFT, próbki widma sygnału sinusoidalnego o jednostkowej amplitudzie i fazie początkowej φ , dla okna prostokątnego, określona jest wzorem [8]:

$$\delta X_k \cong \frac{2\Delta}{N-\Delta} \cos\left(m\pi \frac{\Delta-1}{N-\Delta} + \varphi\right) e^{-jk\pi \frac{\Delta-1}{N-\Delta}}, \quad (6)$$

gdzie $\Delta = N - N'$. W obliczeniach wykorzystano przybliżenie dla małych kątów: $\sin \alpha \approx \alpha$.

Okno Hanninga jest najprostszym oknem typu cosinusoidalnego. Jest często stosowane w celu zwiększenia dokładności analizy widmowej, ze względu na prostą formułę, niezłą skuteczność i łatwość aproksymacji obwiedni widma okna. Formuła określająca próbki okna:

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) \right) \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (7)$$

Wyrażenie określające przybliżoną wartość błędu MDFT dla okna Hanninga jest bardzo złożone i trudne do interpretacji.

Okno Hanninga zsynchronizowane to okno Hanninga zmodyfikowane na potrzeby MDFT przez zastąpienie liczby próbek N liczbą okresów próbkowania N' . Dzięki temu okno jest dopasowane (zsynchronizowane) do okresu sygnału. Formuła określająca próbki okna:

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N'} n\right) \right) \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (8)$$

Przybliżona wartość błędu bezwzględnego wyznaczenia, za pomocą MDFT, próbki widma sygnału sinusoidalnego, dla zsynchronizowanego okna Hanninga, określona jest wzorem [8]:

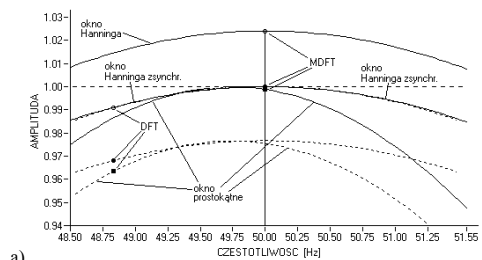
$$\delta X_k \cong \frac{2\Delta}{N-\Delta} \cos\left(m\pi \frac{\Delta-1}{N-\Delta} + \varphi\right) e^{-jk\pi \frac{\Delta-1}{N-\Delta}} \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \frac{\Delta-1}{N-\Delta}\right) \right), \quad (9)$$

Porównując wyrażenia (6) dla okna prostokątnego i (9) dla zsynchronizowanego okna Hanninga, można zauważyć, że wyrażenie (9) daje mniejsze wartości ze względu na dodatkowy czynnik o ułamkowej wartości.

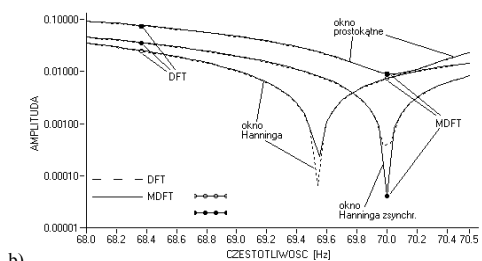
Przeprowadzono symulacje wyznaczając widmo sygnału sinusoidalnego:

$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = 2\pi f, \quad (10)$$

o jednostkowej amplitudzie, o fazie początkowej $\varphi = 30^\circ$ i częstotliwości $f = 50$ Hz na podstawie 60 próbek zebranych z około pięciu okresów sygnału. Liczba okresów próbkowania wyniosła $N' = 59,3$.



a)



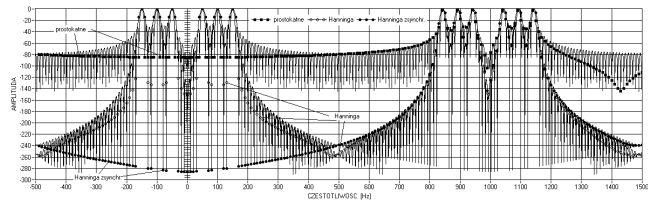
b)

