

## OBLICZENIA KOŁA OBIEGOWEGO METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

### Streszczenie

Aktualnie najnowsza generacja obrabiarek CNC umożliwia produkcję przekładni cykloidalnych wymagających bardzo wysokiej dokładności wykonania poszczególnych jej elementów.

Przekładnie te cechuje wyższa sprawność i niezawodność oraz niższa energochłonność w porównaniu z rozpowszechnionymi ciężkimi, hałaśliwymi i przestarzałymi technologicznie przekładniami zębatymi o zarysie ewolwentowym.

Jednym z najważniejszych podzespołów przekładni cykloidalnej jest koło obiegowe.

W programie MATHCAD, zostały wykonane obliczenia koła obiegowego uwzględniające równania zarysu epicykloidalnego, warunki geometryczne, korektę zarysu zębów, współczynniki doświadczalne i wartości nacisków powierzchniowych.

Przy założeniu tej samej geometrii koła obiegowego i konfiguracji warunków brzegowych wykonano obliczenia MES. W niniejszej pracy przedstawiono:

- autorski sposób weryfikowania wyników obliczeń obciążeń działających na koło obiegowe,
- rozkład naprężeń zredukowanych i wartości odkształceń pojedynczego koła obiegowego,
- obliczenia trwałości zmęczeniowej koła obiegowego.

Obliczenia obciążeń oraz naprężeń i odkształceń wykonano metodą elementów skończonych z wykorzystaniem oprogramowania Autodesk Simulation Mechanical v.2015 (ASM2015).

### WSTĘP

Aktualnie najnowsza generacja obrabiarek CNC umożliwia produkcję przekładni cykloidalnych wymagających bardzo wysokiej dokładności wykonania poszczególnych jej elementów.

Przekładnie te cechuje wyższa sprawność i niezawodność oraz niższa energochłonność w porównaniu z rozpowszechnionymi ciężkimi, hałaśliwymi i przestarzałymi technologicznie przekładniami zębatymi o zarysie ewolwentowym.

Jednym z najważniejszych podzespołów przekładni cykloidalnej jest koło obiegowe.

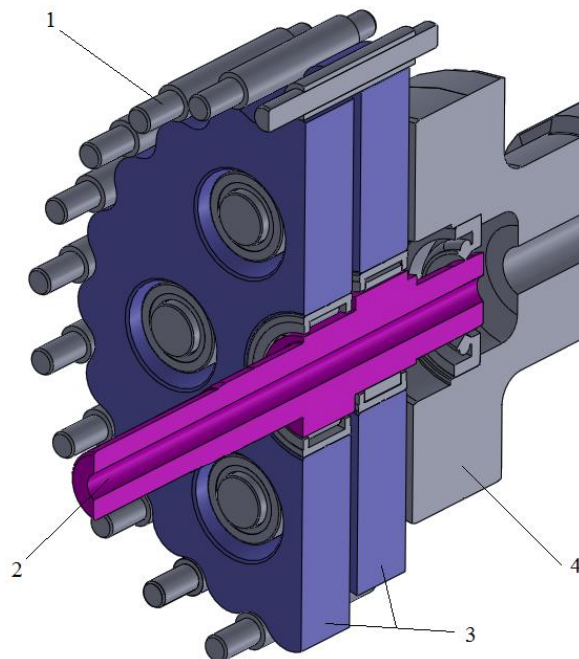
W programie MATHCAD, zostały wykonane obliczenia koła obiegowego uwzględniające równania zarysu epicykloidalnego, warunki geometryczne, korektę zarysu zębów, współczynniki doświadczalne i wartości nacisków powierzchniowych.

Przy założeniu tej samej geometrii koła obiegowego i konfiguracji warunków brzegowych wykonano obliczenia MES. W niniejszej pracy przedstawiono:

- autorski sposób weryfikowania wyników obliczeń obciążeń działających na koło obiegowe,
- rozkład naprężeń zredukowanych i wartości odkształceń pojedynczego koła obiegowego,
- obliczenia trwałości zmęczeniowej koła obiegowego.

