ISSN 1232-3829
tts 10/2013
Technika Transportu Szynowego koleje ▪ tramwaje ▪ metro

ATAMAN Magdalena, SZCZEŚNIAK Wacław

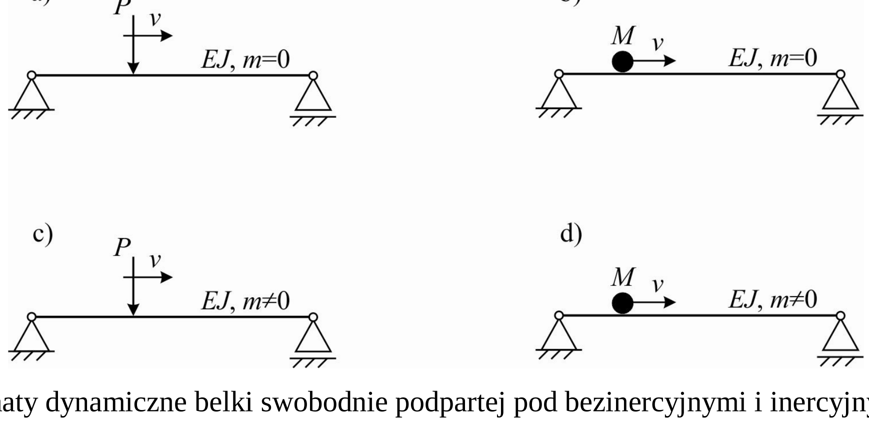
O PEWNYM UPROSZCZENIU W ROZWIĄZANIU ZADANIA WILLISA-STOKESA

Streszczenie

W pracy przedstawiono rozwiązanie zadania Willisa-Stokesa, które dotyczy bezmasowej belki sprężystej swobodnie podpartej na końcach i obciążonej ruchomym punktem materialnym. Zaprezentowano dwa rozwiązania tego zadania i porównano otrzymane w obu przypadkach wyniki. Rozwiązanie numeryczne równania ruchu belki porównano z analitycznym rozwiązaniem przybliżonym. Z przeprowadzonej analizy wynika, że analityczna metoda przybliżona może być stosowana w zakresie małych prędkości obciążenia.

WSTĘP

Zadanie Willisa-Stokesa nie jest nowe w dynamice budowli. Dotyczy ono bezmasowej belki sprężystej swobodnie podpartej na swoich końcach, obciążonej ruchomym punktem materialnym o zadanej masie M. W oryginalnym zadaniu punkt materialny ma stałą prędkość. Zadanie takie w dynamice mostów miałoby sens fizyczny wtedy, gdyby masa pojazdu była bardzo duża a masa dźwigara mostowego mała. Zadaniem odwrotnym do zadania Stokesa jest tzw. zadanie Kryłowa o ruchomej bezmasowej sile skupionej na belce o zadanej masie rozłożonej. Wreszcie jeśli belka ma masę i obciążenie jest również inercyjne, to zadanie mieści w sobie oba wymienione wyżej modele. Na rysunku 1 pokazano symbolicznie wszystkie trzy modele i jako pierwszy tzw. model zupełnie bezmasowy stosowany w mechanice budowli przy wyznaczaniu linii wpływu.



Rys. 1. Schematy dynamiczne belki swobodnie podpartej pod bezinercyjnymi i inercyjnymi obciążeniami ruchomymi; a) zadanie mechaniki budowli (linia wpływu), b) zadanie Willisa-Stokesa (1849 r.), Boussinesq – 1883 r., c) zadanie Kryłowa (1905 r.) i Radakovica (1899 r.), d) zadanie Inglisa (1934 r.) i Renaudota (1861 r.)

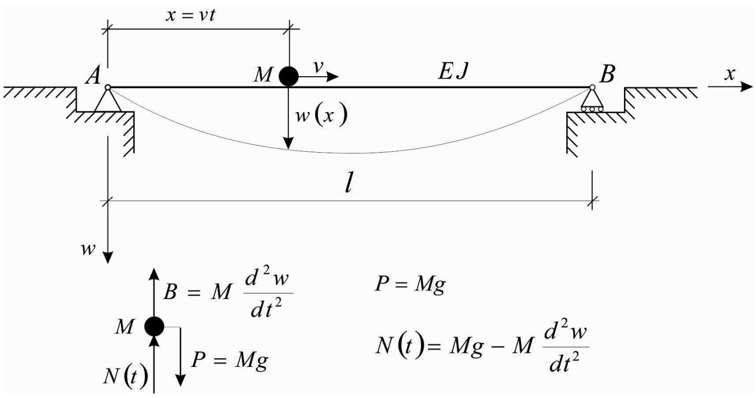
1. RÓWNANIE RUCHU BELKI I JEGO NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 2, na ruchomy punkt materialny działają trzy siły. Nacisk dynamiczny $N(t)$ opisuje równanie równowagi :