Rys. 2. Fragmenty obwiedni widma, a) w okolicy listka głównego, b) w okolicy między listkami bocznymi

Fig. 2. Fragments of the spectrum envelope, a) around the main lobe, b) in the area between the side lobes

Na rysunku 2. przedstawione są fragmenty obwiedni widma, w okolicy częstotliwości sinusoidy (listek główny) oraz w okolicach częstotliwości między listkami bocznymi widma. Próbkki widma uzyskane za pomocą MDFT umiejscowione są dokładnie w częstotliwości sinusoidy (50 Hz) lub w częstotliwości ewentualnej innej harmonicznej (tutaj 70 Hz), próbkki widma uzyskane za pomocą DFT umiejscowione są obok tych częstotliwości. Najlepsze wyniki uzyskano dla zsynchronizowanego okna Hanninga. Obwiednia widma tego okna, dzięki synchronizacji, ma głębokie minimum między listkami bocznymi (dla częstotliwości 70 Hz). Pozostałe okna w tym miejscu przyjmują znacznie większe wartości. W miejscu pojawienia się jedynej harmonicznej sygnału o amplitudzie 1, dla 50 Hz, najgorszy wynik za pomocą MDFT uzyskano dla okna Hanninga niezsynchronizowanego.

Na rysunku 3 przedstawione są obwiednie widma z zaznaczonymi wartościami harmonicznych obliczonymi za pomocą MDFT przy wykorzystaniu trzech badanych okien. Tym razem analizowany był sygnał złożony z trzech harmonicznych o jednostkowych amplitudach, o częstotliwościach 50 Hz, 100 Hz i 150 Hz. Na 5 okresów sygnału przypadało $N' = 99,3$ okresów próbkowania (delta $\Delta = 0,7$). Na wykresach, gdzie zastosowano skalę logarytmiczną (odniesioną do amplitudy harmonicznych), bardzo dobrze widoczne są wartości uzyskiwane w miejscach, w których amplituda harmonicznych wynosi zero. Najlepsze wyniki (najbliższe zero) uzyskano stosując zsynchronizowane okno Hanninga. Część widma z prawej strony, stanowiąca okresowe powtórzenie widma przesunięte o częstotliwość próbkowania, zawiera wartości harmonicznych obciążone znacznymi błędami ze względu na brak synchronizacji, którą można uzyskać jedynie dla centralnego fragmentu widma.

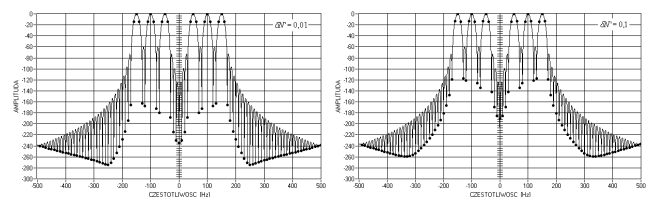


Rys. 3. Widmo sygnału wieloharmonicznego uzyskane za pomocą MDFT z oknem prostokątnym, Hanninga oraz Hanninga zsynchronizowanym

Fig. 3. The spectrum of the multiharmonic signal obtained by means of MDFT with the rectangular, Hanning and synchronized Hanning window

4. Wpływ dokładności wyznaczenia liczby okresów próbkowania N' na dokładność wyznaczenia widma

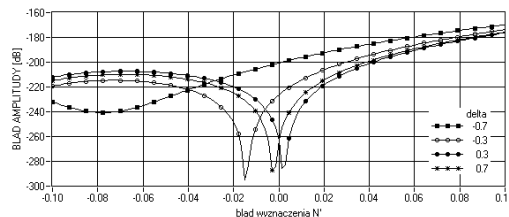
Dzięki synchronizacji funkcji bazowych szeregu Fouriera oraz synchronizacji okna czasowego można, za pomocą MDFT, wyznaczać widmo sygnałów próbkowanych niesynchronicznie ze znaczną dokładnością. Synchronizacja uzależniona jest od poprawności wyznaczenia liczby okresów próbkowania N' . Wykorzystanie błędnej wartości N' powoduje utratę właściwości MDFT, szczególnie w przypadku stosowania zsynchronizowanych okien sygnałowych typu cosinusoidalnego.