### 1. MODEL DYSKRETNY KOŁA OBIEGOWEGO I WARUNKI BRZEGOWE

Na rys. 1 przedstawiono przekrój przykładowej jednostopniowej przekładni cykloidalnej.



**Rys. 1.** Przekrój jednostopniowej przekładni cykloidalnej: 1-sworzeń zewnętrzny z tuleją ślizgową, 2-wałek wejściowy, 3- dwa koła obiegowe, 4- wałek wyjściowy ze sworzniami wewnętrznymi (na rysunku niewidocznymi)

Kształt koła obiegowego wygenerowano w programie MATHCAD na podstawie następujących parametrów otrzymanych z obliczeń:

- liczba sworzni zewnętrznych;
- liczba sworzni wewnętrznych w mechanizmie równowodowym;
- średnica otworu pod łożysko wałka wejściowego;
- grubość koła obiegowego.

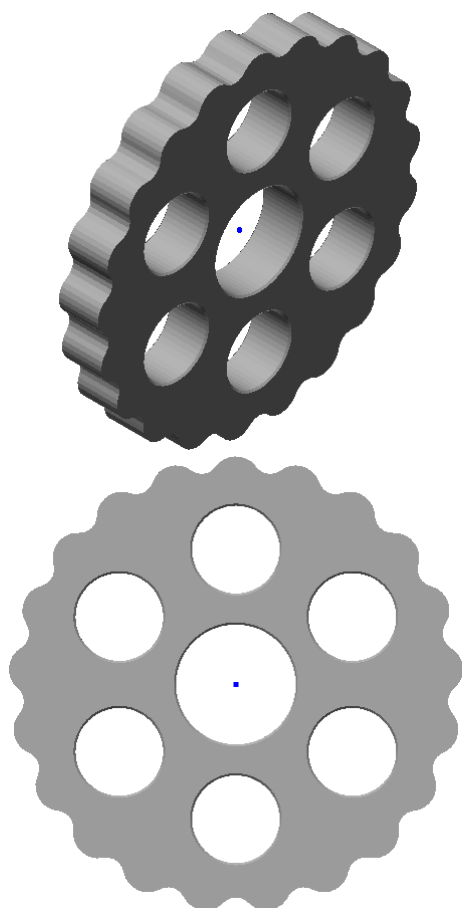
Kształt epicykloidy z uwzględnieniem korekcji uzębienia opisują równania (1):

$$\begin{aligned}
 x_{ek}(\eta) &:= b \cdot (z1 + 1) \cdot \cos(\eta) - \lambda \cdot b \cdot \cos[(z1 + 1) \cdot \eta] - \frac{q \cdot \cos(\eta) - \lambda \cdot q \cdot \cos[(z1 + 1) \cdot \eta]}{\sqrt{1 - 2 \cdot \lambda \cdot \cos(z1 \cdot \eta) + \lambda^2}} \\
 y_{ek}(\eta) &:= [b \cdot (z1 + 1) \cdot \sin(\eta) - \lambda \cdot b \cdot \sin[(z1 + 1) \cdot \eta]] - \frac{q \cdot \sin(\eta) - \lambda \cdot q \cdot \sin[(z1 + 1) \cdot \eta]}{\sqrt{1 - 2 \cdot \lambda \cdot \cos(z1 \cdot \eta) + \lambda^2}}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

gdzie:

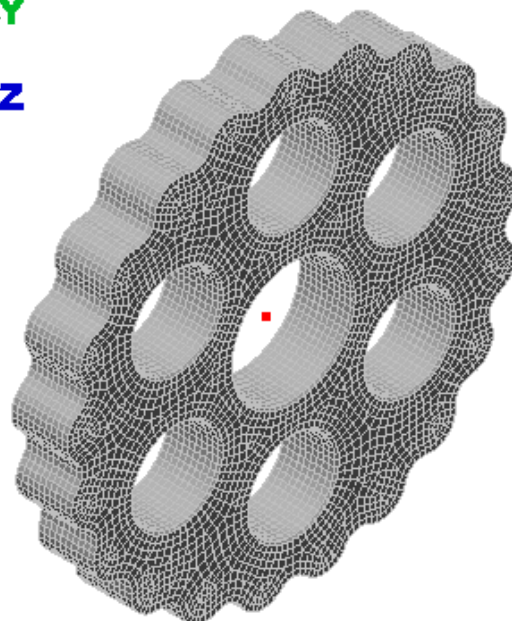
- z1 - liczba zębów koła obiegowego
- b - promień koła tocznego
- q - przesunięcie ekwidystanty
- $\eta$  - kąt zarysu epicykloidy

Wygenerowany w oparciu o układ równań (1) kształt koła w programie typu CAD do projektowania bryłowego przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Model bryłowy koła obiegowego

Następnie model bryłowy koła został wyeksportowany do programu Autodesk Simulation Mechanical 2015. Po procesie dyskretyzacji (ang. meshingu) otrzymano model (rys. 3), który składa się z około 40 tysięcy bryłowych elementów skończonych.



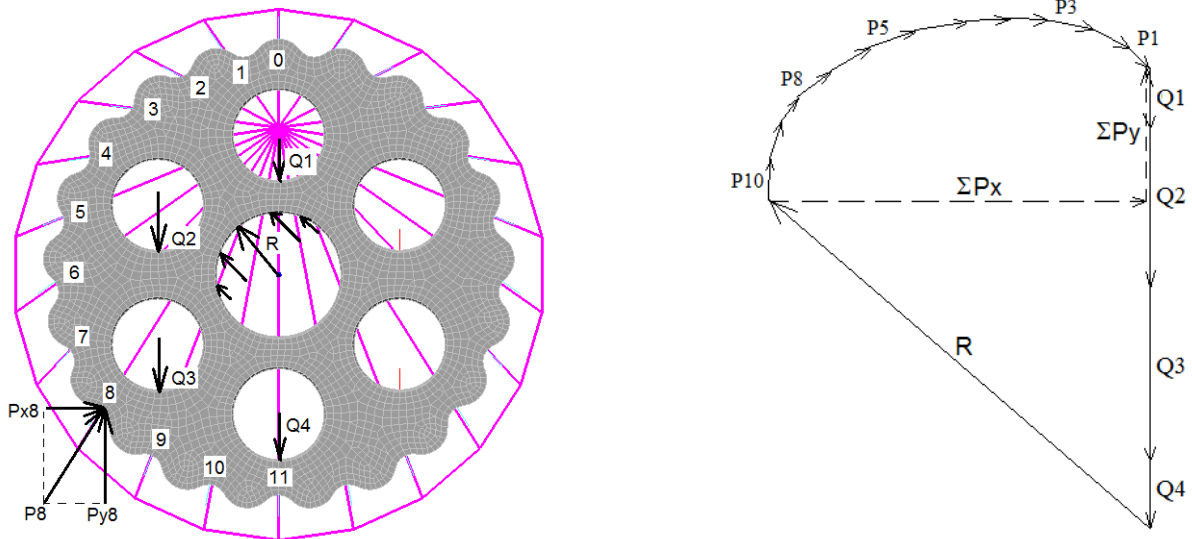
Rys. 3. Model dyskretny koła obiegowego z podziałem na bryłowe elementy skończone

Warunki brzegowe przyjęto wg [1, 2] stosując zasadę wieloboku sił jak na rysunku 4. Siła wypadkowa R jest sumą geometryczną składowych poziomych i pionowych, a jej wartość liczbową może być wyznaczona ze wzoru (2)

$$R = \sqrt{\sum P_x^2 + (\sum Q - \sum P_y)^2} \tag{2}$$

gdzie:

- R – wypadkowa reakcja łożyska na wałku wejściowym (obciążenie powierzchniowe),
- Q1..4 – oddziaływanie między sworzniami wewnętrznymi i kołem obiegowym,
- P<sub>x0..11</sub> – składowe oddziaływania poziomego (w kierunku "x") między sworzniami zewnętrznymi i kołem obiegowym,
- P<sub>y0..11</sub> – składowe oddziaływania pionowego (w kierunku "y") między sworzniami zewnętrznymi i kołem obiegowym.



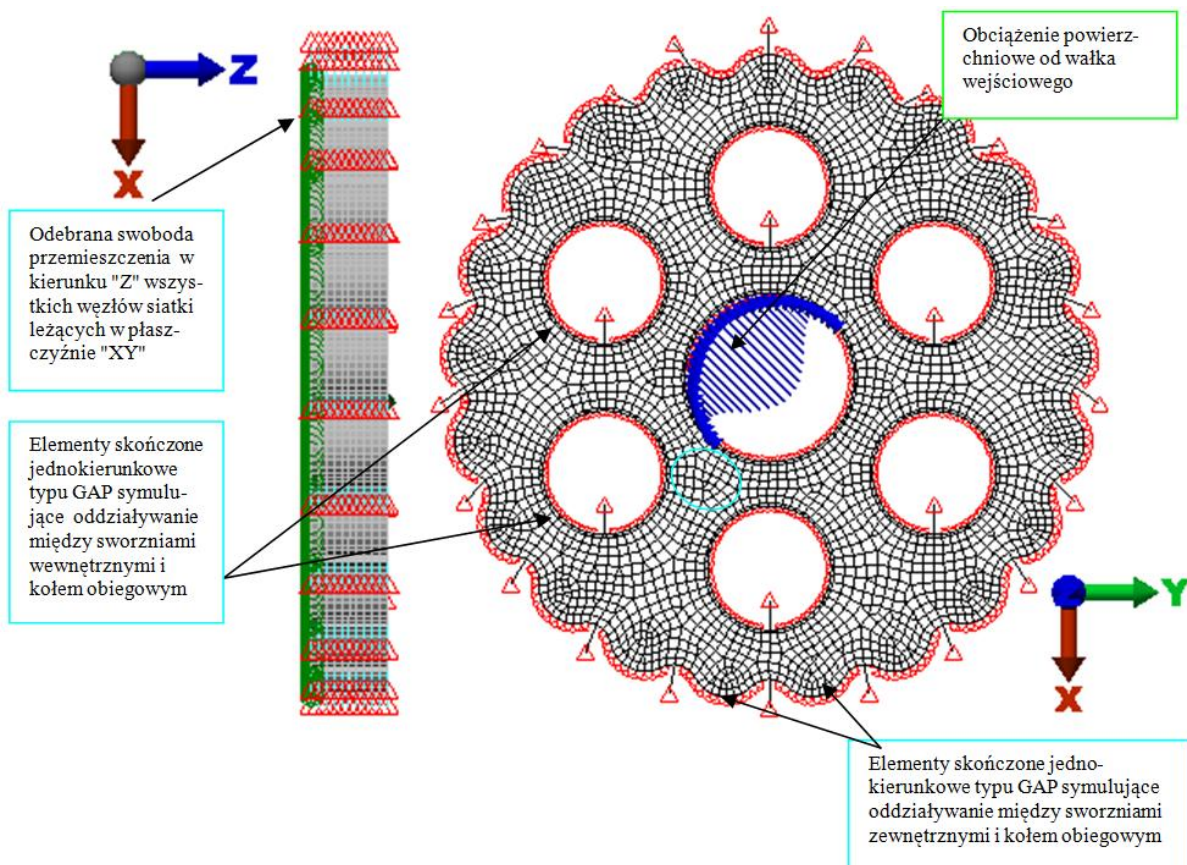
Rys. 4. Model koła obiegowego z rozkładem obciążeń oraz wielobok sił powstały z tych obciążeń

Do obliczeń metodą elementów skończonych w programie ASM2015 przyjęto następujące warunki brzegowe dla modelu (rys. 5):

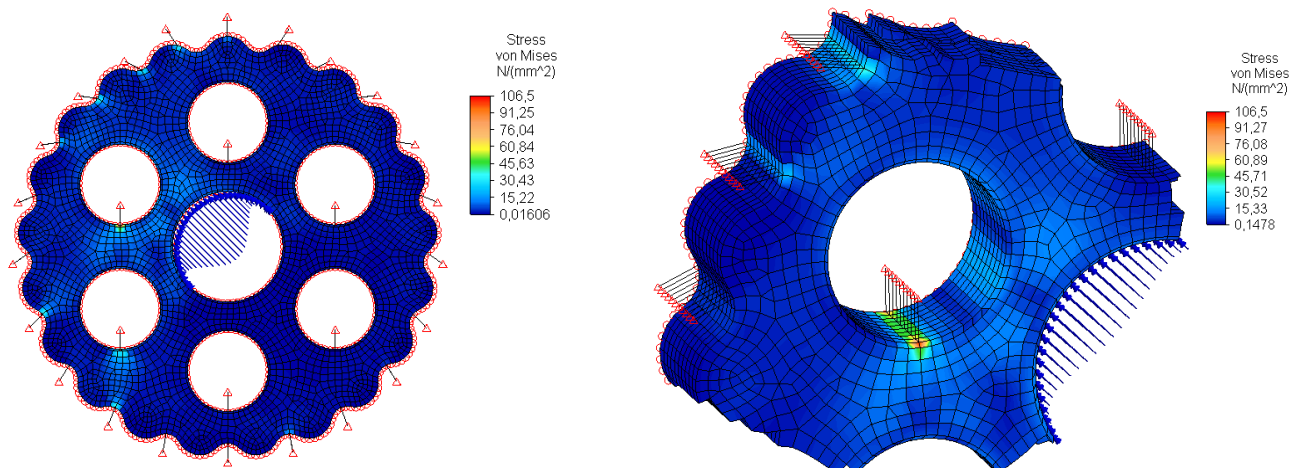
- odebrano swobodę przemieszczenia w kierunku "Z" wszystkich węzłów siatki leżących w płaszczyźnie "XY",
- wprowadzono jednokierunkowe elementy skończone typu GAP symulujące oddziaływanie między sworzniami wewnętrznymi i kołem obiegowym oraz oddziaływanie między sworzniami zewnętrznymi i kołem obiegowym,
- dodano, obliczone w Mathcad, obciążenia powierzchniowe pochodzące od wałka wejściowego.

## 2. NAPRĘŻENIA W KOLE OBIEGOWYM

Wyniki obliczeń MES modelu obciążeń koła obiegowego (rys. 5) przedstawione są na rysunku 6 i wskazują na niski poziom naprężeń zredukowanych (poniżej 100MPa).

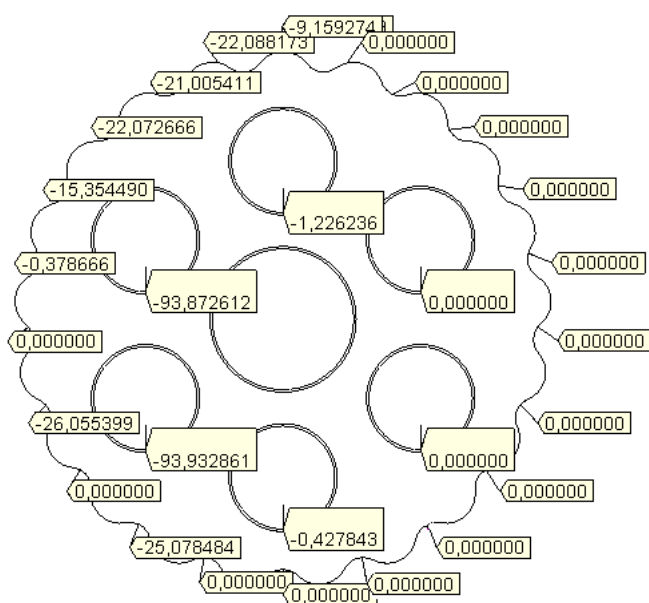


Rys. 5. Warunki brzegowe w modelu MES koła obiegowego



Rys. 6. Warstwie naprężeń zredukowanych w kole cykloidalnym

Wartość siły oddziaływania między sworzniami i kołem obiegowym (rys. 7) otrzymujemy sumując siły występujące w elementach typu "gap". Podczas pracy przekładni cykloidalnej każde z kół cykloidalnych oddziałuje w danej chwili jedną stroną ze sworzniami. Zerowe wartości reakcji świadczą o braku kontaktu sworzni zewnętrznego z kołem w danej chwili.

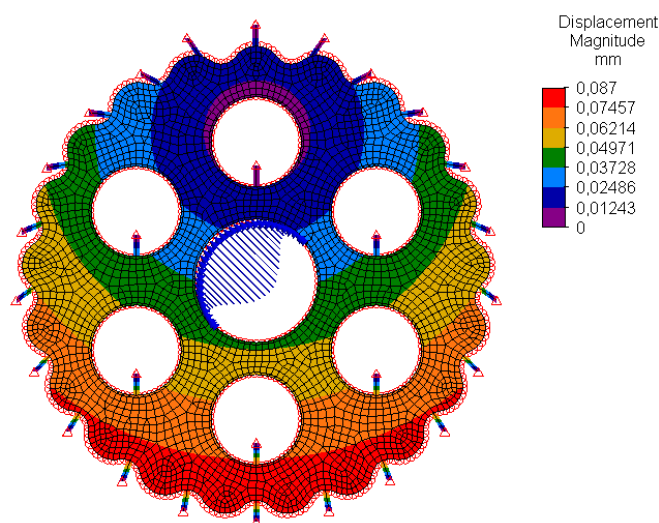


Rys. 7. Obliczone wartości reakcji [N] między sworzniami zewnętrznymi i kołem obiegowym oraz między sworzniami wewnętrznymi i kołem obiegowym

Weryfikację wyników wykonuje się zgodnie z wielobokiem sił (rys. 4). Należy porównać sumaryczną wartość reakcji od sworzni wewnętrznych  $\Sigma Q$ , składowe na osie x i y sumy reakcji od sworzni zewnętrznych  $\Sigma P_x$   $\Sigma P_y$  z wypadkową R wg równania (2).

### 3. ODKSZTAŁCENIA KOŁA OBIEGOWEGO

Warstwie wypadkowych odkształceń koła obiegowego (rys. 8) są pierścieniami ze środkiem położonym w górnym otworze. Maksymalna wyliczona wartość odkształceń sprężystych nie przekracza 0,09 mm.

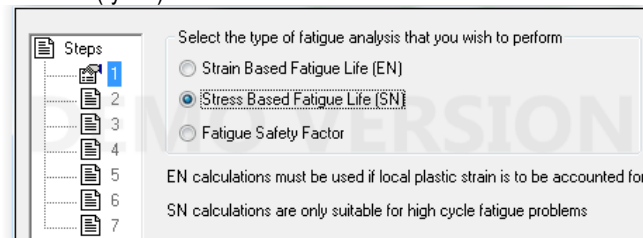


Rys. 8. Warstwie wypadkowych odkształceń w modelu koła obiegowego

### 4. TRWAŁOŚĆ ZMĘCZENIOWA KOŁA OBIEGOWEGO

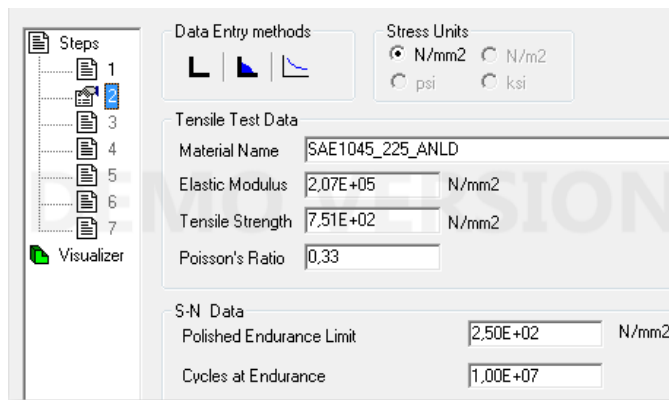
Obliczenia trwałości zmęczeniowej koła obiegowego wykonano w programie ASM2015 w kilku kolejno opisanych niżej krokach.

Krok 1. Obliczenia wykonano zakładając zmęczenie wysokocyklowe materiału (rys. 9).



Rys. 9. Wybór analizy - zmęczenie wysokocyklowe materiału

Krok 2. Wybór materiału z biblioteki i określenie rodzaju obróbki powierzchniowej. Obliczenia przeprowadzane dla materiału o wytrzymałości zmęczeniowej nie większej niż 250MPa np. SAE 1045 (rys.10) ze współczynnikiem korekcyjnym dla powierzchni poddanej polerowaniu

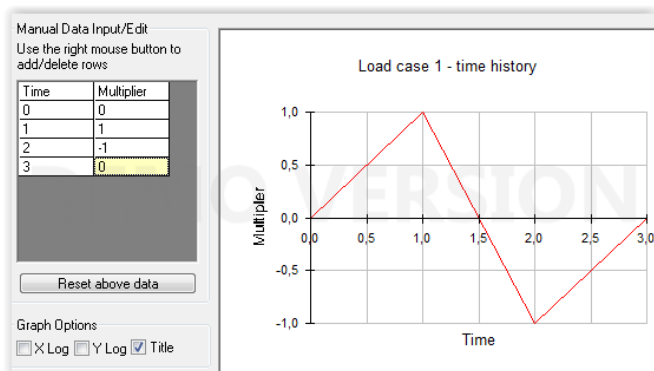


Rys. 10. Wybór materiału SAE 1045 z biblioteki

Krok 3. Wprowadzenie wartości współczynnika koncentracji naprężeń i współczynnika dynamicznego:

- współczynnik koncentracji naprężeń 1.0 - współczynnik dynamiczny 0,7

Krok.4. Zdefiniowanie krzywej obciążenia (cykle symetryczne) do obliczeń zmęczeniowych (rys. 11)

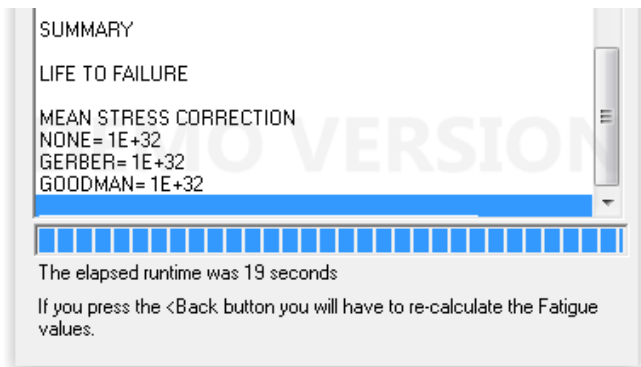


Rys. 11. Krzywa obciążenia cyklicznego do obliczeń zmęczeniowych (cykle symetryczne)

Krok.5. Obliczenia i analiza wyników trwałości zmęczeniowej według trzech hipotez (rys. 12):

- bez korekcji asymetrii cykli - zadane obciążenie jest symetryczne,
- z korekcją asymetrii według Gerbera,
- z korekcją asymetrii według Goodmana.

Otrzymane wyniki wskazują na dostateczny zapas trwałości zmęczeniowej koła obiegowego ponieważ  $10^{32}$  cykli (wartość obliczona)  $> 5 \cdot 10^7$  (wartość wymagana).



Rys. 12. Wyniki obliczeń trwałości zmęczeniowej wg trzech hipotez: bez korekcji (none), z korekcją wg Gerbera oraz z korekcją wg Goodmana

WNIOSKI

1. Uwzględniając tylko kryterium dopuszczalnych naprężeń zredukowanych możliwe jest wykonanie dysku epicykloidalnego z standardowej, ogólnodostępnej stali przy zachowaniu współczynnika bezpieczeństwa większego od 2. Należy jednak pamiętać o charakterze współpracy koła obiegowego szczególnie z sworzniami wewnętrznymi oraz zewnętrznymi, a także z tulejami ślizgowymi jako elementami pośredniczącymi w transmisji obciążeń. Taki charakter pracy wymaga zastosowania materiałów o wysokiej twardości.
2. Wyniki obliczeń odkształceń koła obiegowego wskazują na jego dużą sztywność.
3. Obliczenia zmęczeniowe prowadzące się do weryfikacji osiągnięcia minimalnej wymaganej liczby cykli  $10^7$  potwierdziły dostateczny zapas trwałości zmęczeniowej zarówno bez korekcji asymetrii jak i z korekcją wg Gerbera lub Goodmana.
4. Analiza wyników naprężeń zredukowanych i odkształceń wskazuje na celowość optymalizacji kształtu koła obiegowego. Z uwagi na szerokie spektrum aplikacji przekładni cykloidalnej w transporcie wymagana jest wręcz znacząca redukcja masy, szczególnie łatwa w przypadku koła obiegowego.

BIBLIOGRAFIA

1. Chmurawa M. Obiegowe przekładnie cykloidalne z modyfikacją ząbienia. Politechnika Śląska. Zeszyty naukowe nr 1547. Gliwice 2002
2. Chmurawa M. "Distribution of loads in cycloidal planetary gear". International Conference Mechanics'99, Kaunas University, 8-9 April 1999, Lithuania, s.92-100
3. Borislavov B., Borisov I., Panchev V. "Design of a Planetary-Cyclo-Drive Speed Reducer Cycloid Stage, Geometry, Element Analyses", Växjö, 2012-05-30 Sweden

CYCLOIDAL DISC CALCULATION OF CYCLOIDAL GEAR USING FINITE ELEMENT METHOD

Abstract

Currently, the latest generation CNC machine allows to produce cycloid gear requiring very high accuracy of its individual components.

These gears are characterized by higher efficiency and reliability, and lower energy consumption compared with widespread heavy, noisy and outdated tech gear of involute curve.

One of the most important components of cyclo gear are epicycloidal discs.

In Mathcad script was done epicycloidal disc calculations take into account equations of outline epicycloidal disc, geometric conditions, correction outline of teeth, experimental coefficients and values of surface pressure.

Assuming the same geometry cycloidal disc and boundary conditions configuration were performed FEM calculations.

In this paper are:

*- an original way to verify the results of the calculation of loads acting on epicycloidal disc,  
- reduced stress distribution and deformation of a single epicycloidal disc,  
- calculation of the fatigue life of epicycloidal disc.  
Calculation load, stress and strain were made by finite element method using Autodesk Mechanical Symulation v.2015 (ASM2015).*

Autorzy:

**Król Kazimierz, Kołodziejczyk Krzysztof, Olejarczyk Krzysztof, Wikło Marcin** - Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Mechaniczny; 26-600 Radom; ul. Krasickiego 54. Tel: + 48 48 361-71-16,