$$N(t) = Mg - M\frac{d^2 w}{dt^2}. \tag{1}$$

Ugięcie statyczne belki $w(x)$ wywołane siłą $N(t)$, przy $x = vt$ opisujemy, znanym z wytrzymałości materiałów, wzorem:

$$\begin{gathered} w = \frac{N(t)\,x^2(l-x)^2}{3lEJ} = \frac{N(t)\left(lx - x^2\right)^2}{3lEJ}, \\ x = vt \quad w = \frac{N(t)\,(vt)^2(l-vt)^2}{3lEJ} = \frac{N(t)\left[lvt - (vt)^2\right]^2}{3lEJ}, \\ N(t) = \frac{3lEJ}{(vt)^2(l-vt)^2}w = \frac{3lEJ}{x^2(l-x)^2}w. \end{gathered} \tag{2}$$



Rys. 2. Układ sił działających na ruchomy punkt materialny w zadaniu Willisa-Stokesa

Różniczkując równanie ruchu (1) opisujące ugięcie śledzące belki pod ruchomym punktem materialnym możemy je przedstawić albo we współrzędnej t albo x. Mamy zatem:

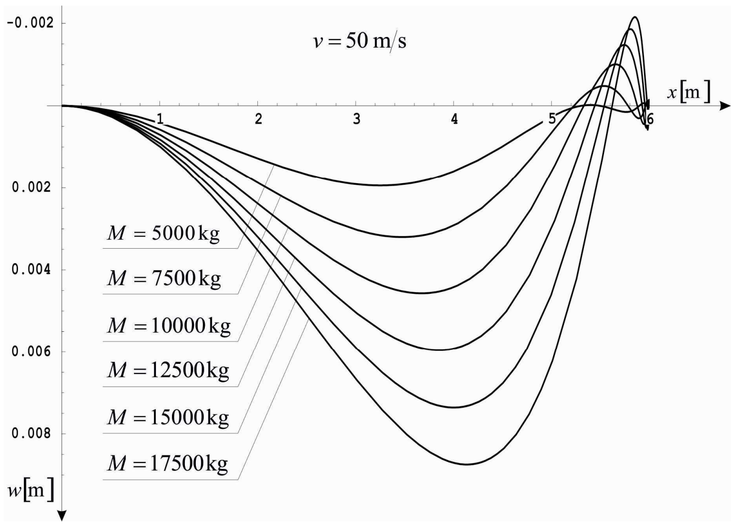
$$\begin{gathered} \frac{3lEJ}{v^2t^2(l-vt)^2}w = Mg - M\frac{d^2w}{dt^2}, \\ \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{3lEJ}{Mv^2t^2(l-vt)^2}w = g, \\ x = vt, \quad \frac{dw}{dt} = v\frac{dw}{dx}, \quad \frac{d^2w}{dt^2} = v^2\frac{d^2w}{dx^2}, \\ \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{3lEJ}{Mv^2x^2(l-x)^2}w = \frac{g}{v^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Ostatnie równanie możemy zapisać w następującej postaci:

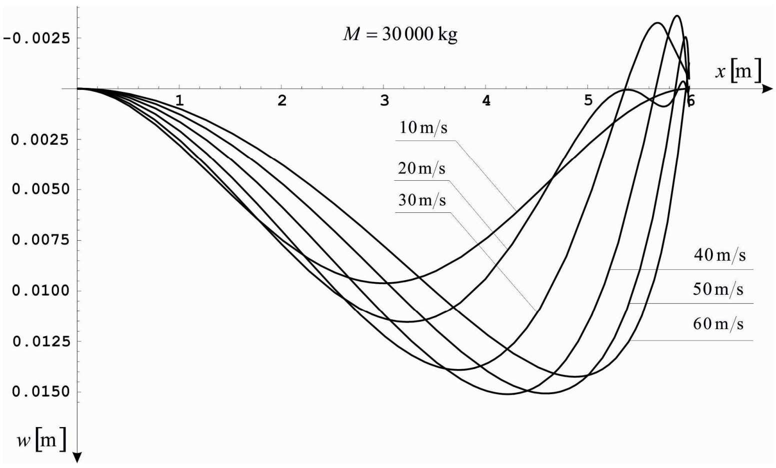
$$\frac{d^2 w}{d x^2} + \frac{q}{x^2 \left(l - x\right)^2} w = p , \tag{4}$$

gdzie: $q = \dfrac{3lEJ}{M v^2}$, a $p = \dfrac{g}{v^2}$.