Rys. 4. Widmo sygnału składającego się z trzech harmonicznych uzyskane za pomocą MDFT z oknem Hanninga zsynchronizowanym dla błędów wyznaczenia N' wynoszących 0,01 oraz 0,1

Fig. 4. The spectrum of the signal consisting of three harmonics obtained by means of MDFT with the synchronized Hanning window when the N' determination error was 0,01 and 0,1

Rysunek 4. przedstawia obwiednie widma uzyskane dla różnych błędów wyznaczenia N' . Zależność błędu wyznaczenia widma drugiej harmonicznej od błędów wyznaczenia liczby okresów próbkowania N' przedstawia rysunek 5. Badania przeprowadzono dla tego samego sygnału wieloharmonicznego w podobnych warunkach.



Rys. 5. Wartości błędów względnego amplitudy drugiej harmonicznej w zależności od błędów wyznaczenia N' dla różnych wartości delty

Fig. 5. Values of the relative error of determination the second harmonic amplitude depending on the error of N' designation for various values of delta

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono porównanie skutków stosowania okna Hanninga i zsynchronizowanego okna Hanninga przy wyznaczaniu, za pomocą MDFT, widma sygnałów okresowych próbkowanych niesynchronicznie.

Wykazano, że zastosowanie zsynchronizowanego okna Hanninga pozwala w pełni wykorzystać zalety MDFT płynące z synchronizacji funkcji bazowych szeregu Fouriera z częstotliwościami rzeczywistych harmonicznych sygnału. Można spodziewać się, że podobnie dobre efekty można uzyskać stosując zsynchronizowane inne okna typu cosinusoidalnego, np. okna Hamminga, Blackmana, itd.

Możliwość uzyskiwania dobrych wyników analizy widmowej za pomocą MDFT bardzo mocno zależy od dokładności wyznaczenia liczby okresów próbkowania przypadających na całkowitą liczbę okresów sygnału N' , a więc w praktyce, od dokładności wyznaczenia okresu lub częstotliwości badanego sygnału

6. Literatura

- [1] Jain V.K., Collins W.L., Davis D.C.: High-Accuracy Analog Measurements via Interpolated FFT; IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. IM-28, NO. 2, JUNE 1979, p.113-122.
- [2] Borkowski D.: On-Line Instantaneous Frequency Estimation And Voltage/Current Coherent Resampling Method, Metrology and Measurement Systems, vol. XIII, No. 1, 2006, p. 59-74.
- [3] Kłosiński R.: Zastosowanie MDFT do analizy widmowej sygnałów okresowych próbkowanych niesynchronicznie, Pomiary Automatyka Kontrola, Vol. 54, nr 6, 2008, s. 337-339.
- [4] Kłosiński R.: Modification of the DFT for improving accuracy of a non-coherently sampled periodic signal spectrum estimation, Przegląd Elektrotechniczny, vol. 84, nr 9, 2008, s. 153-158.
- [5] Nyarko D.J., Stromsmoe K.A.: A New Approach to the Estimation of Harmonics of Digitized Periodic Waveforms, IEEE WES-CANEX' 1995 Conference, vol. 1, 1995, p. 18-23.
- [6] Nyarko D.J., Stromsmoe K.A.: A Modified DFT for Improved Accuracy in Harmonic Measurements of Periodic Waveforms, Canadian Conference on Electrical and Computer Eng., vol. 2, 1996.
- [7] Kłosiński R.: Stosowanie okien sygnałowych przy wyznaczaniu widma za pomocą MDFT, X Konf. Naukowa Systemy pomiarowe w badaniach naukowych i w przemyśle SP'2014, Łagów 1-4.06.2014, s. 43-46.
- [8] Kłosiński R.: Zastosowanie operatorów cykloparametrycznych do reprezentacji układów okresowo zmiennych, Mon. WEliT UZ nr 8, Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, 2011.