Różniczkowe równanie ruchu belki zawiera osobliwości we współczynniku przy $x = 0$ oraz przy $x = l$. Rozwiązując to równanie numerycznie przy wykorzystaniu pakietu Wolframa „Mathematica” osobliwość we współczynniku $x^2 \left(l - x\right)^2$ omijamy przez nadanie odpowiednich warunków początkowych $x = vt \approx 0$ i $x \approx l$. Na rysunku 3 pokazano graficznie wyniki rozwiązania w przypadku stalowej belki dwuteowej IP 500 o długości 6 metrów.



Rys. 3. Ugięcie śledzące belki pod ruchomym punktem materialnym o masie M i prędkości $v = 50\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



Rys. 4. Ugięcie śledzące belki pod ruchomym punktem materialnym o masie $M = 30\,000$ kg i różnych prędkościach v

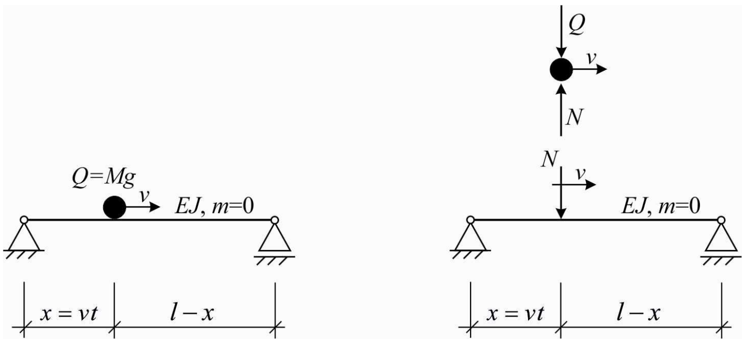
2. UPROSZCZENIE ZADANIA WILLISA-STOKESA

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rysunku 5 możemy zapisać następujące wyrażenia na siłę nacisku oraz ugięcie statyczne tej belki:

$$N = Q\left(1+\frac{\ddot{w}}{g}\right) = Q\left(1-\frac{d^2w}{dx^2}\frac{v^2}{g}\right),$$
$$w = \frac{N\,x^2\left(l-x\right)^2}{3lEJ}. \tag{5}$$

Po uwzględnieniu nacisku $(5)_1$ we wzorze na ugięcie $(5)_2$ otrzymujemy rozwiązanie zadania w postaci:

$$w = Q\left(1-\frac{d^2w}{dx^2}\frac{v^2}{g}\right)\frac{x^2\left(l-x\right)^2}{3lEJ}. \tag{6}$$



Rys. 5. Schemat przyjęty do rozwiązania uproszczonego zadania Willisa-Stokesa

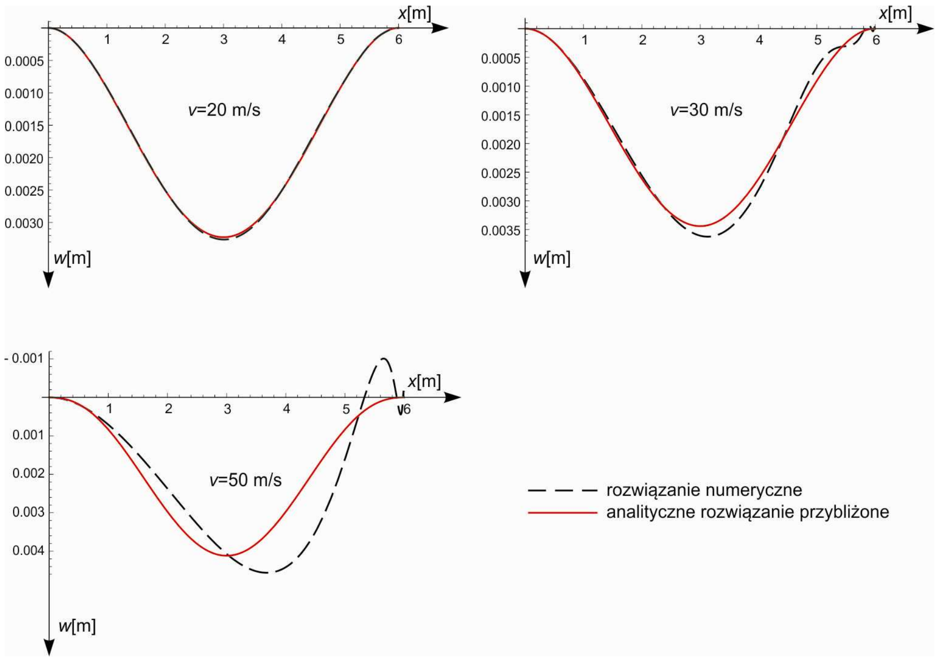
Stosując uproszczenie polegające na zastąpieniu we wzorze (6) $\frac{d^2w}{dx^2}$ pochodną ugięcia statycznego:

$$\frac{d^2w}{dx^2} \approx \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{Q\,x^2\left(l-x\right)^2}{3lEJ}\right], \tag{7}$$

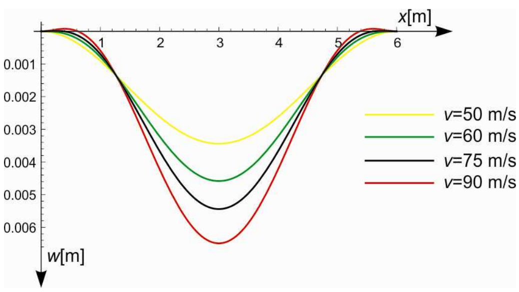
otrzymujemy wyrażenie na ugięcie w postaci zamkniętej:

$$w = Q\left[1-\frac{Q\left(2l^2-12\,lx+12\,x^2\right)}{3lEJ}\frac{v^2}{g}\right]\frac{x^2\left(l-x\right)^2}{3lEJ}. \tag{8}$$

Na rysunku 6 przedstawiono graficznie porównanie numerycznego rozwiązania równania ruchu z analitycznym rozwiązaniem przybliżonym. Z kolei rysunek 7 przedstawia wpływ prędkości na ugięcie śledzące belki wyznaczone na podstawie rozwiązania analitycznego.



Rys. 6. Ugięcie śledzące belki otrzymane na podstawie numerycznego rozwiązania równania ruchu belki i analitycznego rozwiązania przybliżonego



Rys. 7. Wpływ prędkości na ugięcie śledzące belki w analitycznym rozwiązaniu przybliżonym

PODSUMOWANIE

W pracy omówiono zadanie Willisa-Stokesa bezmasowej belki sprężystej swobodnie podpartej na końcach i obciążonej ruchomym punktem materialnym. Analizowano dwa rozwiązania tego zadania i porównano otrzymane w obu przypadkach wyniki. Rozwiązanie numeryczne równania ruchu belki porównano z analitycznym rozwiązaniem przybliżonym. Z przeprowadzonej analizy wynika, że analityczna metoda przybliżona może być stosowana w zakresie małych prędkości obciążenia. Rozwiązując zadanie numerycznie osobliwość równania ruchu belki przy $x=0$ oraz przy $x=l$ omijamy przez nadanie warunkom początkowym małych liczb niewiele różniących się od zera i od $x=l$.

BIBLIOGRAFIA

1. Szcześniak W., *Zadanie Willisa–Stokesa i <<MATHEMATICA>>*. Theoretical Foundations of Civil Engineering IX, Warsaw 2001, pp. 405-412.
2. Willis R., *Appendix to the Report of the Commisaioners to Inquire into Application of Iron to Railway Structures*. London 1851.
3. Stokes G.G., *Discussion of a differential equation relating to the breaking railway bridges.* Trans. Cambridge Philosoph. Soc. 1849, Part 5, pp. 707-737.

4. Murawski G.B., *O zadacze Willisa-Stokesa.* Stroitelnaja Mechanika i Rasczot Sooružienij, wypusk 4, 1985, str. 55-56.
5. Timoshenko S.P., Young D.H., *Engineering Mechanics. Dynamics.* Mc-Graw Hill, 1937.
6. Timoshenko S.P., *Vibration Problems in Engineering*. D. Van Nostrand Cmop., Pricenton, 1956.
7. Fryba L., *Vibration of Solids and Structures under moving loads.* Academic Press Praque, 1972.
8. Panowko Ja.G., *Mechanika twiordogo deformacjonnogo tieła.* Moskwa, Nauka 1985.
9. Kryłow A.N., *Wibracja sudow.* Akademia Nauk ZSRR, Moskwa, 1948.
10. Ataman M., Szcześniak W., *Analiza dynamiczna belek pod obciążeniem ruchomym.* Prace Naukowe Politechniki Radomskiej im. Kazimierza Pułaskiego, Transport Nr 2(11), 2000, str. 84-100.
11. Szcześniak W., Ataman M., *Pewien sposób znajdowania zamkniętej postaci drgań czysto wymuszonych w zadaniu Kryłowa.* Theoretical Foundations of Civil Engineering IX, Warsaw 2001, pp. 413-432.

ABOUT SOME SIMPLIFICATION IN SOLVING THE WILLIS-STOKES' PROBLEM

Abstract

In the paper the Willis-Stokes' problem is presented. The problem concerns free supported massless, elastic beam under the moving particle. Two methods of solution are presented and results are compared. Numerical solution of the beam's equation of motion is compared with analytical approximate solution. It is shown that the analytical approximate solution may be used for low speeds of loading.

Autorzy:
dr inż. **Magdalena Ataman** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej
prof. dr hab. inż. **Wacław Szcześniak** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

Niniejsza praca jest współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, projekt „Program Rozwojowy Politechniki Warszawskiej" realizowany przez Centrum Studiów Zaawansowanych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY